Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Джалилов, К. М. Ханин, Об инвариантной мере для гомеоморфизмов окружности с одной точкой излома, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 6, 201–202

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1027>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 13:39:26

ОБ ИНВАРИАНТНОЙ МЕРЕ ДЛЯ ГОМЕОМОРФИЗМОВ ОКРУЖНОСТИ С ОДНОЙ ТОЧКОЙ ИЗЛОМА

А. А. Джалилов, К. М. Ханин

В настоящей работе изучаются гомеоморфизмы окружности, задаваемые функциями с одной точкой излома, в которой происходит скачок первой производной. А именно, пусть $f(x)$ непрерывная строго монотонная функция такая, что

- а) $f(x+1) = f(x) + 1$;
- б) существует точка $x_c \in S^1 = [0, 1)$, для которой $\sqrt{f'(x_c - 0)/f'(x_c + 0)} = c \neq 1$;
- с) $f(x) \in C^{2+\nu}(S^1 \setminus \{x_c\})$, $f'(x) \geq \text{const} > 0$, $x \in S^1 \setminus \{x_c\}$.

Определим гомеоморфизм окружности T , отвечающий f : $Tx = \{f(x)\}$, $x \in S^1$, где $\{\cdot\}$ обозначает дробную часть числа. Обозначим $\rho = \rho(T)$ соответствующее число вращения для $T[1]$. Предположим, что ρ иррационально. Тогда отображение T является строго эргодическим [1]. Единственную инвариантную меру обозначим через μ .

ТЕОРЕМА 1. *Инвариантная мера μ гомеоморфизма T сингулярна относительно меры Лебега λ .*

При доказательстве теоремы 1 мы используем общие свойства динамических разбиений и двойные отношения (cross-ratio).

Положим $\varphi = \mu([0, x])$, $x \in S^1$. Хорошо известно [1], [2], что отображение φ сопрягает T с линейным поворотом $T_\rho x = \{x + \rho\}$, $x \in S^1$, т.е. имеет место равенство $\varphi(Tx) = T_\rho \varphi(x)$, $x \in S^1$.

Пусть имеется четверка чисел (a, b, c, d) , a, b, c, d . Введем двойные отношения (cross-ratio), отвечающие этой четверке, по формуле $\text{Cr}(a, b, c, d) = \frac{(b-a)(d-c)}{(c-a)(d-b)}$. Свитек в [3] интенсивно использовал двойные отношения для анализа гомеоморфизмов окружности.

Сформулируем основные леммы и, используя их, докажем теорему 1.

ЛЕММА 1. *Пусть $\varphi'(x_0) = \alpha > 0$, $x_0 \in S^1$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$, при котором для любой четверки точек (z_1, z_2, z_3, z_4) , $z_1 < z_2 < z_3 < z_4$, такой, что*

- а) $z_i \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$;
- б) пусть $a = z_2 - z_1$, $b = z_3 - z_2$, $c = z_4 - z_3$, тогда для некоторой константы $R > 1$ $R^{-1}a \leq b \leq Ra$, $R^{-1}a \leq c \leq Ra$;
- с) $\max(|z_1 - x_0|, |z_2 - x_0|, |z_3 - x_0|, |z_4 - x_0|) \leq Ra$;

выполнено неравенство

$$\left| \frac{\text{Cr}(\varphi(z_1), \varphi(z_2), \varphi(z_3), \varphi(z_4))}{\text{Cr}(z_1, z_2, z_3, z_4)} - 1 \right| < c_1 \varepsilon,$$

где константа $c_1 > 0$ не зависит от ε .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Мы скажем, что тройка отрезков $([z_1, z_2], [z_2, z_3], [z_3, z_4])$ покрывает особую точку $x = x_c$ "правильным" образом с константой M , если

- 1) $x_c \in [z_1, z_2]$ (или $x_c \in [z_3, z_4]$) и $x_c \notin [z_2, z_3]$;
- 2) $(x_c - z_1)/(z_2 - z_1) \geq M$ (или $(z_4 - x_c)/(z_4 - z_3) \geq M$).

ЛЕММА 2. *Пусть определяющая функция $f(x)$ гомеоморфизма T удовлетворяет условиям теоремы 1 для некоторой точки x_0 и сопряжение φ дифференцируемо, т.е. $\varphi'(x_0) = \alpha > 0$, $x_0 \in S^1$, $x_0 \notin \{T^{(i)}x_c, i \in \mathbb{Z}^1\}$. Тогда для бесконечного числа натуральных n существуют отрезки $[z_i, z_{i+1}] \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $i = 1, 2, 3$, и константа M , $0 < M < 1$, со следующими свойствами:*

- 1) $|T^{(i)}[z_1, z_4]| \leq \text{const } \beta^n$, $0 \leq i \leq q_n$, где $\beta = (1 + e^v)^{-1/2} < 1$, $v = \text{var}_{S^1} \ln f'(x)$, $|\cdot|$ означает длину отрезка;
- 2) $\sum_{i=0}^{q_n} |T^{(i)}[z_1, z_4]| \leq K$, где константа $K > 0$ не зависит от n и ε ;

- 3) отрезки $[z_i, z_{i+1}]$, $i = 1, 2, 3$, и $[T^{q_n} z_i, T^{q_n} z_{i+1}]$, $i = 1, 2, 3$, удовлетворяют условиям леммы 1;
- 4) система из тройки отрезков $([T^i z_1, T^i z_2], [T^i z_2, T^i z_3], [T^i z_3, T^i z_4])$, $0 \leq i \leq q_n$, покрывает особую точку $x = x_c$ не более чем два раза, причем хотя бы одна тройка отрезков покрывает ее "правильным" образом с константой M ; кроме того, $x_c \notin \bigcup_{i=0}^{q_n} [T^i z_2, z_3]$.

ЛЕММА 3. Предположим, что отрезки $[z_i, z_{i+1}]$, $i = 1, 2, 3$, удовлетворяют утверждениям 1)–4) леммы 2. Тогда для достаточно больших натуральных n имеют место следующие неравенства:

- a) при $c > 1$ $\frac{\text{Cr}(T^{q_n} z_1, T^{q_n} z_2, T^{q_n} z_3, T^{q_n} z_4)}{\text{Cr}(z_1, z_2, z_3, z_4)} > \text{const} > 1$;
- b) при $c < 1$ $\frac{\text{Cr}(T^{q_n} z_1, T^{q_n} z_2, T^{q_n} z_3, T^{q_n} z_4)}{\text{Cr}(z_1, z_2, z_3, z_4)} < \text{const} < 1$.

Докажем теперь теорему 1. По определению $\varphi(x) = \int_{S^1} d\mu(x)$, $x_0 \in S^1$. Отсюда видно, что $\varphi(x)$ является неубывающей функцией. По теореме Лебега о дифференцируемости монотонной функции (см. [4, с. 324]) на множестве "полной" мере (по мере Лебега) функция $\varphi(x)$ имеет конечные производные $\varphi'(x)$. Это множество обозначим через X . Поскольку мера Лебега λ и инвариантная мера μ являются непрерывными мерами имеем: $\lambda\{T^{(i)}(x_c), i \in Z^1\} = \mu\{T^{(i)}(x_c), i \in Z^1\} = 0$. Обозначим $X_1 = X \setminus \{T^{(i)}(x_c), i \in Z^1\}$. Очевидно, что $\lambda(X) = \mu(X) = 1$. Для доказательства теоремы 1 нам достаточно показать, что $\varphi'(x) \equiv 0$ на множестве X_1 .

Предположим, что $\varphi'(x) = \alpha > 0$, $x_0 \in X_1$. Для определенности предположим, что величина излома $c > 1$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Возьмем тройку отрезков $([z_1, z_2], [z_2, z_3], [z_3, z_4])$, $[z_i, z_{i+1}] \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $i = 1, 3$, удовлетворяющие условиям леммы 3. В силу леммы 1:

$$(1) \quad \left| \frac{\text{Cr}(\varphi(z_1), \varphi(z_2), \varphi(z_3), \varphi(z_4))}{\text{Cr}(z_1, z_2, z_3, z_4)} - 1 \right| < c_1 \varepsilon,$$

$$(2) \quad \left| \frac{\text{Cr}(\varphi(T^{(q_n)} z_1), \varphi(T^{(q_n)} z_2), \varphi(T^{(q_n)} z_3), \varphi(T^{(q_n)} z_4))}{\text{Cr}(T^{(q_n)} z_1, T^{(q_n)} z_2, T^{(q_n)} z_3, T^{(q_n)} z_4)} - 1 \right| < c_1 \varepsilon.$$

Используя уравнение для сопряжения $\varphi(Tx) = T\rho\varphi(x)$ легко можно показать, что

$$(3) \quad \text{Cr}(\varphi(T^{(q_n)} z_1), \varphi(T^{(q_n)} z_2), \varphi(T^{(q_n)} z_3), \varphi(T^{(q_n)} z_4)) = \text{Cr}(\varphi(z_1), \varphi(z_2), \varphi(z_3), \varphi(z_4)).$$

Из (1)–(3) непосредственно вытекает, что

$$(4) \quad \left| \frac{\text{Cr}(T^{(q_n)} z_1, T^{(q_n)} z_2, T^{(q_n)} z_3, T^{(q_n)} z_4)}{\text{Cr}(z_1, z_2, z_3, z_4)} - 1 \right| < c_3 \varepsilon,$$

где константа c_3 не зависит от ε и n .

С другой стороны, из леммы 3 следует, что для бесконечного числа натуральных n

$$\frac{\text{Cr}(T^{(q_n)} z_1, T^{(q_n)} z_2, T^{(q_n)} z_3, T^{(q_n)} z_4)}{\text{Cr}(z_1, z_2, z_3, z_4)} > \text{const} > 1.$$

При достаточно малых ε , последнее неравенство и неравенство (4) одновременно не могут выполняться. Это противоречие доказывает теорему 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980. [2] Khanin K. M., Vul E. V. // Adv. Soviet Math. 1991. V. 3. P. 57–98. [3] Swiatek G. // Comm. Math. Phys. 1988. V. 119. №2. P. 109–128. [4] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функции и функционального анализа. М.: Наука, 1976.