Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Холево, На $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ существует нестандартная динамическая полугруппа,
УМН, 1996, том 51, выпуск 6, 225–226

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1039>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 13:40:55

НА $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ СУЩЕСТВУЕТ НЕСТАНДАРТНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ПОЛУГРУППА

А. С. Холево

Пусть K, L_j – операторы на плотном подпространстве $\mathcal{D}$ гильбертова пространства $\mathcal{H}$, удовлетворяющие условию

$$(1) \quad \sum_j \|L_j \psi\|^2 \leq 2 \operatorname{Re} \langle \psi | K \psi \rangle, \quad \psi \in \mathcal{D},$$

в частности, K – аккретивный оператор. Предположим, что замыкание $\bar{K}$ – максимальный аккретивный (m – аккретивный) оператор. Тогда существует единственное минимальное решение T_t , $t \geq 0$, задачи Коши для обратного квантового марковского управляющего уравнения

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \langle \varphi | T_t[X] \psi \rangle = \sum_j \langle L_j \varphi | T_t[X] L_j \psi \rangle - \langle K \varphi | T_t[X] \psi \rangle - \langle \varphi | T_t[X] K \psi \rangle,$$

$$\varphi, \psi \in \mathcal{D}, \quad X \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}),$$

удовлетворяющее условию $T_0[X] = X$, которое является динамической полугруппой (д.п.) на алгебре $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ всех ограниченных операторов в $\mathcal{H}$ [2]. Д.п. назовем *стандартной*, если она может быть получена с помощью описанной выше процедуры. Хорошо известно, что всякая непрерывная по норме д.п. является стандартной, что эквивалентно представлению

$$\mathcal{L}[X] = \sum_j L_j^* X L_j - K^* X - X K$$

для (ограниченного) генератора $\mathcal{L}$ полугруппы. В настоящей заметке построен пример нестандартной д.п. Это дает в определенном смысле отрицательный ответ на давно стоящий вопрос [1] о возможности стандартного представления генератора произвольной д.п.

Пусть $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_+)$, $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ – банахово пространство ядерных операторов ω в $\mathcal{H}$, которые для краткости отождествляются с ядрами $\omega(x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}_+$. Рассмотрим оператор

$$(3) \quad \mathcal{K}\omega = \mathcal{K}_0\omega + \Omega \frac{d}{dx} \omega(x, x) \Big|_{x=0},$$

где $\mathcal{K}_0 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\Omega \in \mathfrak{T}(\mathcal{H})$ – оператор плотности, определенный на подпространстве $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{T}(\mathcal{H})$ ядер $\omega(x, y)$, бесконечно дифференцируемых внутри квадранта $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, обращающихся в нуль на его границе и имеющих производные по направлениям в точке $x = y = 0$. Оператор (3) описывает некоммутативную диффузию на $\mathbb{R}_+$ с отскоком от 0 в состоянии Ω [3].

ТЕОРЕМА. *Замыкание оператора $\mathcal{K}$ является генератором предсопряженной д.п. S_t в $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$. Д.п. $T_t = (S_t)^*$ в $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ не является стандартной.*

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Полугруппа, порождаемая оператором $\mathcal{K}_0$, строится явно:

$$(S_t^0 \omega)(x, y) = \frac{1}{4\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \int_0^\infty d\xi d\eta \sum_{n=0,1} (-1)^n \exp \left\{ -\frac{[\varphi_n(x, y) - \xi - \eta]^2}{16t} \right\} \omega(\xi, \eta),$$

где $\varphi_0(x, y) = x + y$, $\varphi_1(x, y) = \max\{x - 3y, y - 3x\}$. Подпространство $\mathfrak{D}$ инвариантно относительно S_t^0 и, следовательно, является существенной областью для $\mathcal{K}_0$. Д.п. $T_t^0 = (S_t^0)^*$ стандартна, так как является минимальным решением уравнения

$$(4) \quad \frac{d}{dt} \langle \varphi | T_t^0[X] \psi \rangle = 2 \langle \varphi' | T_t^0[X] \psi' \rangle + \langle \varphi'' | T_t^0[X] \psi \rangle + \langle \varphi | T_t^0[X] \psi'' \rangle, \quad \varphi, \psi \in C_0^2(\mathbb{R}_+).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 93-01-01709).

Оператор $\mathcal{K}$ получается из $\mathcal{K}_0$ возмущением ранга 1, поэтому $\text{dom } \mathcal{K} = \text{dom } \mathcal{K}_0$ [3]. Пусть $\omega, A \in \mathfrak{D}$, тогда

$$\text{Tr } \mathcal{K}_0[\omega]A = \int_0^\infty \int_0^\infty \omega(x, y)(\mathcal{K}_0 A)(x, y) dx dy.$$

Используя тот факт, что $\mathfrak{D}$ – существенная область для $\mathcal{K}_0$, получаем аналогичное соотношение для $\omega \in \text{dom } \mathcal{K}_0$. Отсюда выводится, что для $\omega \in \text{dom } \mathcal{K}$ граничное значение определено и равно нулю п.в.: $\omega(0, y) = \omega(x, 0) \equiv 0$.

Построение д.п. T_t из T_t^0 с помощью обобщения ряда Дайсона дано в [3]. Допустим, что T_t стандартна, т.е. порождается уравнением типа (2). Из процедуры построения T_t вытекает, что $|\psi\rangle\langle\varphi| \in \text{dom } \mathcal{K}$, где $\varphi, \psi \in \text{dom } K$. Таким образом, $\varphi \in \text{dom } K$ влечет $\varphi(0) = 0$, и

$$(5) \quad \mathcal{K}[|\psi\rangle\langle\varphi|] = \mathcal{K}_0[|\psi\rangle\langle\varphi|], \quad \varphi, \psi \in \text{dom } K.$$

Покажем, что отсюда и из предположения стандартности T_t вытекает $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0$, что является противоречием.

Заметим, что уравнение (2) инвариантно относительно преобразований

$$L_j \rightarrow L'_j = L_j + \alpha_j, \quad K \rightarrow K' = K + \sum_j \left(\bar{\alpha}_j L_j + \frac{|\alpha_j|^2}{2} \right),$$

где $\sum_j |\alpha_j|^2 < \infty$. При этом m -аккретивный оператор K переходит в m -аккретивный оператор K' с той же областью определения, как следует из теоремы Чернова и оценки, использующей (1)

$$\left\| \sum_j \bar{\alpha}_j L_j \psi \right\|^2 \leq \sum_j |\alpha_j|^2 \sum_j \|L_j \psi\|^2 \leq 4 \text{Re} \left(\frac{\sum_j |\alpha_j|^2}{2} \psi | K \psi \right) \leq \left\| \left(K + \frac{1}{2} \sum_j |\alpha_j|^2 \right) \psi \right\|^2.$$

Фиксируем единичный вектор $\psi_0 \in \text{dom } K$ и положим $\alpha_j = -\langle \psi_0 | L_j \psi_0 \rangle$. Тогда $\langle \psi_0 | L'_j \psi_0 \rangle = 0$ и из (5) получаем

$$\sum_j |L'_j \psi\rangle\langle L'_j \varphi| - |K' \psi\rangle\langle \varphi| - |\psi\rangle\langle K' \varphi| = \mathcal{K}_0[|\psi\rangle\langle\varphi|].$$

Полагая $\varphi = \psi_0$ и умножая справа скалярно на ψ_0 , получаем

$$K' \psi(x) = -\psi(x) \langle K' \psi_0 | \psi_0 \rangle - \int_0^\infty \mathcal{K}_0[\psi(x) \overline{\psi_0(y)}] \psi_0(y) dy$$

для $\psi \in \text{dom } K'$. Правая часть этой формулы определяет аккретивный оператор для всех $\psi \in C_0^2$. Поскольку K' m -аккретивный, $C_0^2 \subset \text{dom } K'$ и $K' \varphi = -\varphi'' + c_1 \varphi' + c_0 \varphi$. Таким образом, соотношение (5) имеет место для $\varphi, \psi \in C_0^2$. Поскольку правая часть уравнения (2) может быть записана в виде $\text{Tr } \mathcal{K}[|\psi\rangle\langle\varphi|]T_t[X]$, оно совпадает с уравнением (4). Таким образом, T_t и T_t^0 являются минимальным решением одного и того же марковского управляющего уравнения (4), откуда $T_t = T_t^0$ и, следовательно, $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0$. Теорема доказана.

Тот факт, что д.п. T_t удовлетворяет уравнению вида (2), равносильно тому, что $\text{dom } \mathcal{K}$ содержит операторы $|\psi\rangle\langle\varphi|$, где φ, ψ пробегает плотное подпространство в $\mathcal{H}$. В этой связи было бы интересно выяснить, существуют ли генераторы $\mathcal{K}$, вообще не обладающие таким свойством.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Davies E. B. // J. Funct. Anal. 1979. V. 34. P. 421–432. [2] Holevo A. S. // J. Funct. Anal. 1995. V. 131. P. 255–278. [3] Холево А. С. // Изв. РАН. Сер. матем. 1995. Т. 59. С. 207–222.