Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Терентьев, Об одном классе линейных отображений и их положительной обратимости, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 6, 223–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1038>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 17:55:48

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ И ИХ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ОБРАТИМОСТИ

А. Г. ТЕРЕНТЬЕВ

Пусть X и Y – отделимые локально выпуклые векторные топологические пространства над недискретным полем K , E – подпространство X . Мы рассмотрим класс Ω линейных отображений $T_\alpha: E \subset X \rightarrow Y$ (с областью определения $D(T_\alpha) = E$, со значениями в Y), имеющих вид: $T_\alpha = B - A_\alpha$, в предположении, что в этом классе существует хотя бы одно биективное отображение T_β , являющееся неким эталоном.

Если X и Y – F -пространства, а отмеченное *эталонное* отображение T_β замкнуто, то обратное отображение $T_\beta^{-1}: Y \rightarrow X$ непрерывно [1, с. 116], и, таким образом, класс Ω содержит корректные по Адамару отображения (например, отображения, возникающие в краевых задачах для функционально-дифференциальных уравнений, [2], [3, гл. III]).

1. Главными из свойств, которыми обладают отображения $T_\alpha \in \Omega$, являются следующие два свойства (T_β – эталонное отображение):

$$\begin{aligned} \text{(Л)} \quad T_\beta^{-1} T_\alpha &= I - L_{\alpha\beta}, \quad L_{\alpha\beta} = T_\beta^{-1} (A_\alpha - A_\beta), \\ \text{(П)} \quad T_\alpha T_\beta^{-1} &= I - R_{\alpha\beta}, \quad R_{\alpha\beta} = (A_\alpha - A_\beta) T_\beta^{-1}, \end{aligned}$$

где I – тождественный оператор, а $L_{\alpha\beta}: E \rightarrow E$ и $R_{\alpha\beta}: Y \rightarrow Y$ – линейные операторы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображение T_α мы называем *левым* (соотв. *правым*) *почти фредгольмовым*, если оно обладает свойством (Л) (соотв. (П)).

Если один из операторов $L_{\alpha\beta}$ или $R_{\alpha\beta}$ является, например, *потенциально компактным* (т.е. некоторая его целая положительная степень компактна), то отображение T_α в точности оказывается *фредгольмовым* (т.е. оно нётерово и его индекс равен нулю; мы следуем [4]).

Через $\tilde{Z}$ обозначим векторное пространство всех линейных непрерывных операторов $A: Z \rightarrow Z$, наделенное некоторой локально выпуклой топологией. Ниже мы считаем, что $L_{\alpha\beta} \in \tilde{E}$ и $R_{\alpha\beta} \in \tilde{Y}$.

Если единица не является точкой спектра одного из операторов $L_{\alpha\beta} \in \tilde{E}$ или $R_{\alpha\beta} \in \tilde{Y}$, то она не является точкой спектра и для другого оператора. При этом справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} (1^{\text{Л,П}}) \quad (I - L_{\alpha\beta})^{-1} &= I - L_{\beta\alpha}; \quad (I - R_{\alpha\beta})^{-1} = I - R_{\beta\alpha}; \\ (2^{\text{Л,П}}) \quad L_{\alpha\beta} + L_{\beta\alpha} &= L_{\alpha\beta} L_{\beta\alpha} = L_{\beta\alpha} L_{\alpha\beta}; \quad R_{\alpha\beta} + R_{\beta\alpha} = R_{\alpha\beta} R_{\beta\alpha} = R_{\beta\alpha} R_{\alpha\beta}; \\ (3^{\text{Л,П}}) \quad L_{\alpha\beta} &= T_\beta^{-1} R_{\alpha\beta} T_\beta; \quad R_{\alpha\beta} = T_\beta L_{\alpha\beta} T_\beta^{-1}. \end{aligned}$$

2. Дальнейшие рассуждения мы проводим для правых почти фредгольмовых отображений $T_\alpha \in \Omega$ (соотношения с буквой “П”). Ниже считаем X и Y вещественными B -пространствами. Мы предполагаем также, что пространство Y наделено структурой порядка с помощью *собственного порождающего и нормального* конуса C_Y (здесь мы следуем [5]).

Структуру порядка в E введем с помощью конуса C_Y и эталонного отображения $T_0 \in \Omega$, полагая $C_E = T_0^{-1} C_Y$. Ясно, что C_E – конус в векторном пространстве E . Следовательно, E наделается структурой порядка с помощью конуса C_E обычным образом. Поэтому дальше мы используем термины “*положительное*”, “*положительно обратимое*”, относя их к отображению T в общепринятом смысле: $TC_E \subset C_Y$, $T^{-1}C_Y \subset C_E$. Для отношения порядка мы используем знак $\leq$.

Для отображения $T_\alpha \in \Omega$ отсюда и из свойства правой почти фредгольмовости (П) имеем:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Отображение $T_\alpha \in \Omega$ положительно обратимо тогда и только тогда, когда существует положительно обратимое отображение $T_\beta \in \Omega$ такое, что оператор $I - R_{\alpha\beta}$ положительно обратим.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Отображение $T_\alpha \in \Omega$ положительно обратимо тогда и только тогда, когда существует положительно обратимое отображение $T_\beta \in \Omega$ такое, что оператор $R_{\alpha\beta} \in \tilde{Y}$ положителен (т.е. $R_{\alpha\beta} \in C_{\tilde{Y}}$) и $\rho(R_{\alpha\beta}) < 1$. При этом $0 \leq T_\beta^{-1} \leq T_\alpha^{-1}$.*

Действительно, в части $(\Rightarrow)$ следует положить $T_\beta = T_\alpha$, в части $(\Leftarrow)$ из (II) имеем: $T_\alpha^{-1} = T_\beta^{-1}(I - R_{\alpha\beta})^{-1}$. Последнее неравенство следует из предложения 1 и соотношения

$$(4) \quad T_\alpha^{-1} - T_\beta^{-1} = T_\beta^{-1}(I - R_{\alpha\beta})^{-1}R_{\alpha\beta}.$$

Следующее утверждение, называемое *теоремой сравнения*, решает вопрос о “грубости” свойства положительной обратимости линейных отображений класса Ω .

ТЕОРЕМА 1. *Пусть отображения $T_\alpha, T_\beta, T_\gamma$ класса Ω таковы, что $T_\alpha \leq T_\beta \leq T_\gamma$ (или, что то же, $A_\gamma \leq A_\beta \leq A_\alpha$). Пусть, далее, отображение T_γ положительно обратимо и $\rho(R_{\alpha\gamma}) < 1$. Тогда отображения T_α и T_β положительно обратимы и имеют место неравенства: $0 \leq T_\gamma^{-1} \leq T_\beta^{-1} \leq T_\alpha^{-1}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Так как $T_\alpha T_\gamma^{-1} = I - R_{\alpha\gamma}$, $R_{\alpha\gamma} = (A_\alpha - A_\gamma)T_\gamma^{-1}$, то положительная обратимость отображения T_α и неравенства $0 \leq T_\gamma^{-1} \leq T_\alpha^{-1}$ следуют из условий теоремы и предложения 2.

б) Так как $T_\beta T_\gamma^{-1} = I - R_{\beta\gamma}$, $R_{\beta\gamma} = (A_\beta - A_\gamma)T_\gamma^{-1}$ и $R_{\alpha\gamma} - R_{\beta\gamma} = (A_\alpha - A_\beta)T_\gamma^{-1}$, то $0 \leq R_{\beta\gamma} \leq R_{\alpha\gamma}$. Отсюда и из нормальности конуса $C_{\tilde{Y}}$ в B -алгебре $\tilde{Y}$ следует, что $\rho(R_{\beta\gamma}) < 1$. Теперь из предложения 2 следуют положительная обратимость отображения T_β и неравенства $0 \leq T_\gamma^{-1} \leq T_\beta^{-1}$.

в) Так как $T_\alpha T_\beta^{-1} = I - R_{\alpha\beta}$, $R_{\alpha\beta} = (A_\alpha - A_\beta)T_\beta^{-1}$, то из обратимости отображения T_α следует, что единица не является точкой спектра оператора $R_{\alpha\beta}$. Отсюда и из обратимости отображений T_α и T_β , а также – соотношений (1^Π) и (4), следует, что

$$T_\alpha^{-1} - T_\beta^{-1} = T_\beta^{-1}(I - R_{\alpha\beta})^{-1}R_{\alpha\beta} = T_\beta^{-1}(I - R_{\beta\alpha})R_{\alpha\beta}, \quad R_{\beta\alpha} = (A_\beta - A_\alpha)T_\alpha^{-1}.$$

Теперь ясно, что $0 \leq T_\beta^{-1} \leq T_\alpha^{-1}$. Сравнение результатов а), б) и в) завершает доказательство.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть отображения $T_\alpha, T_\beta, T_\gamma$ класса Ω таковы, что $T_\alpha \leq T_\beta \leq T_\gamma$. Пусть, далее, “крайние” отображения T_α и T_γ положительно обратимы. Тогда “среднее” отображение T_β также положительно обратимо и $\rho(R_{\alpha\gamma}) < 1$ (и, таким образом, мы оказываемся в условиях теоремы 1). Кроме того, $\rho(R_{\beta\gamma}) < 1$ и $\rho(R_{\alpha\beta}) < 1$.*

ЗАМЕЧАНИЕ. В отличие от [6], [7], здесь все утверждения получены без предположения о компактности операторов вида $R_{\alpha\beta} \in \tilde{Y}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967. [2] Азбелев Н. В., Рахматулина Л. Ф., Максимов В. П. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. [3] Трев Ф. Введение в теорию псевдо-дифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье. Т. 1: Псевдо-дифференциальные операторы. М.: Мир, 1984. [4] Крейн С. Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1971. [5] Шефер Х. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971. [6] Терентьев А. Г. // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 9. С. 1635–1641. [7] Терентьев А. Г. // Труды Тамбовск. ин-та хим. машиностр. 1970. № 4. С. 49–60.