Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Доброхотов, О редукции к уравнению Хилла цепочки Гюгонио–Маслова для траекторий точечных особенностей уравнений мелкой воды, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 6, 203–204

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1028>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 15:32:57

**О РЕДУКЦИИ К УРАВНЕНИЮ ХИЛЛА ЦЕПОЧКИ
ГЮГОНИО–МАСЛОВА ДЛЯ ТРАЕКТОРИЙ ТОЧЕЧНЫХ
ОСОБЕННОСТЕЙ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ**

С. Ю. Доброхотов

В [1], [2] В. П. Маслов предложил общую концепцию описания распространения особенностей решений гиперболических систем квазилинейных уравнений. Согласно этой концепции у решений находящихся в “общем положении” и обладающих свойствами “структурной самоподобности и устойчивости”, имеется всего несколько типов особенностей. При этом для существования таких особых решений необходимо выполнение некоторых (не замкнутых) цепочек обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов рядов Тэйлора, определяющих эти решения. Для ударных волн первое уравнение из этой цепочки есть хорошо известное условие Гюгонио, связывающее скорость движения фронта и амплитуду ударной волны, а остальные уравнения суть поправки к условию Гюгонио. Цепочки уравнений, имеющие аналогичный смысл получаются, в частности, для решений с изолированными точечными особенностями уравнений мелкой воды с учетом силы Кориолиса:

$$(1) \quad \eta_t + \nabla \cdot (\mathbf{u}\eta) = 0, \quad \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla\eta - \omega T\mathbf{u} = 0.$$

Здесь ω – константа, $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_2^1)(x, t)$, $\eta(x, t)$ – неизвестные функции аргументов $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $t \geq 0$, ∇ – двумерный градиент. Соответствующие особые решения¹ представляются в виде

$$(2) \quad \eta = \rho(x, t) + R(x, t)\sqrt{S(x, t)}, \quad \mathbf{u}_j = u_j + U_j(x, t)S\sqrt{(x, t)}, \quad j = 1, 2,$$

где $u_1 = v_1$, $u_2 = w$, U_j, ρ, R, S – гладкие функции, причем $S \geq 0$ и при каждом t S обращается в ноль в лишь одной точке траектории $\Gamma = \{x = (X_1(t), X_2(t))\}$. Для таких решений уравнения из цепочки Гюгонио–Маслова связывают функции X_1, X_2 и коэффициенты разложения в ряд

Тэйлора функций v, w, ρ, S и т. д. в точках Γ . Обозначим $y_{k,l} = \frac{1}{k!l!} \frac{\partial^{k+l} y}{\partial x_1^k \partial x_2^l}(X(t), t)$ для лю-

бой функции $y(x, t)$. Приведем (см. [3], [4]) первые 16 уравнений цепочки, выполнение которых является необходимым и достаточными для описания функций (2) с точностью до $O(|x - X(t)|^3)$ и для того, чтобы функции (2) удовлетворяли системе (1) с той же точностью. Предварительно отметим, что необходимыми условиями существования решения (2), являются, во-первых, “вмороженность” особой части решения (2) (“вихря”) в поле u (и поле $\mathbf{u}$)

$$(3) \quad \dot{X}_1 = v_{00}(X, t), \quad \dot{X}_2 = w_{00}(X, t)$$

и, во-вторых, выполнения условия Коши–Римана для комплексной скорости $v(x, t) + iw(x, t)$ в точках $x = X(t)$ и $\rho_{20} = \rho_{02}$. Обозначим $q(t) = \partial v / \partial x_2|_{\Gamma} \equiv \partial w / \partial x_2|_{\Gamma}$, $p(t) = \partial v / \partial x_1|_{\Gamma} \equiv -\partial w / \partial x_1|_{\Gamma}$, $r = \rho_{02} \equiv \rho_{20}$. Указанные уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} (4) \quad & \dot{v}_{00} + \omega w_{00} + \rho_{10} = 0, \quad \dot{w}_{00} - \omega v_{00} + \rho_{01} = 0 \\ (5) \quad & \dot{\rho}_{00} + 2q\rho_{00} = 0, \quad \dot{q} - p^2 + q^2 + \omega p + 2r = 0, \quad \dot{p} + 2pq - \omega q = 0, \\ (6) \quad & \dot{\rho}_{10} + 3q\rho_{10} - p\rho_{01} + \rho_{00}(w_{11} + 2v_{20}) = 0, \quad \dot{\rho}_{01} + 3q\rho_{01} + p\rho_{10} + \rho_{00}(v_{11} + 2w_{02}) = 0, \\ (7) \quad & \dot{r} + 4pr + \frac{1}{2}\rho_{10}(3v_{20} + w_{11} + v_{02}) + \frac{1}{2}\rho_{01}(v_{11} + 3w_{02} + w_{20}) \\ & \quad = -\rho_{00}(3v_{30} + 3w_{03} + w_{21} + v_{12}), \\ & \dot{v}_{20} + 3qv_{20} - \omega w_{20} - p(v_{11} - w_{20}) = -3\rho_{30}, \\ & \dot{v}_{11} + 3qv_{11} - \omega w_{11} - p(2v_{02} - 2v_{20} - w_{11}) = -2\rho_{21}, \\ & \dot{v}_{02} + 3qv_{02} - \omega w_{02} + p(v_{11} + w_{02}) = -\rho_{12}, \\ & \dot{w}_{20} + 3qw_{20} + \omega v_{20} - p(w_{11} - v_{20}) = -\rho_{21}, \\ & \dot{w}_{11} + 3qw_{11} + \omega v_{11} - p(-2w_{20} + 2w_{02} + v_{11}) = -2\rho_{12}, \\ & \dot{w}_{02} + 3qw_{02} + \omega v_{02} + p(w_{11} - v_{02}) = -3\rho_{03}, \end{aligned}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-010-0937).

¹Такие решения представляют интерес с точки зрения описания возможных траекторий движения “глаза тайфуна”, см. [1], [3]

Замкнем эти уравнения аналогично работе [5], (относящейся к аналогичным цепочкам для ударных волн уравнения $z_t + zz_x = 0$), полагая все правые части в (6), (7) равными нулю (такое замыкание является разумным в том смысле, что содержит минимальное количество соотношений, позволяющих определить “старшую часть” особенности в (2) (см. [3])). Рассмотрим семейство уравнений Хилла, зависящее от трех комплексных параметров $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2)$ и вещественного параметра Ω_0 (эти параметры играют роль констант интегрирования системы (4)–(5))

$$(8) \quad \frac{d^2 y}{d\Phi^2} + \operatorname{Re} \left(\Omega_0^2 + \frac{\beta_0 \beta_1}{2} e^{2i\Phi} + \overline{\beta_0 \beta_1} e^{-2i\Phi} + \beta_1 \beta_2 e^{i\Phi} - \overline{\beta_0 \beta_2} e^{-i\Phi} \right) y = 0.$$

ТЕОРЕМА. 1) Интегрирование уравнений (3)–(7) с нулевыми правыми частями в (6), (7) сводится к интегрированию уравнения (8).

2) Компонента ρ_{00} ограничена снизу и сверху строго положительными константами, и это свойство сохраняется при малых изменениях параметров (констант интегрирования) β, Ω_0 , тогда и только тогда, когда $i_1) \omega \neq 0$ и $i_2)$ уравнение (8) сильно устойчиво.

3) Если $i_1), i_2)$ выполнены, то ρ_{00} и $X_1 + iX_2$ выражаются через решение Флоке $y = g(\Phi) \exp(i\Theta(\Phi))$ уравнения (8), нормированное условиями $g(\Phi + 2\pi) = g(\Phi)$, $d\Theta/d\Phi = 1/g^2(\Phi)$, $\Theta|_{\Phi=0} = 0$, следующим образом:

$$\rho_{00} = \omega \mu g^2(\Phi) / \left(2|c| \left(1 - (1 - \mu^2) \sin^2 \frac{\omega(t - t_0)}{2} \right) \right),$$

$$X_1 + iX_2 = X^0 - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{1}{\mu|c|\omega}} (e^{-i\omega t} I_+ + I_-) + \frac{i}{\omega} (e^{-i\omega t} - 1) V^0.$$

Здесь V^0, X^0 – комплексные, $t_0, c, \mu, c \neq 0, 0 < \mu \leq 1$ – вещественные константы (константы интегрирования системы (3)–(7), дополнительные к β, Ω_0),

$$I_{\pm} = e^{\pm \frac{i\omega t_0}{2}} \int_0^{\Phi(t)} g(\Phi) (\mu \cos(\Theta(\Phi) - \Theta_0) \pm \sin(\Theta(\Phi) - \Theta_0)) e^{-\frac{i\Phi}{2}} (\beta_0 e^{i\Phi} - 2\beta_1 e^{-i\Phi} + 2\beta_2) d\Phi,$$

$\Phi(t)$ связано с t формулой

$$\Theta(\Phi) = \operatorname{Arctg} \left(\mu \operatorname{tg} \left(\frac{\omega}{2} (t - t_0) \right) \right) + \Theta_0, \quad \Theta_0 = \operatorname{Arctg} \left(\mu \operatorname{tg} \left(\frac{\omega}{2} t_0 \right) \right).$$

Под Arctg понимается такое значение, для которого $\Theta(\Phi) - \Theta_0$ лежит в том же промежутке $[\pi n, \pi(n+1)]$, что и $(t - t_0)\omega/2$ в первом случае, и Θ_0 в том же промежутке $[\pi n, \pi(n+1)]$, что и $\omega t_0/2$ во втором.

Последние три формулы определяют класс возможных приближенных траекторий точечных особенностей уравнений мелкой воды.

Основные шаги, приводящие к формулам для ρ_{00} и $X_1 + iX_2$, состоят в следующем: сначала через p и q с помощью (5) выражаются функции v_{20}, w_{20}, v_{11} , и т. д. Затем интегрируются уравнения (5) и (6), результат подставляется в уравнения (4), что приводит к нелинейному уравнению Ермакова для функции $\sqrt{\rho_{00}}$, отличающегося от уравнения (8) правой частью $C\rho_{00}^{-3/2}$, $C = \text{const}$ и сводящегося к нему (см. [6, с. 51]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Маслов В. П. // УМН. 1980. Т. 35. № 2. С. 252–253. [2] Маслов В. П. О распространении ударной волны в изэнтропическом невязком газе // Итоги науки и техники. Соврем. пробл. матем. Т. 8. М.: ВИНТИ, 1977. С. 199–271. [3] Булатов В. В., Владимиров Ю. В., Данилов В. Г., Доброхотов С. Ю. // ДАН. 1994. Т. 338. № 1. С. 102–105. [4] Жихарев В. Н. О необходимых условиях существования и единственности типа решения со слабой распространяющейся особенностью, сосредоточенной в точке, для уравнений гидродинамики в случае двух пространственных переменных // Деп. в ВИНТИ. № В86, 1986. С. 8148. [5] Prasad P., Ravindran R. // Appl. Math. Lett. 1990. V. 3. № 2. P. 107–109. [6] Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 1995.