Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Костюченко, К. А. Мирзоев, Критерий вполне неопределенности трехчленных рекуррентных соотношений, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 6, 207–208

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1030>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 12:38:24

КРИТЕРИЙ ВПОЛНЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ТРЕХЧЛЕННЫХ РЕКУРРЕНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ

А. Г. Костюченко, К. А. Мирзоев

1. Пусть C^p ($p \geq 1$) – евклидово p -мерное пространство вектор-столбцов со стандартным скалярным произведением y^*x , а ℓ_p^2 – гильбертово пространство бесконечных последовательностей векторов $u = (u_0, u_1, \dots)$, $u_j \in C^p$, со скалярным произведением $(u, v) = \sum_{j=0}^{+\infty} v_j^* u_j$. Пусть, далее, A_j, B_j ($j = 0, 1, \dots$) – квадратные матрицы порядка p , элементы которых являются комплексными числами, причем A_j – самосопряженная матрица, а B_j^{-1} существует. Рассмотрим разностное выражение второго порядка

$$(lu)_j = B_j u_{j+1} + A_j u_j + B_{j-1}^* u_{j-1}, \quad j = 0, 1, \dots,$$

где $u_{-1} = 0$, $u_0, u_1, \dots \in C^p$. Символом l обозначим операцию, действующую на последовательности матриц $U_0, U_1, \dots$ размерности p с элементами из C так же, как и l . Пусть $P_j(z)$ и $Q_j(z)$ – решения матричного уравнения

$$(1) \quad (lU)_j = zU_j, \quad j = 0, 1, \dots,$$

удовлетворяющие начальным условиям $P_1(z) = O$, $P_0(z) = I$ и $Q_0(z) = O$, $Q_1(z) = B_0^{-1}$, соответственно, где O и I , как обычно, нулевая и единичная матрица размерности p . Матриц-функции $P_j(z)$ и $Q_j(z)$ являются многочленами j -го и $(j-1)$ -го порядка от комплексного переменного z с матричными коэффициентами и называются матричными многочленами первого и второго рода, соответственно (см. [1, гл. VII, § 2], [2]).

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. Если каждое решение векторного уравнения

$$(2) \quad (lu)_j = zu_j, \quad j = 0, 1, \dots,$$

для некоторого вещественного z_0 принадлежит пространству ℓ_p^2 , то для произвольного комплексного z каждое решение уравнения (2) принадлежит пространству ℓ_p^2 .

2. Рассмотрим теперь минимальный замкнутый оператор L , порожденный выражением l и граничным условием $u_{-1} = 0$ в пространстве ℓ_p^2 . Известно, что оператор L симметричен, но, вообще говоря, несамосопряжен, и дефектные числа n_+ и n_- этого оператора удовлетворяют неравенствам $0 \leq n_+, n_- \leq p$. Говорят, что для выражения l имеет место вполне неопределенный случай, если $n_+ = n_- = p$ (см. [1], [2]). Из теоремы 1 следует, что для выражения l имеет место вполне неопределенный случай тогда и только тогда, когда все решения уравнения (2) при $z = 0$ принадлежат пространству ℓ_p^2 .

По аналогии с обыкновенными дифференциальными уравнениями последовательность

$$Q_j P_j^* - P_j Q_j^* = K_{ij}, \quad i, j = 0, 1, \dots,$$

где $P_i = P_i(0)$ и $Q_i = Q_i(0)$, будем называть последовательностью Коши уравнения (1) (при $z = 0$). Эта последовательность удовлетворяет матричному уравнению (1) по i при фиксированном j ($z = 0$), начальным условиям

$$K_{jj} = 0, \quad K_{j+1,j} = B_j^{-1}, \quad j = 0, 1, \dots,$$

и соотношению

$$K_{ij}^* = -K_{ji}, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots$$

Следующая теорема является аналогом соответствующего утверждения (см. [3]) для обыкновенных симметрических дифференциальных уравнений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00333).

ТЕОРЕМА 2. Для того чтобы для выражения l имел место вполне неопределенный случай, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности отрезков натуральных чисел $[n_k, m_k]$ таких, что $m_k \leq n_{k+1} < m_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$, выполнялось условие

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{i=n_k}^{m_k} \sum_{j=n_k}^i \|K_{ij}\|^2 \right)^{1/2} < +\infty.$$

3. Из теоремы 2 можно извлечь, что справедлива

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполняется какое-либо из следующих условий:

- а) $\sum_{k=1}^{+\infty} \|B_k^{-1}\| = +\infty$,
- б) $\sum_{k=1}^{+\infty} \|B_{k+1}^{-1} A_{k+1} B_k^{-1}\| = +\infty$,
- в) $\sum_{k=1}^{+\infty} \|B_{k+2}^{-1} (A_{k+2} B_{k+1}^{-1} A_{k+1} - B_{k+1}^*) B_k^{-1}\| = +\infty$,

Тогда для выражения l не имеет места вполне неопределенный случай.

Отметим, что в случае $p = 1$ условие а) теоремы 3 совпадает с известным признаком Карлемана (см., например, [1, гл. VII, § 1, теорема 1.3]), а условие б) этой теоремы с признаком Денниса и Уолла (см. [3, гл. I, дополнения и задачи, 2]).

Справедлива также

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\|A_k\| \leq C$ ($k = 0, 1, \dots$) и

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{s=0}^{+\infty} \|B_j^{*-1} B_{j+1} B_{j+2}^* \cdots B_{j+2s-1} B_{j+2s}^{*-1}\| < +\infty.$$

Тогда для выражения l имеет место вполне неопределенный случай.

Наметим доказательство теоремы 4. Если $\|A_k\| \leq C$, то оператор $y_k \rightarrow A_k y_k$ ($k = 0, 1, \dots$), очевидно, является ограниченным самосопряженным оператором в пространстве ℓ_p^2 . Поэтому согласно известной теореме (см., например, [5, гл. IV, § 14, теорема 6]) дефектные числа оператора L и оператора, порожденного выражением

$$(l_1 u)_j = B_j u_{j+1} + B_{j-1}^* u_{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

совпадают. Далее следует применить теорему 2 к выражению l_1 , учитывая, что здесь

$$K_{j+2s,j} = 0, \quad K_{j+2s+1,j} = (-1)^s B_{j+2s}^{-1} B_{j+2s-1}^* \cdots B_{j+1}^* B_j^{-1}, \quad s, j = 0, 1, 2, \dots$$

Теорема 4 является обобщением одной теоремы Березанского для случая $p = 1$ (см., например, [1, гл. VII, § 1, теорема 1.5]).

ЗАМЕЧАНИЕ. Все результаты данной работы без изменений переносятся на случай, когда пространство C^p заменяется на сепарабельное гильбертово пространство H , а матрицы A_j, B_j ($j = 0, 1, \dots$) — на линейные ограниченные операторы в нем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1965.
- [2] Крейн М. Г. // ДАН СССР. 1949. Т. 69. № 3. С. 125–128.
- [3] Мирзоев К. А. // УМН. 1991. Т. 46. № 4. С. 161–162.
- [4] Ахиезер Н. И. Классическая проблема моментов. М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1961.
- [5] Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова;
Московский авиационно-технологический
институт им. К. Э. Циолковского

Принято редколлегией
29.10.1996