Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Пирогов, О спектре одномерной цепочки Изинга, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 6, 239–240

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm103>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 12:08:39

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

О СПЕКТРЕ ОДНОМЕРНОЙ ЦЕПОЧКИ ИЗИНГА

С. А. ПИРОГОВ

Рассмотрим одномерную квантовую систему с формальным гамильтонианом

$$H = - \sum_n \sigma_n^x + \varepsilon \sum_n \sigma_n^z \sigma_{n+1}^z.$$

Следуя [1], при $|\varepsilon| \ll 1$ определим гильбертово пространство $\mathcal{L}_\mu = L_2(X, \mu)$, где X — пространство бесконечных последовательностей ± 1 , а μ — мера, отвечающая основному состоянию гамильтониана H . Алгебра квазилокальных наблюдаемых $\mathfrak{A}$, т.е. C^* -алгебра, порожденная σ_n^x , σ_n^z , $-\infty < n < +\infty$, имеет естественное неприводимое представление π в пространстве $\mathcal{L}_\mu$. Вектор $\Omega = \{1\} \in \mathcal{L}_\mu$ определяет состояние ν на алгебре $\mathfrak{A}$ по формуле $\nu(A) = (\Omega, \pi(A)\Omega)$. Формальный гамильтониан H по теореме Робинсона определяет однопараметрическую группу автоморфизмов τ_t алгебры $\mathfrak{A}$, причем состояние ν инвариантно относительно τ_t . Поэтому τ_t определяет однопараметрическую унитарную группу U_t в пространстве $\mathcal{L}_\mu$. Ее генератор $\hat{H}$ рассматривается как операторная реализация формального гамильтониана H . Чтобы найти спектр оператора $\hat{H}$, заметим, что в пространстве $\mathcal{L}_\mu$ естественно действуют нелокальные операторы (“солитоны”)

$$J(k) = \prod_{n < k} \sigma_n^x,$$

переворачивающие спины на левой полуоси. Через $\mathfrak{B}$ обозначим C^* -алгебру, порожденную $\mathfrak{A}$ и $J(k)$. Можно проверить, что группа τ_t продолжается до группы $\bar{\tau}_t$ автоморфизмов алгебры $\mathfrak{B}$. Алгебра $\mathfrak{B}$ содержит подалгебру $\mathfrak{C}$ канонических антикоммутирующих соотношений с образующими

$$a_k^\pm = J(k)(\sigma_k^z \pm i\sigma_k^y).$$

Алгебра $\mathfrak{C}$ инвариантна относительно $\bar{\tau}_t$, и, как легко видеть, $\bar{\tau}_t$ действует на $\mathfrak{C}$ как группа линейных канонических преобразований $\hat{\tau}_t$. Проверим, что алгебра $\mathfrak{C}$ действует на $\mathcal{L}_\mu$ неприводимым образом. Обозначим через Θ оператор, переворачивающий все спины, т.е. меняющий значения координат в пространстве X на противоположные. Назовем оператор A в пространстве $\mathcal{L}_\mu$ четным, если он коммутирует с Θ , и нечетным, если он антикоммутирует. Четная часть алгебры $\mathfrak{C}$ совпадает с четной частью алгебры $\mathfrak{A}$, а нечетная часть алгебры $\mathfrak{C}$ состоит из операторов вида $J(k)$ (нечетный элемент $\mathfrak{A}$). Поэтому любой четный оператор A в $\mathcal{L}_\mu$ есть слабый предел четных элементов $\mathfrak{A}$, а значит, и четных элементов $\mathfrak{C}$. В частности, $J(k)$ есть слабый предел четных элементов $\mathfrak{C}$. Любой нечетный оператор A в $\mathcal{L}_\mu$ есть слабый предел нечетных элементов $\mathfrak{A}$,

т.е. операторов вида $J(k)$ (нечетный элемент $\mathfrak{C}$), а поскольку $J(k)$ есть слабый предел четных элементов $\mathfrak{C}$, то A есть слабый предел нечетных элементов $\mathfrak{C}$. Таким образом, любой оператор A как сумма четного и нечетного есть слабый предел элементов $\mathfrak{C}$ и, значит, действие $\mathfrak{C}$ на $\mathcal{L}_\mu$ неприводимо. Непосредственно (предельным переходом от конечного объема с периодическими граничными условиями) проверяется, что вектор Ω определяет на алгебре $\mathfrak{C}$ чистое квазисвободное (т.е. фоковское с точностью до преобразования Боголюбова) состояние $\hat{\nu}$. Состояние $\hat{\nu}$ инвариантно относительно группы $\hat{\tau}_t$, и теперь оператор $\hat{H}$ можно интерпретировать как генератор однопараметрической группы, определенной $\hat{\tau}_t$. Поэтому оператор $\hat{H}$ – гамильтониан свободного фермигаза в фоковском пространстве. Закон дисперсии $\omega(p)$ этого газа легко вычисляется из явного вида $\hat{\tau}_t$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Малышев В. А. // Функциональный анализ и его прил. 1979. Т. 13. № 1. С. 31–41.

Институт проблем передачи информации РАН

Принято редколлегией
07.04.1998