Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Максимов, О базисах алгебры полиномов от некоммутирующих переменных, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 6, 211–212

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1032>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 14:55:28

О БАЗИСАХ АЛГЕБРЫ ПОЛИНОМОВ ОТ НЕКОММУТИРУЮЩИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В. М. МАКСИМОВ

1. Пусть A – произвольная, ассоциативная, конечномерная алгебра с единицей 1 над полем F характеристики 0 . Изучение A -значных функций от A -значной переменной z представляет интерес из-за уравнений в частных производных, которым удовлетворяют коэффициенты z^n , рассмотренные при фиксированном базисе алгебры A , особенно, когда F – поле действительных или комплексных чисел. Впечатляющий результат принадлежит П. Кетчуму [1], который показал, что для любого линейного уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами найдется ассоциативная коммутативная алгебра A (может быть, со счетным базисом) такая, что коэффициенты z^n при данном базисе удовлетворяют этому уравнению, когда z меняется в некотором подпространстве A . Далее, для коммутативной алгебры A над F в [2], [3] алгебраически получены уравнения Коши–Римана и аналог уравнения Лапласа для z^n , $z \in A$.

2. Когда алгебра A некоммутативна, главный интерес состоит в построении аналога теории голоморфности от z . Здесь ситуация существенно усложняется, так как становится неясно, что есть аналог уравнения Коши–Римана. Р. Фьютер [4], [5] предложил уравнение Коши–Римана для кватернионов. Впоследствии это определение было распространено на клиффордовы алгебры [6], [7]. При этом выяснилось, что функции, удовлетворяющие этим уравнениям, обладают многими свойствами голоморфных функций комплексного переменного, включая аналог разложения Тейлора, но в то же время они не всегда могут быть выражены как функции переменного z , $z \in A$, в виде многочлена или ряда. Действительно, в силу некоммутативности появляются обобщенные одночлены $z^{n_1} b_{i_1} z^{n_2} b_{i_2} \dots z^{n_k} b_{i_k}$, где $b_1, b_2, \dots, b_s$ – элементы некоторого базиса A , n_i – целые неотрицательные. Такие полиномы могли бы рассматриваться как элементарные голоморфные функции. Но для некоторых алгебр обобщенные одночлены не могут одновременно удовлетворять уравнениям Коши–Римана. Например, в случае кватернионов алгебра функций, порождаемая обобщенными одночленами, совпадает с алгеброй кватернионов над кольцом многочленов от четырех образующих [8]. Кроме того, независимо от алгебры A , обобщенные одночлены при больших степенях n оказываются линейно зависимыми.

3. Та же ситуация сохраняется, если мы будем рассматривать простейшие подалгебры рациональных функций, порождаемых переменной z , $z \in A$, и элементом a , $a \in A$. Обозначим такую алгебру $A(z, a)$. Ее элементы составляют комбинацию одночленов $z^{n_1} a^{\nu_1} z^{n_2} a^{\nu_2} \dots z^{n_k} a^{\nu_k}$ над F , и поэтому она замкнута относительно сдвига переменного z на λa , $\lambda \in F$. Нахождение “естественного” базиса из обобщенных одночленов в $A(z, a)$ позволило бы любую функцию из $A(z, a)$ (а также и из соответствующего замыкания $A(z, a)$) разложить по этому базису, что можно рассматривать как ее разложение Тейлора независимо от определения голоморфности [7].

В настоящей заметке при некоторых условиях на алгебру A и область изменения переменного z описан базис $A(z, a)$ из обобщенных одночленов. Предлагаемые условия интересны также и тем, что им удовлетворяют алгебра кватернионов, широкие классы алгебр Клиффорда и многие другие.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть L_0 – подпространство, натянутое на единичный элемент 1 . Мы говорим, что в алгебре A выполнено условие “косого представления” относительно обратимого элемента a , $a \notin L_0$, если в некотором подпространстве L , дополняющем L_0 до A , имеется подмножество D , для которого выполнены условия:

- I) все элементы D обратимы, $ab \neq ba$ и существует элемент b , $b \in D$, для которого $(ab)^2 \neq (ba)^2$;
- II) $b^2 a = ab^2$ для всякого $b \in D$;

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00492).

- III) $ba^2 = a^2b$ для всякого $b \in D$;
 IV) расширение $F(a^2)$ поля F элементом a является полем;
 V) для функции $\tau_1(b) = \frac{1}{2}(ab + ba)b^{-1}$ переменного b , определяемой в D , степени $\{\tau_1(b)^n\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, линейно независимы над $F(a^2)$.

При этом, естественно, предполагается, что D – наибольшее подмножество в A , обладающее свойствами I)–V), а алгебра A является наименьшей, т.е. не имеющей подалгебр, обладающих свойствами I)–V) относительно a и того же множества D .

Обозначим $\bar{D}$ множество $\{\lambda \mathbf{1} + b\}$, $b \in D$, $\lambda \in F$, а L_n – пространство обобщенных одночленов в $A(z, a)$ порядка n над $F(a^2)$, рассматриваемых как функции z , $z \in \bar{D}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Линейный базис L_n над $F(a^2)$ состоит из следующих серий одночленов порядка n :*

- I) $z^n, z^n a, az^n, az^n a$;
 II) $z^m az^k, m + k = n, m, k \neq 0$;
 III) $z^m az^k a, m + k = n, m, k \neq 0$;
 IV) $z^{m_1} az^{k_1} (az)^{l_1}, m_1 + k_1 + l_1 = n, m_1, k_1, l_1 \neq 0$;
 V) $z^{m_1} az^{k_1} (az)^{l_1} a, m_1 + k_1 + l_1 = n, m_1, k_1, l_1 \neq 0$;
 VI) $az^{m_2} (az)^{l_2}, m_2 + l_2 = n, m_2, l_2 \neq 0$;
 VII) $az^{m_2} (az)^{l_2} a, m_2 + l_2 = n, m_2, l_2 \neq 0$;

СЛЕДСТВИЕ. *Размерность L_n равна $n^2 + n + 2$.*

5. Для приложений является интересным случай, когда $F = \mathbb{R}$ и $F(a^2) = \mathbb{R}$. В частности, возникает вопрос об алгебрах малой размерности над $\mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям “косого представления”.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Алгебра размерности четыре, удовлетворяющая условиям I)–IV) относительно a , – клиффордова с дифференцированием.*

Сюда, в частности, относится алгебра кватернионов и клиффордова алгебра $K_{1,-1}$ с каноническими образующими ξ_1, ξ_2 , для которых $\xi_1^2 = \mathbf{1}, \xi_2^2 = -\mathbf{1}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Алгебра кватернионов удовлетворяет условию V) с областью D из мнимых кватернионов без нуля тогда и только тогда, когда a – мнимое.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Алгебра Клиффорда $K_{1,-1}$ удовлетворяет условию V) с областью D , состоящей из всех мнимых обратимых элементов, тогда и только тогда, когда a – мнимое.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Серии одночленов предложения 1 являются базисом в пространстве одночленов порядка n от переменного z в алгебре кватернионов и от переменного z в алгебре $K_{1,-1}$, когда a – мнимое.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ketchum P. W. // Amer. J. Math. 1932. V. 2. P. 253–264. [2] Максимов В. М. // ДАН СССР. 1982. Т. 267. № 1. С. 48–52. [3] Максимов В. М. // ДАН СССР. 1984. Т. 278. № 6. С. 1305–1309. [4] Fueter R. // Comment. Math. Helv. 1935. V. 7. P. 307–330. [5] Fueter R. // Comment. Math. Helv. 1936. V. 8. P. 371–378. [6] Delanghe R. // Math. Ann. 1970. V. 185. P. 91–111. [7] Ryan J. // Proc. Roy. Irish. Acad. A. 1984. V. 84. № 1. P. 37–50. [8] Sudbery A. // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1979. V. 85. P. 199–225.