Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. К. Плышевская, Существование и единственность решений краевых задач для уравнений нейтрального типа, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 6, 217–218

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1035>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 14:29:09

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Т. К. ПЛЫШЕВСКАЯ

Рассмотрим уравнение нейтрального типа

$$(1) \quad \dot{x}(t) = f(t, x(h(t)), \dot{x}(\tau(t))), \quad t \in [a, b], \quad x(\xi) = \dot{x}(\xi) = 0, \quad \xi \notin [a, b],$$

где $f: [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\tau: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Решением уравнения (1) будем называть абсолютно непрерывную (относительно меры Лебега m) n -мерную вектор-функцию, удовлетворяющую уравнению (1) почти всюду на $[a, b]$.

Пусть T – локально компактное пространство в $\mathbb{R}$, $\|\cdot\|$ – норма в $\mathbb{R}^n$. Через $L_p^n(T, \lambda)$ будем обозначать банахово пространство суммируемых в степени p функций x с нормой $\|x\|_{L_p^n(T, \lambda)} = \left(\int_T \|x(t)\|^p d\lambda(t) \right)^{1/p}$, через $D_p^n([a, b])$ – банахово пространство абсолютно непрерывных на $[a, b]$ вектор-функций x таких, что $\dot{x} \in L_p^n([a, b], m)$, $\|x\|_{D_p^n([a, b])} = \max_{t \in [a, b]} \|x(t)\| + \|\dot{x}\|_{L_p^n([a, b], m)}$. Зададим краевые условия равенством

$$(2) \quad lx \equiv \psi x(a) + \int_a^b \varphi(s) \dot{x}(s) ds = \gamma.$$

Здесь ψ – постоянная $(n \times n)$ -матрица, $\det \psi \neq 0$, элементы $(n \times n)$ -матрицы φ принадлежат пространству $L_q^1([a, b], m)$ ($1/p + 1/q = 1$), $\gamma \in \mathbb{R}^n$.

Тогда [1] краевая задача $\dot{x}(t) = y(t)$, $lx = \gamma$ имеет единственное решение, определяемое равенством

$$(3) \quad x(t) = \psi^{-1}\gamma + \int_a^b (C(t, s) - \psi^{-1}\varphi(s))y(s) ds,$$

где $C(t, s) = \begin{cases} 0, & a \leq s \leq t \leq b, \\ 1, & a \leq t < s \leq b, \end{cases}$ а краевая задача (1), (2) сводится к уравнению

$$(4) \quad y(t) = f(t, \alpha + (Hy)(t), (Sy)(t)),$$

где

$$(Sy)(t) = \begin{cases} y(\tau(t)), & \tau(t) \in [a, b], \\ 0, & \tau(t) \notin [a, b], \end{cases} \quad (Hy)(t) = \int_a^b K(t, s)y(s) ds, \\ K(t, s) = C(h(t), s) - \psi^{-1}\varphi(s), \quad \alpha = \psi^{-1}\gamma.$$

Решение задачи (1), (2) и уравнения (4) связаны равенством (3).

Обозначим $E = \{t \in T \subset \mathbb{R} : \tau(t) \in T\}$. Через z_E обозначим сужение функции (или меры) z на множество E , через $\tau(\lambda)$ – образ меры λ при отображении τ [3].

ЛЕММА. Пусть существуют положительная мера ν на $T \subset \mathbb{R}$ и число $p \in [1, \infty)$ такие, что:

- 1) функция $f(\cdot, u, v): T \rightarrow \mathbb{R}^n$ ν -измерима при $u, v \in \mathbb{R}^n$, $\|f(\cdot, \alpha, 0)\|^p$ – ν -интегрируема на T и при всех $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ и ν -почти всюду на T выполняется неравенство $\|f(t, u_1, v_1) - f(t, u_2, v_2)\| \leq N\|u_1 - u_2\| + M(t)\|v_1 - v_2\|$, где $N \in \mathbb{R}$, $M: T \rightarrow \mathbb{R}$ ν -измерима, $M(t) \geq 0$;
- 2) пара (τ_E, M_E^p) ν_E -приспособлена [3] и существует $K > 0$ такое, что $\tau_E(M_E^p \nu_E) \leq K\nu$;
- 3) оператор $H: L_p^n(T, \nu) \rightarrow L_p^n(T, \nu)$ непрерывен.

Тогда, если $N\|H\|_{L_p^n(T, \nu) \rightarrow L_p^n(T, \nu)} + K^{1/p} < 1$, то существует единственное в пространстве $L_p^n(T, \nu)$ решение уравнения (4).

Доказательство сводится к проверке условий принципа Банаха.

Приведем конструкцию меры ν , которая обеспечивает выполнение условия 2) леммы. Подробно этот вопрос изложен в [4].

ТЕОРЕМА 1. Пусть $p \in [1, \infty)$, λ – положительная мера на T , $M: T \rightarrow \mathbb{R}$ – ограниченная неотрицательная λ -измеримая функция, пара (τ_E, M_E) λ_E -приспособлена [3]. Пусть существуют числа $k \geq 0$, $\Delta \geq 0$ такие, что для любого λ -измеримого $A \subset T$ множество $\tau^{-1}(A) \cap \{t \in E: M(t) > 0\}$ λ -измеримо и

$$\lambda(\tau^{-1}(A) \cap \{t \in E: M(t) > 0\}) \leq k\lambda(A) + \Delta.$$

Тогда существует положительная мера ν на T и число K такие, что пара (τ_E, M_E^p) ν_E -приспособлена и $\tau_E(M_E^p \nu_E) \leq K\nu$.

Доказано, что меру ν можно задать сходящимся рядом

$$\nu = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\beta^n}, \quad \text{где } \beta > \max\{1, k\}, \quad \lambda_0 = \lambda, \quad \lambda_{n+1} = \tau_E(M_E^p \lambda_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

Структура меры ν зависит от структуры меры $\lambda_1 = \tau_E(M_E^p \lambda_E)$: мера ν абсолютно непрерывна относительно λ тогда и только тогда, когда λ_1 абсолютно непрерывна относительно λ ; мера ν имеет атомическую составляющую, независимую с λ , тогда и только тогда, когда λ_1 имеет аналогичную составляющую.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия:

- 1) функция $f(\cdot, u, v): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ t -измерима при $u, v \in \mathbb{R}^n$ и t -почти всюду на $[a, b]$ и всех $u_1, v_1, u_2, v_2 \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство

$$\|f(t, u_1, v_1) - f(t, u_2, v_2)\| \leq N\|u_1 - u_2\| + M(t)\|v_1 - v_2\|,$$

где $M(\cdot)$ t -измерима и $0 \leq M(t) \leq K$, $N \in \mathbb{R}$;

- 2) функция τ_E t_E -измерима и для любого t_E -измеримого $e \subset E$ множество $\tau^{-1}(e) \cap \{t \in E: M_E(t) > 0\}$ t -измеримо.

Тогда: 1) для любого $p \in [1, \infty)$ и любого $K_* > K$ существует на $[a, b]$ положительная мера ν такая, что $\tau_E(M_E^p \nu_E) \leq K_* \nu$; 2) если при этом мера $\lambda_1 = \tau_E(M_E^p t_E)$ абсолютно непрерывна относительно t или, кроме абсолютно непрерывной составляющей, содержит атомическую меру,

$$\int_a^b \|f(t, \alpha, 0)\|^p d\nu(t) < \infty, \quad I = \left(\int_a^b \left(\int_a^b \|K(t, s)\|^{p/(p-1)} ds \right)^{p-1} d\nu(t) \right)^{1/p} < \infty$$

(при $p = 1$ $I = \int_a^b \operatorname{vrai\,sup}_{s \in [a, b]} \|K(t, s)\| d\nu(t)$) и $NI + K_*^{1/p} < 1$, то на $[a, b]$ существует единственное в пространстве $L_p^n([a, b], \nu)$ решение уравнения (4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. [2] Драшлин М. Е., Плышевская Т. К. // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. № 8. С. 1347–1361. [3] Бурбаки Н. Интегрирование. Меры, интегрирование мер. М.: Наука, 1967. [4] Плышевская Т. К. О разрешимости функционально-дифференциальных уравнений в лебеговых пространствах. Магнитогорск: Магнитогорск. горно-металлург. ин-т, 1988. Деп. в ВИНТИ 22.02.89, № 1186–В89.

Магнитогорский государственный
педагогический институт

Принято редколлегией
18.04.1996