Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Потемкина, Режимы с обострениями в задаче Коши для неоднородного уравнения теплопроводности, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 6, 221–222

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1037>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 15:17:24

РЕЖИМЫ С ОБОСТРЕНИЯМИ В ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Е. В. ПОТЕМКИНА

1. В настоящей работе изучается подобный эффект в случае задачи Коши для неоднородного уравнения теплопроводности с неограниченно возрастающим за конечное время свободным членом. А именно, рассматривается следующая задача:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \partial_t u(x, t) = a^2 \partial_x^2 u(x, t) + f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in (0, T), \\ (2) \quad & u(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

где $a = \text{const} > 0$ и $\lim_{t \rightarrow T-} f(x, t) = +\infty$ для x из некоторого подмножества $\mathbb{R}$. При этом предполагается, что:

$$(3) \quad f(x, t) = \exp\{\omega(t) - \theta(t)g(x)\},$$

где $\omega(t)$ и $\theta(t)$ – непрерывные положительные функции, $\lim_{t \rightarrow T-} \omega(t) = \lim_{t \rightarrow T-} \theta(t) = +\infty$, $g(x)$ непрерывна и ограничена снизу. Сначала при общих предположениях относительно $\omega(t)$ и $\theta(t)$ указываются границы тех минимальных множеств, на которых решение неограниченно возрастает или остается ограниченным в течение времени обострения. Затем разбирается частный случай $\omega(t) = m(T-t)^{-\alpha}$, $\theta(t) = (T-t)^{-\beta}$.

2. Основным результатом данной работы является следующая

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что $u(x, t)$ – решение задачи (1)–(3), принадлежащее $C_{x,t}^{2,1}(\mathbb{R} \times [0, T-\varepsilon]) \cap L_\infty(\mathbb{R} \times [0, T-\varepsilon]) \quad \forall \varepsilon \in (0, T)$; $\omega(t) > 0$ и $\theta(t) > 0$ принадлежат $C([0, T])$, $\lim_{t \rightarrow T-} \omega(t) = \lim_{t \rightarrow T-} \theta(t) = +\infty$ и $\omega(t) \geq \omega_1(T-t)^{-\alpha}$, $\theta(t) \leq \theta_1(T-t)^{-\beta}$ при $0 \leq t \leq T$ для некоторых $\omega_1 > 0$, $\theta_1 > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$; $g(x) \in C(\mathbb{R})$, $\inf g(x) > -\infty$. Справедливы приводимые ниже утверждения.*

I. Пусть $\lim_{t \rightarrow T-} \omega(t)\theta^{-1}(t) = 0$, $g(x) \geq 0$, $E := \{x \in \mathbb{R} : g(x) = 0\} \neq \emptyset$ и $g(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера на E . Тогда:

а) если $\lim_{t \rightarrow T-} \omega(t)(T-t)^{-1} = 0$, то

$$\lim_{t \rightarrow T-} u(x, t) = +\infty \quad \forall x \in E, \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow T-} u(x, t) < +\infty \quad \forall x \notin E;$$

б) если $\underline{\lim}_{t \rightarrow T-} \omega(t)(T-t)^{-1} = n > 0$ и $\overline{\lim}_{t \rightarrow T-} \omega(t)(T-t)^{-1} = N < +\infty$, то

$$\lim_{t \rightarrow T-} u(x, t) = +\infty \quad \forall x \in E^*, \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow T-} u(x, t) < +\infty \quad \forall x \notin E^{**},$$

где $E^* := \{x \in \mathbb{R} : \exists \xi \in E (|x - \xi| < 2a\sqrt{n})\}$, $E^{**} := \{x \in \mathbb{R} : \forall \xi \in E (|x - \xi| > 2a\sqrt{N})\}$;

в) если $\lim_{t \rightarrow T-} \omega(t)(T-t)^{-1} = +\infty$, то $\lim_{t \rightarrow T-} u(x, t) = +\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

II. Пусть $\underline{\lim}_{t \rightarrow T-} \omega(t)\theta^{-1}(t) = m > 0$, $\overline{\lim}_{t \rightarrow T-} \omega(t)\theta^{-1}(t) = M < +\infty$,

$G^* := \{x \in \mathbb{R} : g(x) < m\} \neq \emptyset$ и $G^{**} := \{x \in \mathbb{R} : g(x) > M\} \neq \emptyset$. Тогда:

а) если $\lim_{t \rightarrow T-} \omega(t)(T-t)^{-1} = 0$, то

$$\lim_{t \rightarrow T-} u(x, t) = +\infty \quad \forall x \in G^*, \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow T-} u(x, t) < +\infty \quad \forall x \in G^{**};$$

б) если $\underline{\lim}_{t \rightarrow T-} \omega(t)(T-t)^{-1} = n > 0$ и $\overline{\lim}_{t \rightarrow T-} \omega(t)(T-t)^{-1} = N < +\infty$, то

$$\lim_{t \rightarrow T-} u(x, t) = +\infty \quad \forall x \in G', \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow T-} u(x, t) < +\infty \quad \forall x \in G'',$$

где

$$\begin{aligned} G' &:= \{x \in \mathbb{R} : \exists \xi \in G^* (|x - \xi| \leq 2a\sqrt{n_1(m - g(\xi))})\}, \\ G'' &:= \{x \in \mathbb{R} : \forall \xi \in G^- (|x - \xi| > 2a\sqrt{N - N_1 g(\xi)}) \forall \xi \in G^+ (|x - \xi| > 2a\sqrt{N - n_1 g(\xi)})\}, \\ G^+ &:= \{\eta \in \mathbb{R} : g(\eta) \geq 0\}, \quad G^- := \{\eta \in \mathbb{R} : g(\eta) \leq 0\}, \\ n_1 &= \lim_{t \rightarrow T_-} \theta(t)(T - t)^{-1}, \quad N_1 = \overline{\lim}_{t \rightarrow T_-} \theta(t)(T - t)^{-1}; \end{aligned}$$

в) если $\lim_{t \rightarrow T_-} \omega(t)(T - t)^{-1} = +\infty$, то $\lim_{t \rightarrow T_-} u(x, t) = +\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

III. Пусть $\lim_{t \rightarrow T_-} \omega(t)\theta^{-1}(t) = +\infty$. Тогда $\lim_{t \rightarrow T_-} u(x, t) = +\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

3. Остановимся отдельно на задаче (1), (2) с $f(x, t) = \exp\{m(T - t)^{-\alpha} - g(x)(T - t)^{-\beta}\}$, где $m > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $g(x)$ непрерывна и ограничена снизу. Для функций такого вида имеет место

ТЕОРЕМА 2. I. Пусть $\alpha < \beta$, $E := \{x \in \mathbb{R} : g(x) = 0\} \neq \emptyset$. Тогда

а) если $\alpha \in (0, 1)$, то $\lim_{t \rightarrow T_-} u(x, t) = +\infty \quad \forall x \in E$, $\overline{\lim}_{t \rightarrow T_-} u(x, t) < +\infty \quad \forall x \notin E$;

б) если $\alpha = 1$, то $\lim_{t \rightarrow T_-} u(x, t) = +\infty \quad \forall x \in E^*$, $\overline{\lim}_{t \rightarrow T_-} u(x, t) < +\infty \quad \forall x \notin E^*$, где $E^* := \{x \in \mathbb{R} : \exists \xi \in E (|x - \xi| < 2a\sqrt{m})\}$; для $x \in \partial E^*$ в случае, когда существует $\xi^* \in \partial E$ такое, что $|x - \xi^*| = 2a\sqrt{m}$ и $g(\xi) \geq c|\xi - \xi^*|^\gamma$ при $\xi \rightarrow \xi^*$, $\xi \notin E$, где $c > 0$, $\gamma \in (0, \beta]$, справедливо неравенство $\overline{\lim}_{t \rightarrow T_-} u(x, t) < +\infty$; в случае, когда для $x \in \partial E^*$ существует $\xi^* \in \partial E$ такое, что $|x - \xi^*| = 2a\sqrt{m}$ и $g(\xi) \leq c|\xi - \xi^*|^\gamma$ при $\xi \rightarrow \xi^*$, $\xi \notin E$, где $c > 0$, $\gamma > \beta$, справедливо равенство $\lim_{t \rightarrow T_-} u(x, t) = +\infty$;

в) если $\alpha > 1$, то $\lim_{t \rightarrow T_-} u(x, t) = +\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

II. Пусть $\alpha = \beta$, $G^* := \{x \in \mathbb{R} : g(x) < m\} \neq \emptyset$. Тогда

а) если $\alpha \in (0, 1)$, то $\lim_{t \rightarrow T_-} u(x, t) = +\infty \quad \forall x \in G^*$, $\overline{\lim}_{t \rightarrow T_-} u(x, t) < +\infty \quad \forall x \notin G^*$; в случае, когда для $x \in \partial G^*$ $m - g(\xi) \geq c|\xi - x|^\gamma$ при $\xi \rightarrow x$, $\xi \in G^*$, где $c > 0$, $\gamma \geq 2\alpha$, справедливо неравенство $\overline{\lim}_{t \rightarrow T_-} u(x, t) < +\infty$; в случае, когда для $x \in \partial G^*$ $m - g(\xi) \leq c|\xi - x|^\gamma$ при $\xi \rightarrow x$, $\xi \in G^*$, где $c > 0$, $\gamma \in (0, 2\alpha)$, справедливо равенство $\lim_{t \rightarrow T_-} u(x, t) = +\infty$;

б) если $\alpha = 1$, то $\lim_{t \rightarrow T_-} u(x, t) = +\infty \quad \forall x \in G'$, $\overline{\lim}_{t \rightarrow T_-} u(x, t) < +\infty \quad \forall x \notin G'$, где $G' := \{x \in \mathbb{R} : \exists \xi \in G^* (|x - \xi| \leq 2a\sqrt{(m - g(\xi))})\}$;

в) если $\alpha > 1$, то $\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{t \rightarrow T_-} u(x, t) = +\infty$.

III. Пусть $\alpha > \beta$. Тогда $\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{t \rightarrow T_-} u(x, t) = +\infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. // ДАН СССР. 1979. Т. 247. №2. С. 349–353. [2] Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострениями в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
29.05.1995