Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М.-М. Деза, М. И. Штогрин, Изометрические вложения полуправильных многогранников, разбиений и им дуальных в гиперкубы и кубические решетки, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 6, 199–200

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1026>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 06:44:02

ИЗОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЛОЖЕНИЯ ПОЛУПРАВИЛЬНЫХ МНОГОГРАННИКОВ, РАЗБИЕНИЙ И ИМ ДУАЛЬНЫХ В ГИПЕРКУБЫ И КУБИЧЕСКИЕ РЕШЕТКИ

М. ДЕЗА, М. И. ШТОГРИН

Дан граф $G = (V, E)$. Метрику кратчайшего пути в графе G обозначим через d_G . Скажем, что G вложим со шкалой λ в гиперкуб H_m или кубическую решетку Z_m , и назовем его l_1 -графом (и обозначим это $G \rightarrow \frac{1}{\lambda}H_m$ или $G \rightarrow \frac{1}{\lambda}Z_m$), если существует отображение φ множества вершин V в H_m или Z_m , при котором

$$\lambda d_G(v_i, v_j) = \|\varphi(v_i) - \varphi(v_j)\|_{l_1} = \sum_{1 \leq k \leq m} |\varphi_k(v_i) - \varphi_k(v_j)|, \quad v_i, v_j \in V.$$

При этом мы выбираем наименьшее такое число λ .

Важное необходимое условие для $G \rightarrow \frac{1}{\lambda}H_m$ или $G \rightarrow \frac{1}{\lambda}Z_m$ состоит в том [5], что метрика d_G удовлетворяет всем гиперметрическим неравенствам

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j d_G(v_i, v_j) \leq 0, \quad (b_1, b_2, \dots, b_n) = b \in Z_n, \quad \sum_{1 \leq k \leq n} b_k = 1.$$

При $b = (1, 1, 1, -1, -1)$ неравенство называется 5-гональным. Для односвязной поверхности, например, все триангуляции типа $[4.2m.2n]$, исключая октаэдр $[4.4.4]$, невозможны, так как они не 5-гональны. Для многих архимедовых и им дуальных разбиений двумерной поверхности произвольного рода нарушаются те же 5-гональные неравенства, что и на универсальной накрывающей.

Известно [1], что метрика с рациональными значениями изометрически вкладывается в l_1^M (т.е. R^M с метрикой $\|x - y\|_{l_1}$) тогда и только тогда, когда она вложима изометрически с некоторой шкалой λ в некоторый гиперкуб H_m . Любой планарный l_1 -граф имеет шкалу 1 или 2 [4]. Конечные l_1 -графы охарактеризованы в [12] и [6] как изометрические подграфы прямого произведения полукубов и β_n . Полиномиальный алгоритм нахождения l_1 -графов дан в [9]. Для l_1 -графа с $n \geq 4$ вершинами либо $\lambda = 1$, либо $\lambda \leq n - 2$ четно [12]. При $n - 2 = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$, эта оценка не улучшаема. В [7] показано, что остов конечного n -зонотопа, т.е. аффинной проекции гиперкуба, есть изометрический подграф куба, проекцией которого он является, и даны примеры центрально-симметричных многогранников, изометрично вложимых в куб, но не зоноэдров. Любое разбиение плоскости на центрально-симметричные многоугольники зоноэдрально и вложимо как в H_∞ , так и в Z_m , $m \leq \infty$. Например, хорошо известное непериодическое разбиение плоскости на ромбы, предложенное Пенроузом, вкладывается в Z_5 , в связи с чем Де Бройн представляет это разбиение как проекцию.

Пусть граф G вложен в гиперкуб. Тогда любой паре противоположных гиперграней соответствует разрез графа G на компоненты G_1, G_2 , вложенные в эти грани. Два вложения графа G назовем эквивалентными, если им соответствует одна и та же совокупность разрезов. Граф G называется l_1 -жестким [8], если все его вложения в гиперкубы попарно эквивалентны. Если $\lambda = 1$, то l_1 -граф является l_1 -жестким [8]. Для l_1 -жесткого графа $\lambda = 1$ или $\lambda = 2$ [12]. Любой l_1 -граф, не содержащий K_n , является l_1 -жестким [4].

Вложения правильных многогранников $(3^3) \rightarrow \frac{1}{2}H_3$, $(3^3) \rightarrow \frac{1}{2}H_4$, $(3^4) \rightarrow \frac{1}{2}H_4$, $(3^5) \rightarrow \frac{1}{2}H_6$, $(4^3) \rightarrow H_3$, $(5^3) \rightarrow \frac{1}{2}H_{10}$ впервые получены в [11]. В [2] найдены вложения правильных разбиений евклидовой плоскости $(3^6) \rightarrow \frac{1}{2}Z_3$, $(6^3) \rightarrow \frac{1}{2}Z_3$ и показано, что правильные разбиения $\{2n, p\}$ и $\{\infty, p\}$ гиперболической плоскости вложимы в H_∞ . Оставшийся случай нечетных многоугольников решает суммирующая

ТЕОРЕМА 1. Остов любого правильного разбиения S^2 , R^2 и Λ^2 вложим со шкалой 1 или 2 в гиперкуб, конечномерный для конечного графа.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00166) и DFG (Рурский университет Бохум, университет Билефельд).

ТЕОРЕМА 2. Среди архимедовых и дуальных им (каталановых) многогранников вложимы только следующие: $[3.6^2] \rightarrow \frac{1}{2}H_7$, $(4.6^2) \rightarrow H_6$, $[3.8^2] \rightarrow \frac{1}{2}H_{12}$, $[3.4.3.4] \rightarrow H_4$, $(4.6.8) \rightarrow H_9$, $(3.4^3) \rightarrow \frac{1}{2}H_{10}$, $(3^4.4) \rightarrow \frac{1}{2}H_9$, $[5.6^2] \rightarrow \frac{1}{2}H_{10}$, $[3.10^2] \rightarrow \frac{1}{2}H_{26}$, $[3.5.3.5] \rightarrow H_6$, $(4.6.10) \rightarrow H_{15}$, $(3.4.5.4) \rightarrow \frac{1}{2}H_{16}$, $(3^4.5) \rightarrow \frac{1}{2}H_{15}$; $(4^2.2n+1) \rightarrow \frac{1}{2}H_{2n+3}$, $(4^2.2n) \rightarrow H_{n+1}$, $[3.4^2] \rightarrow \frac{1}{2}H_4$, $(3^3.n) \rightarrow \frac{1}{2}H_{n+1}$.

ТЕОРЕМА 3. Среди архимедовых и им дуальных (лавесовских) разбиений плоскости вложимы только следующие: $[3.6.3.6] \rightarrow Z_3$, $(3.4.6.4) \rightarrow \frac{1}{2}Z_3$, $(4.8^2) \rightarrow Z_4$, $(4.6.12) \rightarrow Z_6$, $[3.12^2] \rightarrow \frac{1}{2}Z_\infty$, $(3^4.6) \rightarrow \frac{1}{2}Z_6$, $(3^3.4^2) \rightarrow \frac{1}{2}Z_3$, $(3^2.4.3.4) \rightarrow \frac{1}{2}Z_4$.

ТЕОРЕМА 4. Среди 2-униформных разбиений плоскости и им дуальных (см. [10, рис. 2.2.1]) вложимы только следующие: $(3^6; 3^4.6)_1 \rightarrow \frac{1}{2}Z_6$, $(3^6; 3^3.4^2)_1 \rightarrow \frac{1}{2}Z_3$, $(3^6; 3^3.4^2)_2 \rightarrow \frac{1}{2}Z_3$, $(3^6; 3^2.4.3.4) \rightarrow \frac{1}{2}Z_6$, $(3^4.6; 3^2.6^2) \rightarrow \frac{1}{2}Z_5$, $(3^3.4^2; 3^2.4.3.4)_1 \rightarrow \frac{1}{2}Z_6$, $(3^3.4^2; 3^2.4.3.4)_2 \rightarrow \frac{1}{2}Z_4$, $(3^3.4^2; 3.4.6.4) \rightarrow \frac{1}{2}Z_3$, $(3^3.4^2; 4^4)_1 \rightarrow \frac{1}{2}Z_3$, $(3^3.4^2; 4^4)_2 \rightarrow \frac{1}{2}Z_3$, $(3^6; 3^2.6^2)^* \rightarrow Z_\infty$, $(3.4^2.6; 3.6.3.6)_2^* \rightarrow Z_3$.

Среди примеров k -униформных разбиений плоскости R^2 , данных в [10] на рис. 2.2.2, и им дуальных вкладываются только первое из них: $(3^3.4^2; 3^2.4.3.4; 4^4) \rightarrow \frac{1}{2}Z_4$; на рис. 2.2.3 – вложимы только $(a) \rightarrow \frac{1}{2}Z_6$ и $(b)^* \rightarrow \frac{1}{2}Z_\infty$; на рис. 2.1.6 ни само разбиение, ни ему дуальное не вложимо. Заметим, что те l_1 -графы, которые являются остовами k -униформных и дуальных им разбиений сферы S^2 , евклидовой плоскости R^2 или плоскости Лобачевского Λ^2 , вложимы, соответственно, в конечномерный куб, конечномерную решетку или бесконечномерную решетку. Отметим также, что для любого архимедова многогранника, кроме (3.4^2) , или разбиения R^2 и ему дуального остов ровно одного из них является l_1 -графом. Скрученный ромбокубооктаэдр Ашкингузе–Миллера и ему дуальный не 5-гональны.

ТЕОРЕМА 5. Все l_1 -графы, фигурирующие в теоремах 1, 2, 3 и 4, за исключением двух графов (3^3) и $[3.4^2]$, являются l_1 -жесткими.

Среди правильных многогранников при $n \geq 4$ вложимы α_n , β_n , γ_n и не вложимы 4-мерные 120-гранник [7], 600- и 24-гранник [2].

ТЕОРЕМА 6. При $n \geq 4$ вложимы только следующие полуправильные многогранники (в обозначениях Кокстера): $O_{21} \rightarrow \frac{1}{2}H_5$, $1_{21} \rightarrow \frac{1}{2}H_5$ и, быть может, $s\{3, 4, 3\} \rightarrow \frac{1}{2}H_{12}$.

Вопрос о вложимости для всех 92 случаев 3-многогранников с правильными гранями рассмотрен в [7]. Используя список из [3], этот вопрос для $n \geq 4$ решает

ТЕОРЕМА 7. Среди многогранников с правильными гранями при $n \geq 4$ вложимы только пирамида на основании β_{n-1} , бипирамида на основании α_{n-1} и O_{21} с пирамидой над одной октаэдрической гранью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Assouad P., Deza M. // Ann. Discrete Math. 1980. V. 8. P. 197–210. [2] Assouad P. // The Geometric Vein, the Coxeter Festschrift. 1981. P. 141–147. [3] Blind G., Blind R. // Comment. Math. Helv. 1991. V. 66. P. 150–154. [4] Chepoi V., Deza M., Grishukhin V. // Preprint LIENS-96-11. [5] Тыркин М. Е. // ДАН. 1960. Т. 134. № 5. С. 1037–1040. [6] Deza M., Grishukhin V. // Quart. J. Math. Oxford. 1993. V. 2. P. 399–433. [7] Deza M., Grishukhin V. // Preprint LIENS-96-1. [8] Deza M., Laurent M. // J. Algebraic Combin. 1994. V. 3. P. 153–175. [9] Deza M., Shpectorov S. // European. J. Combin. 1996. V. 17. P. 279–289. [10] Grünbaum B., Shephard G. C. Tilings and Patterns. New York: Freeman and Company, 1986. [11] Kelly J. B. // Lect. Notes in Math. 1975. V. 490. P. 17–31. [12] Shpectorov S. // European. J. Combin. 1993. V. 14. P. 117–130.