Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Л. Литвинов, В. П. Маслов, Идемпотентная математика: принцип соответствия и его компьютерные приложения, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 6, 209–210

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1031>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 12:34:53

ИДЕМПОТЕНТНАЯ МАТЕМАТИКА: ПРИНЦИП СООТВЕТСТВИЯ И ЕГО КОМПЬЮТЕРНЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Г. Л. Литвинов, В. П. Маслов

1. Введение. Имеется (эвристическое) соответствие между важными, полезными и интересными конструкциями и результатами традиционной математики над полями и аналогичными конструкциями и результатами над полукольцами с идемпотентным сложением в духе принципа соответствия Н. Бора в квантовой механике. Последовательное применение идемпотентного принципа соответствия приводит к разнообразным результатам, в том числе к методике конструирования унифицированных алгоритмов для научно-технических расчетов и программной и аппаратной реализации этих алгоритмов (например, методике патентования компьютерных устройств).

2. Идемпотентный принцип соответствия. Пусть $\mathbb{R}$ – поле действительных чисел, $\mathbb{R}_+$ – полукольцо неотрицательных чисел (относительно сложения и умножения). Замена переменных $x \mapsto u = h \ln x$ определяет отображение $\Phi_h: \mathbb{R}_+ \rightarrow A = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Перенесем сложение и умножение из $\mathbb{R}$ в A с помощью Φ_h , т.е. положим $u \oplus_h v = h \ln(\exp(u/h) + \exp(v/h))$, $u \odot v = u + v$, $\mathbf{0} = -\infty = \Phi_h(0)$, $\mathbf{1} = 0 = \Phi_h(1)$. Легко проверить, что $u \oplus_h v \rightarrow \max\{u, v\}$ при $h \rightarrow 0$, а множество A является полукольцом относительно операций сложения $u \oplus v = \max\{u, v\}$ и умножения $u \odot v = u + v$ с нулем $\mathbf{0} = -\infty$ и единицей $\mathbf{1} = 0$. Обозначим это полукольцо через $\mathbb{R}_{\max}$; оно *идемпотентно*, т.е. $u \oplus u = u$ для всех его элементов. Имеется очевидная аналогия с квантованием, и параметр h играет роль постоянной Планка, т.е. $\mathbb{R}_+$ (или $\mathbb{R}$) можно рассматривать как “квантовый объект”, а $\mathbb{R}_{\max}$ – как результат “деквантования” этого объекта. Аналогичная процедура приводит к полукольцу $\mathbb{R}_{\min} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ с операциями $\oplus = \min$, $\odot = +$; в этом случае $\mathbf{0} = +\infty$, $\mathbf{1} = 0$. Полукольца $\mathbb{R}_{\max}$ и $\mathbb{R}_{\min}$ изоморфны. Идемпотентное полукольцо $\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ с операциями $\oplus = \max$, $\odot = \min$ можно получить как результат “вторичного деквантования” по отношению к $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{R}_+$). Можно указать десятки интересных примеров неизоморфных идемпотентных полуколец и стандартные конструкции, позволяющие строить из них новые идемпотентные полукольца, см. [1]–[3].

Пусть A – произвольное полукольцо с идемпотентным сложением $\oplus$ (сложение всегда коммутативно), умножением $\odot$, нулем $\mathbf{0}$ и единицей $\mathbf{1}$, снабженное *стандартным частичным порядком*: $a < b$, если (и только если) $a \oplus b = b$. Аналогом числовой функции является отображение $X \rightarrow A$, где X – любое множество. Функции со значениями в A можно поточечно складывать, умножать и умножать на элементы из A . Аналогом линейного функционального пространства является множество A -значных функций, выдерживающее сложение функций и умножение на элементы из A , т.е. A -полумодуль. Примером является A -полумодуль $B(X, A)$ ограниченных (в смысле стандартного порядка на A) функций $X \rightarrow A$. Для функции $\varphi \in B(X, A)$ идемпотентный аналог интеграла определяется формулой

$$I(\varphi) = \int_X^{\oplus} \varphi(x) dx = \sup_{x \in X} \varphi(x).$$

A -мера на X определяется равенством $m_\psi(B) = \sup_{x \in B} \psi(x)$, где $B \subset X$, $\psi \in B(X, A)$. Интеграл по этой мере определяется формулой

$$I_\psi(\varphi) = \int_X^{\oplus} \varphi(x) dm_\psi = \int_X^{\oplus} \varphi(x) \odot \psi(x) dx = \sup_{x \in X} \varphi(x) \odot \psi(x).$$

Функционалы $I(\varphi)$ и $I_\psi(\varphi)$ линейны над A , их значения соответствуют предельным значениям аналогов сумм Лебега (или Римана). Формула для $I_\psi(\varphi)$ определяет идемпотентное скалярное произведение функций ψ и φ . Используя идемпотентное интегрирование, можно строить различные функциональные пространства и идемпотентную версию теории обобщенных функций [1]–[3].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01544).

Аналогия между идемпотентными и вероятностными мерами приводит к примечательным параллелям между теорией вероятностей и теорией оптимизации. При этом уравнение Чепмена–Колмогорова соответствует уравнению Беллмана (Р. Del Moral, см. его Приложение к [3]). Можно указать и много других идемпотентных аналогий (в том числе для основных конструкций и результатов функционального анализа). Например, преобразование Лежандра есть не что иное, как $\mathbb{R}_{\max}$ -версия преобразования Фурье (см. [1]–[3]).

Основные уравнения квантовой теории линейны (принцип суперпозиции). Уравнение Гамильтона–Якоби, т.е. основное уравнение классической механики, нелинейно в обычном смысле. Однако его можно рассматривать как линейное над полукольцом $\mathbb{R}_{\min}$, а различные версии уравнения Беллмана, т.е. основного уравнения теории оптимизации, также являются линейными над идемпотентными полукольцами (см. [1]–[3]). Например, конечномерное стационарное уравнение Беллмана можно представить в форме $X = H \odot X \oplus F$, где X, H, F – матрицы с элементами из идемпотентного полукольца A , а решение X определяется из этого уравнения при заданных H и F [4]. В частности, стандартные задачи динамического программирования и хорошо известная задача о кратчайшем пути соответствуют случаю $A = \mathbb{R}_{\max}$. В [4] указано, что основные оптимизационные алгоритмы на конечных графах соответствуют стандартным методам решения системы линейных уравнений указанного типа (над полукольцами). Алгоритм Беллмана для задачи о кратчайшем пути соответствует версии метода Якоби, а алгоритм Форда соответствует итерационному методу Гаусса–Зейделя и т.п.

3. Принцип соответствия для алгоритмов и их компьютерных реализаций [5].

Идемпотентные аналоги стандартных численных алгоритмов часто являются важными и могут быть использованы систематически, например при решении оптимизационных задач. Особенно важны алгоритмы линейной алгебры, поскольку стандартные бесконечномерные линейные задачи над полукольцами сводятся к их конечномерным (или конечным) аппроксимациям, а нелинейные алгоритмы обычно приближаются линейными. Известные методы распараллеливания алгоритмов линейной алгебры работают и для их идемпотентных аналогов. Стандартные численные алгоритмы реализованы в виде многочисленных технических устройств (процессоров). Такое устройство может являться прототипом для идемпотентного аналога. Для конструирования и патентования такого аналога следует указать прототип и отличия нового устройства от прототипа, что составляет формулу изобретения. Отличия состоят в том, что обычные арифметические операции над числами заменяются на операции над элементами числового полукольца (с учетом обработки элементов типа $\pm\infty$). При этом удачные технические решения переносятся с прототипа на аналог. Простейшим примером является алгоритм вычисления скалярного произведения двух векторов. Его полукольцевая версия очевидна и основана на формуле $(x, y) = (x_1 \odot y_1) \oplus (x_2 \odot y_2) \oplus \dots \oplus (x_n \odot y_n)$. Такое вычисление стандартно для алгоритмов оптимизации (и полукольца типа $\mathbb{R}_{\max}$).

Программная реализация “полукольцевых” алгоритмов может быть особенно гибкой. Программные модули могут оперировать с абстрактными (и переменными) операциями и типами данных, что особенно удобно для работы с нечисловыми полукольцами. При этом конкретные значения операций определяются типом входных данных. Для такой реализации удобна современная техника объектно ориентированного программирования, включая специальные языки программирования, например, C^{++} .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Maslov V. P., Samborskiĭ S. N., Eds. Idempotent analysis. V. 13. Providence: AMS Adv. Sov. Math., 1992. [2] Маслов В. П., Колокольцов В. Н. Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. М.: Наука, 1994. [3] Maslov V. P., Kolokol'tsov V. N. Idempotent analysis and applications: Kluwer (to appear). [4] Carre B. A. // J. Inst. Math. Appl. 1971. V. 7. P. 273–294. [5] Litvinov G. L., Maslov V. P. Correspondence principle for idempotent calculus and some computer applications // Bures-sur-Yvette. Preprint IHES, 1995.