Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Натанзон, Вещественные оснащения комплексных алгебраических кривых и группы Кокстера, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 6, 215–216

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1034>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 13:58:58

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ОСНАЩЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ И ГРУППЫ КОКСТЕРА

С. М. НАТАНЗОН

1. Пусть P – комплексная алгебраическая кривая, т.е. компактная риманова поверхность рода $g(P)$. Антиголоморфная инволюция $\tau: P \rightarrow P$ называется *вещественной формой* кривой P [1]. Она определяет на P структуру вещественной алгебраической кривой с вещественными точками $P^\tau = \{p \in P \mid \tau p = p\}$ (см. [2]).

Вещественная форма τ называется *ориентируемой*, если $P/\langle\tau\rangle$ – ориентируемая поверхность. В этом случае вещественные точки P^τ делят P на две поверхности. Ориентируемыми являются, например, M -формы, играющие особую роль в теории вещественных кривых [3].

Вещественным ориентируемым оснащением назовем пару (P, W) , где W – группа, порожденная ориентируемыми вещественными формами. Пусть P^W – множество всех вещественных точек всех ориентируемых вещественных форм из W . Рассмотрим замыкание C компоненты связности дополнения $P \setminus P^W$. Базисом оснащения назовем множество $S = \{\tau_1, \dots, \tau_n\}$ всех вещественных форм $\tau_i \in W$ таких, что $P^{\tau_i} \cap C \neq \emptyset$.

ЛЕММА 1. Любая ориентируемая вещественная форма $\tau \in W$ сопряжена в группе W одной из форм $\tau_i \in S$. Множество S порождает W .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим группу $\widetilde{W}$, порожденную S . Множество $\widetilde{P} = \bigcup_{\tilde{w} \in \widetilde{W}} \tilde{w}C \subset P$ компактно и не имеет границ. Следовательно, $\widetilde{P} = P$. Поэтому существует $\tilde{w} \in \widetilde{W}$ такой, что $\tilde{w}C \cap P^\tau \neq \emptyset$ и, следовательно, $\tilde{w}P^{\tau_i} \cap P^\tau \neq \emptyset$ для некоторого $\tau_i \in S$. Но тогда $\tau = \tilde{w}\tau_i\tilde{w}^{-1}$.

Обозначим через W_i множество таких $w \in W$, что C и $w(C)$ лежат в одной компоненте связности множества $P \setminus P^{\tau_i}$.

ЛЕММА 2. Если $w \in W_i$ и $w\tau_j \notin W_i$, то $w\tau_j = \tau_i w$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию $w\tau_j(C)$ и $w(C)$ лежат в разных компонентах множества $P \setminus P^{\tau_i}$. Следовательно, $\tau_j(C)$ и C лежат в разных компонентах множества $P \setminus P^{w^{-1}\tau_i w}$. Но они имеют общую границу P^{τ_j} и, следовательно, $P^{\tau_j} \subset P^{w^{-1}\tau_i w}$, откуда $\tau_j = w^{-1}\tau_i w$.

Обозначим через $l(w)$ наименьшее число $l = l(w)$ такое, что $w = \tau_{i_1} \dots \tau_{i_l}$.

ТЕОРЕМА 1. 1) Пара (W, S) является системой Кокстера, т.е. S порождает W с определяющими соотношениями $\tau_i^2 = 1$, $(\tau_i \tau_j)^{m_{ij}} = 1$.

2) C – фундаментальная область группы W .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [4, IV, §1, п. 7] из очевидных соотношений $1 \in W_i$, $W_i \cap \tau_i W_i = \emptyset$ и утверждения леммы 2 следует, что (W, S) является системой Кокстера и

$$W_i = \{w \in W \mid l(\tau_i w) > l(w)\}.$$

Следовательно, если $wC = C$, то

$$w \in \bigcap_{i=1}^n W_i = \{w \in W \mid l(\tau_i w) > l(w) \text{ при } i = 1, \dots, n\} = 1.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть (P, W) – вещественное ориентируемое оснащение. Тогда

- 1) все неподвижные точки всех автоморфизмов $w \in W$ принадлежат P^W ;
- 2) всякая вещественная форма с вещественными точками $\tau \in W$ сопряжена одной из форм $\tau_i \in S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) следует из фундаментальности области C . Утверждение 2) следует из 1) и леммы 1.

2. Полная классификация пар Кокстера (W, S) хорошо известна [4, VI, § 4, п. 1]. Они полностью описываются своим графом Кокстера (диаграммой Дынкина), полный список которых также хорошо известен. Это позволяет перейти к полной топологической классификации вещественных ориентируемых оснащений.

Два таких оснащения (P_1, W_1) и (P_2, W_2) назовем *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $\varphi: P_1 \rightarrow P_2$ такой, что $W_2 = \varphi W_1 \varphi^{-1}$.

Фундаментальная область C гомеоморфна поверхности рода $g(P/W)$ с $k(P/W)$ дырами. Граница каждой дыры $a^\alpha \subset C$ ($\alpha = 1, \dots, k$) состоит из упорядоченных согласно ориентации P/W отрезков l_β^α , где $\beta \in Z_{m_\alpha}$ и $l_\beta^\alpha \cap l_{\beta+1}^\alpha \neq \emptyset$. При этом $l_\beta^\alpha \in P^{\tau_\beta^\alpha}$, где $\tau_\beta^\alpha \in S$. Набор $\{\tau_\beta^\alpha\}$ назовем C -типом оснащения (P, W) . Он определен с точностью до замен $\{\tau_{-\beta}^\alpha\}$ и $\tau_{\beta+\gamma}^\alpha$, где $\gamma_\alpha \in Z_{m_\alpha}$. При замене C C -тип переходит в сопряженный.

ТЕОРЕМА 2. 1) Вещественные ориентируемые оснащения (P_1, W_1) и (P_2, W_2) топологически эквивалентны, если и только если $g(P_1/W_1) = g(P_2/W_2)$ и существует изоморфизм $\psi: W_1 \rightarrow W_2$, переводящий C_1 -тип оснащения (P_1, W_1) в C_2 -тип оснащения (P_2, W_2) для некоторых фундаментальных областей $C_i \subset P_i$.

2) Пусть $(\tilde{W}, \tilde{S})$ – произвольная кокстеровская система и $\tilde{\tau}_\beta^\alpha \in \tilde{S}$ – набор образующих $\tilde{W}$, где $\alpha = 1, \dots, k$, $\beta \in Z_{m_\alpha}$ и $\tau_{\beta+1}^\alpha \neq \tau_\beta^\alpha$. Тогда для любого $g \geq 0$ существует вещественное ориентируемое оснащение (P, W) и изоморфизм $\varphi: W \rightarrow \tilde{W}$ такие, что $g(P/W) = g$ и $\tau_\beta^\alpha = \varphi(\tilde{\tau}_\beta^\alpha)$ – C -тип (P, W) для некоторой фундаментальной области C группы W .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО в случае $g(P_i/W_i) = 0$ следует из представления оснащения (P, W) в виде $(\Lambda/\Gamma, \tilde{\Gamma}/\Gamma)$, где $\tilde{\Gamma}$ – NEC-группа и $\Gamma \triangleleft \tilde{\Gamma}$ – фуксова группа на плоскости Лобачевского [5]. Общий случай легко следует из случая $g(P_i/W_i) = 0$ с помощью разрезов по контурам, окружающим дыры.

Из следствия 1 и теоремы Римана–Гурвица сразу следует

ТЕОРЕМА 3. Пусть (P, W) – вещественное ориентируемое оснащение C -типа τ_β^α ($\alpha = 1, \dots, k$, $\beta \in Z_{m_\alpha}$). Пусть $|W|$ – порядок группы W и n_β^α – порядок автоморфизма $\tau_\beta^\alpha \cdot \tau_{\beta+1}^\alpha$. Тогда $g(P) - 1 = \frac{|W|}{2} \left(2g(P/W) + k(P/W) - 1 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \left(1 - \frac{1}{n_\beta^\alpha} \right) \right)$.

СЛЕДСТВИЕ 2 [6]. Число попарно несопряженных ориентируемых вещественных форм у кривой рода g не превосходит $(g(P) - 1)/2^{n-3}$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Всякий имеющий неподвижные точки голоморфный автоморфизм $\alpha \in W$ порядка больше 5 порождает нормальный делитель группы W .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть C – фундаментальная область, содержащая неподвижные точки α , и $S = \{\tau_1, \dots, \tau_n\}$ – отвечающий ей базис. Согласно следствию 1 $\alpha = (\tau_i \cdot \tau_j)^m$. Но граф Кокстера системы Кокстера (W, S) распадается на связные графы, среди которых ребра порядка более 5 имеют лишь графы из двух вершин [4, VI, § 4]. Таким образом, α коммутирует со всем множеством $S \setminus (\tau_i \cup \tau_j)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Натанзон С. М. // Труды ММО. 1988. Т. 51. С. 3–53. [2] Alling N. L., Greenleaf N. // Lecture Notes in Math. 1971. V. 219. [3] Natanzon S. M. // Selecta Math. Soviet. 1981. V. 1. P. 81–99. [4] Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1972. [5] Bujalance E., Etayo J. J., Gamboa J. M., Gromadzki G. // Lecture Notes in Math. 1990. V. 1439. [6] Bujalance E., Gromadzki G., Singerman D. // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. V. 120. № 2. P. 507–513.