Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Каллианпур, О. А. Олейник, О задачах со свободной границей, возникающих в теории вероятностей (теоремы единственности), *УМН*, 1996, том 51, выпуск 6, 205–206

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1029>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 18:00:24

О ЗАДАЧАХ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ (ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ)

Г. КАЛЛИАНПУР, О. А. ОЛЕЙНИК

При изучении вопроса об оптимальной остановке марковского процесса возникают задачи со свободной границей для обратного уравнения теплопроводности, аналогичные хорошо изученной задаче Стефана (см. [1]–[6] и др.). Здесь мы рассмотрим некоторые из них. Обзор работ по задаче Стефана можно найти в [7].

В этой работе мы изучим задачу со свободной границей для обратного уравнения теплопроводности (обратного параболического уравнения), с одной пространственной переменной, изменяющейся на конечном отрезке. (Случай пространственной переменной, изменяющейся на всей оси x , будет рассмотрен в следующей статье.)

В случае конечного отрезка задача типа Стефана состоит в том, чтобы определить в $\overline{Q}$, $Q = \{t, x : 0 < t < \infty, l_1 < x < l_2\}$, $\overline{Q}$ – замыкание Q , $l_1, l_2 = \text{const}$, непрерывную функцию $u(t, x)$, которая удовлетворяет следующим условиям.

1) В точках Q , где $u(t, x) < 0$, функция $u(t, x)$ удовлетворяет уравнению

$$(1) \quad a_1(t, x) \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b_1(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} + c_1(t, x) u + f_1(t, x) = 0,$$

а в точках Q , где $u(t, x) > 0$, функция $u(t, x)$ удовлетворяет уравнению

$$(2) \quad a_2(t, x) \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b_2(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} + c_2(t, x) u + f_2(t, x) = 0,$$

где a_i, b_i, c_i, f_i – некоторые заданные гладкие, ограниченные в Q функции, $a_i \geq a^0 > 0$.

2) В точках кривой $x = s(t)$, где $u = 0$, выполнено условие для скачка производной $\frac{\partial u}{\partial x}$:

$$(3) \quad k_1(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{u=+0} - k_2(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{u=-0} = \lambda(t, x) \frac{\partial s}{\partial t},$$

где $k_i(t, x) \geq k^0 > 0$, $\lambda(t, x) \geq 0$, k_i ($i = 1, 2$), λ – заданные гладкие, ограниченные в Q функции.

3) Выполнены граничные условия:

$$(4) \quad u(t, l_1) = u_1(t), \quad u(t, l_2) = u_2(t),$$

где $u_1(t), u_2(t)$ – заданные гладкие, ограниченные в Q функции. Такое решение задачи (1)–(4) мы будем называть классическим решением. Мы покажем, что классическое решение удовлетворяет интегральному тождеству, которое мы используем для определения слабого решения задачи (1)–(4). Для доказательства существования и единственности слабого решения задачи (1)–(4) мы используем методы, развитые в работах [8], [9].

Обозначим через $k(t, x, u)$, $a(t, x, u)$, $b(t, x, u)$, $c(t, x, u)$, $f(t, x, u)$ функции, равные, соответственно, $k_1(t, x)$, $a_1(t, x)$, $b_1(t, x)$, $c_1(t, x)$, $f_1(t, x)$, если $u < 0$, и $k_2(t, x)$, $a_2(t, x)$, $b_2(t, x)$, $c_2(t, x)$, $f_2(t, x)$, если $u > 0$.

Умножим уравнение (1) на $k_1(t, x)$ и уравнение (2) на $k_2(t, x)$ и запишем их в виде

$$(5) \quad a_i k_i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k_i \frac{\partial u}{\partial x} \right) + (k_i b_i - k_{ix}) \frac{\partial u}{\partial x} + k_i c_i u + k_i f_i = 0, \quad i = 1, 2.$$

Положим

$$\varphi(t, x, u) = \int_{c_0}^u a(t, x, \tau) k(t, x, \tau) d\tau + \gamma(t, x),$$

где $\gamma(t, x) = 0$ для $u < 0$ и $\gamma(t, x) = \lambda(t, x)$ для $u > 0$, $|c_0|$ – достаточно большая постоянная, $c_0 < 0$. Обозначим через h_x частную производную функции $h(t, x, u)$ относительно x и через $\frac{\partial h}{\partial x}$ – частную производную $h(t, x, u(t, x))$ относительно x . Подобные обозначения мы используем для h_t и $\frac{\partial h}{\partial t}$. Положим далее $\Psi(t, x, u) = \int_{c_0}^u [k(t, x, \tau) b(t, x, \tau) - k_x(t, x, \tau)] d\tau$, $v(t, x, u) = \int_{c_0}^u k(t, x, \tau) d\tau$, $w(t, x, u) = -\varphi_t + k c u + k f - \Psi_x$.

Уравнение (5) запишем в виде

$$(6) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial(\Psi - v_x)}{\partial x} + w = 0.$$

Пусть $F(t, x)$ — гладкая функция в $\overline{Q}$, $F(t, l_1) = F(t, l_2) = F(0, x) = 0$ и $F(t, x)$ имеет компактный носитель в $\overline{Q}$. Умножим уравнение (6) на $F(t, x)$ и проинтегрируем его по Q . После преобразования некоторых членов интегрированием по частям, учитывая условия (3), (4), получим

$$(7) \quad - \int_Q \varphi(t, x, u) \frac{\partial F}{\partial t} dt dx + \int_Q v(t, x, u) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dt dx - \int_Q (\Psi - v_x) \frac{\partial F}{\partial x} dt dx \\ + \int_Q w F dt dx + \int_0^\infty v(t, l_1, u_1(t)) \frac{\partial F}{\partial x} dt - \int_0^\infty v(t, l_2, u_2(t)) \frac{\partial F}{\partial x} dt = 0.$$

Слабым решением задачи (1)–(4) будем называть локально ограниченную и измеримую функцию в $\overline{Q}$, которая удовлетворяет интегральному тождеству (7) при любой функции $F(t, x)$. Имеет место следующая теорема единственности слабого решения.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что k, c, f не зависят от u и $\lambda(t, x)$ не зависит от t . Тогда:*

1) *если $\frac{\partial w}{\partial u} \leq \gamma_0 = \text{const} < 0$ при $t > T$, T — некоторая постоянная, то слабое решение $u(t, x)$ задачи (1)–(4) единственно в классе функций, удовлетворяющих условию: $|u(t, x)| \leq C_0 e^{\alpha_0 t}$, $C_0, \alpha_0 = \text{const} > 0$, α_0 зависит от $|\gamma_0|$ и не зависит от u ;*

2) *если $\frac{\partial w}{\partial u} \leq \gamma_1 = \text{const}$, $\gamma_1 > 0$ при $t > T$, то слабое решение задачи (1)–(4) единственно в классе функций, удовлетворяющих условию: $|u(t, x)| \leq C_1 e^{-\alpha_1 t}$, $C_1, \alpha_1 = \text{const} > 0$, где α_1 зависит от γ_1 ;*

3) *если $\lambda(t, x) \equiv 0$, $\frac{\partial w}{\partial u} \leq 0$, $\left| \frac{\partial \mu}{\partial u} / \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right| \leq \beta$ при $t > T$, где $\mu = \Psi - v_x$, β — постоянная, зависящая от $\min \left| \frac{\partial v}{\partial u} / \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right|$ при $t > T$ и $l_2 - l_1$, то слабое решение задачи (1)–(4) единственно в классе функций, удовлетворяющих условию: $|u(t, x)| \leq C_2 e^{\alpha_2 t}$, $\alpha_2, C_2 = \text{const} > 0$, где α_2 — достаточно малая постоянная;*

4) *если $\lambda \neq 0$ и $\frac{\partial w}{\partial u} \leq 0$ при $t > T$, то слабое решение задачи (1)–(4) единственно в классе функций таких, что $\int_{Q^{T_1}} |u(t, x)| dt dx = o(T_1)$, $Q^{T_1} = \{t, x : (t, x) \in Q, t > T_1\}$, $T_1 \rightarrow \infty$.*

Построены примеры, когда решение задачи (1)–(4) неединственно. Теоремы существования решения задачи (1)–(4) будут даны в следующей заметке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Михалеви́ч В. С. // Вестник Киевского ун-та. 1958. Т. 1. № 1. С. 101–104. [2] Григелионис Б. И., Ширяев А. Н. // Теория вероятн. и ее прим. 1966. Т. 11. № 4. С. 612–631. [3] Григелионис Б. И. // Литовск. матем. сб. 1969. Т. 9. № 3. С. 471–480. [4] Shepp L. A. // Ann. Math. Statist. 1969. V. 40. № 3. P. 993–1010. [5] Крылов Н. В. // ДАН СССР. 1970. Т. 194. № 6. С. 1263–1265. [6] Shiryaev A. N. Optimal stopping rules. New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1978. [7] Oleinik O. A., Primicerio M., Radkevich E. V. Stefan-like problems // Meccanica 28, 1993. P. 129–143. [8] Олейник О. А. // ДАН СССР. 1960. Т. 135. № 5. С. 1054–1058. [9] Oleinik O. A. On Stefan-type free boundary problems for parabolic equations // In Seminari 1962–1963 di analisi, algebra, geometria e topologia 1. Roma, 1965. P. 388–403.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова;
Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН

Принято редколлегией
23.10.1996