Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Подъяпольский, А. Л. Скубачевский, О полноте и базисности системы
корневых функций сильно эллиптических функционально-дифференциальных
операторов, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 6, 219–220

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1036>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 14:01:27

**О ПОЛНОТЕ И БАЗИСНОСТИ СИСТЕМЫ
КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ СИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ
ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ**

В. В. Подъяпольский, А. Л. Скубачевский

Получены достаточные условия полноты и базисности по Абелю системы корневых функций сильно эллиптических (см. [1]) функционально-дифференциальных операторов.

1. Вначале формулируем некоторые вспомогательные результаты об абстрактных m -секториальных операторах [2, гл. V, § 3 и гл. VI, § 2]. Пусть H и H_1 – сепарабельные комплексные гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot, \cdot)$ и $(\cdot, \cdot)_1$ и нормами $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_1$, соответственно. Будем предполагать, что H_1 плотно в H и оператор вложения компактный.

Пусть $a[u, v]$ – полуторалинейная форма в H с областью определения $\mathcal{D}(a) = H_1$ такая, что

$$(1) \quad |a[u, v]| \leq c_0 \|u\|_1 \|v\|_1 \quad (u, v \in H_1), \quad c_1 \|u\|_1^2 \leq b[u, u] \quad (u \in H_1),$$

где $c_0, c_1 > 0$ – постоянные, $b[u, v]$ – вещественная часть формы $a[u, v]$.

Из неравенств (1) следует, что форма b – симметрическая, а форма a – секториальная, т.е. числовая область значений формы a лежит в секторе $|\arg \lambda| \leq \theta_a$, где $\theta_a \leq \arctg(c_0/c_1) < \pi/2$. В силу первой теоремы о представлении [2, гл. VI, § 2] можно однозначно определить операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ с плотными в H областями определения, ассоциированные с формами a и b , т.е.

$$\begin{aligned} a[u, v] &= (\mathcal{A}u, v) \quad (u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset H_1, \quad v \in H_1), \\ b[u, v] &= (\mathcal{B}u, v) \quad (u \in \mathcal{D}(\mathcal{B}) \subset H_1, \quad v \in H_1), \end{aligned}$$

при этом оператор $\mathcal{A}$ – m -секториален, а $\mathcal{B}$ – самосопряженный, положительно определенный оператор. В силу сделанных предположений операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ имеют компактные резольвенты в H . Следовательно, спектры $\sigma(\mathcal{A})$ и $\sigma(\mathcal{B})$ – дискретны.

ЛЕММА 1. Пусть выполнены указанные выше предположения, и пусть собственные значения $\lambda_l = \lambda_l(\mathcal{B})$ оператора $\mathcal{B}$, занумерованные в порядке неубывания и с учетом их кратности, удовлетворяют неравенству

$$(2) \quad c_2 l^{1/p} \leq \lambda_l(\mathcal{B}) \leq c_3 l^{1/p} \quad (l \geq l_0),$$

где $c_2, c_3 > 0$ – постоянные, $l_0 > 0$ – достаточно велико, $1 \leq p < \pi/2\theta_a$. Тогда система корневых функций оператора $\mathcal{A}$ полна в H . Более того, в пространстве H существует базис Абеля со скобками порядка γ , состоящий из этих функций, для любого γ такого, что $p < \gamma < \pi/2\theta_a$.

В силу теоремы 6.1 из [3, гл. V, § 6] о полноте корневых функций компактного оператора и теоремы 3 из [4, § 5] о существовании базиса Абеля со скобками для доказательства леммы 1 достаточно установить оценку $s_l(\mathcal{A}^{-1}) \leq c_4 l^{-1/p}$ для s -чисел оператора $\mathcal{A}^{-1}$, где $c_4 > 0$ – постоянная. Вывод этой оценки аналогичен доказательству теоремы 1 из [5] и опирается на неравенство (2).

2. Пусть теперь $Q \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial Q \in C^\infty$. Введем ограниченные разностные операторы $R_{\alpha\beta}: L_2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$ и $R_{\alpha\beta Q}: L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ по формулам

$$R_{\alpha\beta}u(x) = \sum_{h \in \mathcal{M}} a_{\alpha\beta h}(x)u(x+h), \quad R_{\alpha\beta Q}v = P_Q R_{\alpha\beta} I_Q v.$$

Здесь $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ – конечное множество векторов с целочисленными координатами; $a_{\alpha\beta h} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ – комплекснозначные функции; I_Q – оператор продолжения функций из $L_2(Q)$ нулем в $\mathbb{R}^n \setminus Q$; P_Q – оператор сужения функций из $L_2(\mathbb{R}^n)$ на Q .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 95-01-00247).

Рассмотрим неограниченный дифференциально-разностный оператор $\mathcal{A}_R: L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ с областью определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}_R) = \{u \in \overset{\circ}{W}_2^m(Q) : \mathcal{A}_R u \in L_2(Q)\}$, действующий в пространстве обобщенных функций $\mathcal{D}'(Q)$ по формуле

$$\mathcal{A}_R u = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \mathcal{D}^\alpha R_{\alpha\beta} Q \mathcal{D}^\beta u \quad (u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_R)),$$

где $\overset{\circ}{W}_2^m(Q)$ – замыкание множества финитных бесконечно дифференцируемых функций $\dot{C}^\infty(Q)$ в комплексном пространстве Соболева $W_2^m(Q)$, $\mathcal{D}^\alpha = \mathcal{D}_1^{\alpha_1} \dots \mathcal{D}_n^{\alpha_n}$, $\mathcal{D}_j = -i(\partial/\partial x_j)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем называть оператор $\mathcal{A}_R$ сильно эллиптическим в $\overline{Q}$, если существуют постоянные $C_1 > 0$ и $C \geq 0$ такие, что

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}_R u, u)_{L_2(Q)} \geq C_1 \|u\|_{W_2^m(Q)}^2 - C \|u\|_{L_2(Q)}^2 \quad (u \in \dot{C}^\infty(Q)).$$

В работе [1] получены необходимые и достаточные условия сильной эллиптичности.

Введем полуторалинейную форму $a_R[u, v]$ с областью определения $\mathcal{D}(a_R) = \overset{\circ}{W}_2^m(Q)$:

$$a_R[u, v] = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} (R_{\alpha\beta} Q \mathcal{D}^\beta u, \mathcal{D}^\alpha v)_{L_2(Q)} + C(u, v)_{L_2(Q)}.$$

Если оператор $\mathcal{A}_R$ – сильно эллиптический в $\overline{Q}$, то форма a_R – замкнута, а ее числовая область значений лежит в некотором секторе $|\arg \lambda| \leq \theta_R$, где $\theta_R < \pi/2$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть оператор $\mathcal{A}_R: L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ – сильно эллиптический в $\overline{Q}$, и пусть $n/m < \pi/\theta_R$. Тогда система корневых функций оператора $\mathcal{A}_R$ полна в $L_2(Q)$. Более того, в пространстве $L_2(Q)$ существует базис Абеля со скобками порядка γ , состоящий из этих функций, для любого γ такого, что $n/2m < \gamma < \pi/2\theta_R$.

Для доказательства заметим, что оператор $\mathcal{A} = \mathcal{A}_R + CI$ – m -секториальный оператор, ассоциированный с формой $a = a_R$. Чтобы применить лемму 1, достаточно установить оценку

$$(3) \quad c_4 l^{2m/n} \leq \lambda_l(\mathcal{B}) \leq c_5 l^{2m/n},$$

где $c_4, c_5 > 0$ – постоянные, $\mathcal{B}$ – самосопряженный, положительно определенный оператор, ассоциированный с формой

$$b_R[u, v] = \frac{1}{2} \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} ((R_{\alpha\beta} Q + R_{\beta\alpha}^* Q) \mathcal{D}^\beta u, \mathcal{D}^\alpha v)_{L_2(Q)} + C(u, v)_{L_2(Q)},$$

где $\mathcal{D}(b_R) = \overset{\circ}{W}_2^m(Q)$. Оценку (3) легко получить из асимптотической формулы для собственных значений оператора $(-\Delta)^m$ в области Q с условиями Дирихле на границе ∂Q и минимаксных свойств собственных значений [6, гл. VI, п. 95].

Полученные результаты обобщаются на случай функционально-дифференциального оператора $\mathcal{A}_R$, содержащего растяжения и сжатия аргументов, рассмотренного в [7].

Авторы глубоко благодарны М. С. Аграновичу за обсуждение работы и ряд ценных советов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Skubachevskii A. L. // J. Differential Equations. 1986. V. 63. №3. P. 332–361.
- [2] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. [3] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965.
- [4] Лидский В. Б. // Труды ММО. 1962. Т. 11. С. 3–35. [5] Agranovich M. S. // Russian J. Math. Physics. 1994. V. 2. №2. P. 139–148. [6] Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979. [7] Россковский Л. Е. // Матем. заметки. 1996. Т. 56. №1. С. 103–113.