Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Ганжа, С. П. Царев, Алгебраическая формула суперпозиции и полнота преобразований Бэклунда $(2 + 1)$ -мерных интегрируемых систем, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 6, 197–198

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1025>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 17:26:33

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА СУПЕРПОЗИЦИИ И ПОЛНОТА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ БЭКЛУНДА (2+1)-МЕРНЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ

Е. И. ГАНЖА, С. П. ЦАРЕВ

Как известно, преобразование Бэклунда для многих $(1 + 1)$ -мерных интегрируемых уравнений обладает свойством нелинейной суперпозиции, позволяющим по двум решениям $u^{(1)}(x, t)$, $u^{(2)}(x, t)$, полученным из некоторого начального $u^{(0)}(x, t)$, найти с помощью явной алгебраической формулы четвертое решение этого же уравнения $u^{(12)}(x, t)$, связанное преобразованиями Бэклунда с промежуточными $u^{(i)}$. Многие $(2 + 1)$ -мерные интегрируемые системы также обладают (авто)преобразованиями Бэклунда и принципом нелинейной суперпозиции. Однако, соответствующее $u^{(12)}(x, y, t)$, как правило, требует для своего нахождения квадратуры, т.е. алгебраической формулы нет. Мы покажем, как в этом случае получить алгебраическую формулу нелинейной суперпозиции.

Изложение метода мы проведем на примере преобразования Рибокура триортогональных систем координат в $\mathbb{R}^3$ – одном из примеров $(2 + 1)$ -мерного геометрического преобразования Бэклунда, а также преобразования Мутара, возникшем впервые в классической дифференциальной геометрии конца XIX века [3], [4] и имеющем многочисленные приложения в теории интегрируемых $(2 + 1)$ -мерных систем [2], [5]. Основой предлагаемого метода является следующая диаграмма преобразований Бэклунда–Рибокура (рис. 1). Здесь $\vec{x}^{(0)}$ – задающая триортогональную систему координат вектор-функция $\vec{x}^{(0)}(u^1, u^2, u^3)$ – “начальное” решение $(2 + 1)$ -мерной системы Ламе (см. [3], [4]), $\vec{x}^{(i)}$ – его преобразования Рибокура, $\vec{x}^{(ij)}$ получены квадратурами по принципу нелинейной суперпозиции, $\varphi^{(*)}$ – потенциалы преобразований Рибокура.

Как показано в [1], указанная на рис. 1 диаграмма действительно коммутативна для $(1 + 1)$ -мерных уравнений (sine-Gordon, КдФ, система трехволнового взаимодействия). Для $(2 + 1)$ -мерных систем именно диаграмма рис. 1 дает возможность избавиться от квадратур и получить однозначную алгебраическую формулу суперпозиции (“формулу куба”).

ТЕОРЕМА 1. Пусть заданы три преобразования Рибокура $\vec{x}^{(0)} \xrightarrow{\varphi^{(i)}} \vec{x}^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, и полученные из них суперпозициями $\vec{x}^{(12)}$, $\vec{x}^{(13)}$, $\vec{x}^{(23)}$. Тогда существует единственная триортогональная система координат $\vec{x}^{(123)}$, связанная преобразованиями Рибокура с $\vec{x}^{(ij)}$ и выражающаяся через заданные $\vec{x}^{(i)}$, $\vec{x}^{(ij)}$ алгебраическими формулами.

Для уравнения Мутара $u_{xy} = M(x, y)u$ ($u = u(x, y)$) и его эллиптических и гиперболических вариантов также возможно построить алгебраическую формулу суперпозиции преобразований Мутара на основе диаграммы рис. 1. Фактически Л. Бьянки в [3, v. II, part II, § 297] в несколько другой форме приводит получающуюся “формулу куба”.

Как можно проверить, если имеется четыре начальных преобразования Рибокура, мы получаем коммутативную диаграмму преобразований Рибокура (четырёхмерный скелет куба),

Рис. 1

включающую 16 вершин. Разумно предположить коммутативность аналогичных диаграмм в случае n начальных преобразований Рибоккура. Важное свойство таких “гиперкубов Бьянки” состоит в возможности получить широкие классы решений $(2+1)$ -мерных интегрируемых систем, используя лишь алгебраические операции (выполнив квадратуры лишь “на первом уровне”). Полученные формулы аналогичны известным “формулам вронскианов и пфаффианов” [2].

Преобразования Бэклунда позволяют построить цепочку решений $(u_0) \rightarrow (u_1) \rightarrow (u_2) \rightarrow \dots \rightarrow (u_k) \rightarrow \dots$, выполняя лишь алгебраические операции, начиная с u_3 . Однако вопрос о том, насколько широк получающийся набор решений u_k (по сравнению с множеством всех решений соответствующих уравнений) оставался открытым. В настоящей работе мы положительно решаем вопрос о (локальной) плотности для случаев уравнений Мутара и Ламе. Тем самым найденные в [2] семейства решений $(2+1)$ -мерных интегрируемых уравнений образуют “мощный” запас их решений, а классическое преобразование Рибоккура позволяет получить “почти всякую” ортогональную криволинейную систему координат в $\mathbb{R}^3$, что позволяет считать системы уравнений, описывающие эти системы координат (в частности, уравнения (1), (2)) вполне интегрируемыми $(2+1)$ -мерными системами.

Для преобразований Рибоккура воспользуемся следующей формой системы уравнений Ламе [4]:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial \beta}{\partial x_0} = \lambda^2 \frac{\partial \alpha}{\partial x_0}, \\ \frac{\partial \beta}{\partial x_1} = -\lambda^2 \frac{\partial \alpha}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial(\alpha + \beta)}{\partial x_2} = (\beta - \alpha) \frac{\partial \log \lambda}{\partial x_2}. \end{cases}$$

Исключая α, β , легко свести (1) к одному уравнению на “потенциал” $M(x_0, x_1, x_2) = \ln \lambda$:

$$(2) \quad \frac{\partial^3 M}{\partial x_0 \partial x_1 \partial x_2} = \operatorname{cth}(M) \frac{\partial M}{\partial x_0} \frac{\partial^2 M}{\partial x_1 \partial x_2} + \operatorname{th}(M) \frac{\partial M}{\partial x_1} \frac{\partial^2 M}{\partial x_0 \partial x_2}.$$

Преобразование Рибоккура (2) задается парой решений $\{\alpha, \beta\}$ и $\{\bar{\alpha}, \bar{\beta}\}$ системы (1).

ТЕОРЕМА 2. Пусть дан начальный потенциал $M_0(x_0, x_1, x_2)$ – решение (2) в окрестности точки $(0, 0, 0)$. Тогда для любого $N = 0, 1, 2, \dots$ найдется такое K , что для любого другого потенциала $\bar{M}(x_0, x_1, x_2)$ найдется цепочка преобразований Рибоккура $M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow \dots \rightarrow M_K$ длины K , $\partial_0^i \partial_1^j \partial_2^k M_K(0, 0, 0) = \partial_0^i \partial_1^j \partial_2^k \bar{M}(0, 0, 0)$.

Потенциалы $M(x, y)$ уравнения Мутара – произвольные функции, не удовлетворяющие какому-либо дифференциальному уравнению.

ТЕОРЕМА 3. Пусть задан произвольный начальный потенциал $M_0(x, y)$. Тогда для любого $N = 0, 1, 2, \dots$ найдется такое K , что для любого набора чисел P_{ij} , $0 \leq i, j$, $i + j \leq N$, производные потенциала M_K (из последовательности преобразований Мутара) в точке $(0, 0)$ совпадают с P_{ij} : $P_{ij} = \partial_x^i \partial_y^j M_K(0, 0)$.

Доказательства приведенных результатов доступны через электронный архив `solv-int@xyz.lanl.gov`: `solv-int/9606001`, `solv-int/9606002`, `solv-int/9606003`.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Царев С. П. Дифференциально-геометрические методы интегрирования систем гидродинамического типа // Дис. ... докт. физ.-матем. наук. М., 1993. [2] Athorne C., Nimmo J. J. C. // Inverse Problems. 1991. V. 7. P. 809–826. [3] Bianchi L. Lezioni di geometria differenziale. V. I, II. Bologna: N. Zanichelli, 1923–1927. [4] Darboux G. Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes. Paris: Gauthier-Villars, 1910. [5] Oevel W., Rogers C. // Rev. Mod. Phys. 1993. V. 5. P. 299–330.