Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. В. Плыкин, О структуре централизаторов ановских диффеоморфизмов тора, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 6, 259–260

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm104>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 16:06:16

О СТРУКТУРЕ ЦЕНТРАЛИЗАТОРОВ АНОСОВСКИХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ ТОРА

Р. В. Плыкин

Пусть $\text{Diff}(M)$ – группа C^∞ -дiffeоморфизмов гладкого, связного, компактного многообразия M , наделенная C^∞ -топологией. Центризатором $Z(f)$ диффеоморфизма $f \in \text{Diff}(M)$ называется подмножество $\text{Diff}(M)$, состоящее из диффеоморфизмов, коммутирующих с f , которое, как нетрудно видеть, также образует группу.

Основным результатом этой заметки является следующая теорема, которая вместе с приводимыми ниже примерами дает отрицательный ответ на вопрос С. Смейла [1], [2]: может ли диффеоморфизм компактного многообразия M быть приближен в C^r -топологии при $r \geq 1$ диффеоморфизмами, которые коммутируют лишь со своими итерациями?

ТЕОРЕМА. Пусть A – ановский диффеоморфизм n -тора, определяемый унимодулярной матрицей, обладающей неприводимым характеристическим многочленом и спектром $\text{spes } A = \{\lambda_1(A), \lambda_2(A), \dots, \lambda_k(A), \mu_1(A), \mu_1(\bar{A}), \dots, \mu_s(A), \mu_s(\bar{A})\}$, где $\lambda_i(A)$ – вещественные, а $\mu_j(A)$ – комплексные характеристические числа. Тогда центризатор $Z(A)$ изоморфен группе $Z^l \oplus F$, где $1 \leq l \leq k + s - 1$, F – конечная коммутативная группа ($s = 0$ – случай вещественного спектра, $k = 0$ – случай комплексного спектра).

Заметим, что вследствие леммы Гаусса [3] условия о неприводимости характеристического многочлена выполнены для всех матриц, спектр которых разделен единичной окружностью комплексной плоскости на два множества, в одном из которых содержится единственный элемент.

Доказательство теоремы использует следующие леммы.

ЛЕММА 1. Если B – автоморфизм тора, принадлежащий центризатору $Z(A)$, где A удовлетворяет условиям теоремы, то A и B имеют одинаковый набор собственных векторов, задающих базис в комплексном пространстве C^n , и обратно, если автоморфизм B имеет хотя бы один общий с A собственный вектор, то $B \in Z(A)$.

Доказательство леммы вытекает из того, что если $e_1, e_2, \dots, e_k, f_1, \bar{f}_1, \dots, f_s, \bar{f}_s$ – базис, составленный из собственных векторов автоморфизма A , то $Be_1, Be_2, \dots, Be_k, Bf_1, Bf_1, \dots, Bf_s, B\bar{f}_s$ – также базис автоморфизма A с теми же собственными значениями.

Можно убедиться также в том, что координаты любого собственного вектора e автоморфизма A являются рационально независимыми алгебраическими числами. Поэтому в случае $AB \neq BA$ соотношение $(AB - BA)e = 0$ порождает нетривиальную рациональную зависимость между координатами e , что невозможно.

Из последнего рассуждения легко выводится следующая лемма.

ЛЕММА 2. Если автоморфизмы тора $B_1, B_2 \in Z(A)$ имеют одинаковые собственные числа при одном из собственных векторов, то $B_1 = B_2$, если же эти собственные числа отличаются знаком, то $B_1 = -B_2$.

Для доказательства теоремы заметим, что согласно лемме 2 спектр $(\lambda_1(B), \dots, \lambda_k(B), \rho_1(B)e^{i2\pi\varphi_1(B)}, \rho_1(B)e^{-i2\pi\varphi_1(B)}, \dots, \rho_s(B)e^{i2\pi\varphi_s(B)}, \rho_s(B)e^{-i2\pi\varphi_s(B)})$ автоморфизма $B \in Z(A)$ восстанавливает B , при этом перемножению двух автоморфизмов соответствует почленное перемножение их спектров.

Спектры образуют подгруппу $\text{Spes } Z(A)$ группы $R_*^k \oplus C_*^s$, где $R_*(C_*)$ – мультипликативная группа вещественных (комплексных) чисел.

Как подгруппа топологической группы $\text{Spes } Z(A)$ дискретна, в чем убеждаемся, применяя теорему Виета к сходящейся последовательности точек $\text{Spes } Z(A)$, и замечаем вследствие целочисленности коэффициентов характеристических полиномов, соответствующих точкам этой последовательности, что различных полиномов конечное множество вопреки бесконечности выбранной последовательности.

Заметим также, что более короткие последовательности $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \rho_1, \dots, \rho_s, e^{i2\pi\varphi_1}, \dots, e^{i2\pi\varphi_s}\}$ в случае $k \geq 1$ (или $\{\rho_1, \dots, \rho_{s-1}, e^{i2\pi\varphi_1}, \dots, e^{i2\pi\varphi_s}\}$, если $k = 0$) также образуют дискретную подгруппу группы $R_*^{k-1} \oplus R_+^s \oplus T^s$ (соответственно $R_+^{s-1} \oplus T^s$), где R_+ – мультипликативная группа положительных вещественных чисел, T – мультипликативная группа комплексных чисел, равных по модулю 1. Эта группа изоморфна $R^{k+s-1} \oplus Z_2^{k-1} \oplus T_1^s$ (соответственно $R^{s-1} \oplus T_1^s$), где R – аддитивная группа вещественных чисел, T_1 – аддитивная группа классов вещественных чисел по модулю 1.

Теорема вытекает из того, что структура дискретной подгруппы группы этого типа имеет вид $Z^l \oplus F$, $1 \leq l \leq k + s - 1$, F – коммутативная конечная группа [4, гл. 7, с. 182].

Заметим также, что в случае вещественного спектра ($s = 0$) централизатор $Z(A)$ изоморфен $Z^l \oplus Z_2^m$, $1 \leq l \leq k - 1$, $1 \leq m \leq k - 1$.

ПРИМЕР 1. Аносовский диффеоморфизм $A: T^3 \rightarrow T^3$ задается матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

с характеристическим полиномом $P_A(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 1$ и $\text{Spec}(A) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $\lambda_1 \in (-1, 0)$, $\lambda_2 \in (0, 1)$, $\lambda_3 = \frac{-1}{\lambda_1 \lambda_2} \in (2, 3)$.

Автоморфизм $B = A - I$ принадлежит $Z(A)$, $\text{Spec}(B) = ((\mu_1, \mu_2, \mu_3), \mu_1 = \lambda_1 - 1 \in (-2, -1), \mu_2 = \lambda_2 - 1 \in (-1, 0), \mu_3 = \lambda_3 - 1 \in (1, 2))$.

Рассмотрим последовательность автоморфизмов $A^{k_i} B^{l_i}$ такую, чтобы числовая последовательность $\lambda_2(A^{k_i} B^{l_i}) = \lambda_1^{k_i} \mu_1^{l_i}$ имела конечный предел, отличный от 0 при $k_i \rightarrow +\infty, l_i \rightarrow +\infty$. При этом $\lambda_2(A^{k_i} B^{l_i}) = \lambda_2^{k_i} \mu_2^{l_i} \rightarrow 0$, $\lambda_3(A^{k_i} B^{l_i}) = \lambda_3^{k_i} \mu_3^{l_i} \rightarrow \infty$. Если бы было $Z(A) = Z \oplus Z_2$, то $A^{k_i} B^{l_i} = C^{m_i}$, C – аносовский диффеоморфизм, и ни одна из последовательностей собственных чисел C^{m_i} не могла бы иметь конечного предела, отличного от нуля. Таким образом, $Z(A) \cong Z^2 \oplus Z_2$.

Заметим, что в рассмотренном примере $Z(A)$ состоит из аносовских диффеоморфизмов и это всегда так, когда $\text{Spec}(A)$ – вещественный.

ПРИМЕР 2. Аносовский диффеоморфизм $A: T^4 \rightarrow T^4$ задается матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Введем также в рассмотрение автоморфизм $B = A + I$, его характеристический полином $P_B(\lambda) = \lambda^4 - 3\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1$ имеет два вещественных корня $\lambda_{1,2}(B) = \frac{3+\sqrt{5}}{4} \pm \frac{\sqrt{6\sqrt{5}-2}}{4}$ и два комплексных корня $\mu_{1,2}(B) = \frac{3-\sqrt{5}}{4} \pm i \frac{\sqrt{6\sqrt{5}+2}}{4}$, $\lambda_1(B) > 1$, $\lambda_2(B) \in (0, 1)$, $|\mu_1(B)| = |\mu_2(B)| = 1$. Характеристический полином A имеет следующие корни: $\lambda_1(A) = \lambda_1(B) - 1 \in (0, 1)$, $\lambda_2(A) = \lambda_2(B) - 1 \in (-1, 0)$, $\mu_1(A) = \mu_1(B) - 1$, $\mu_2(A) = \mu_2(B) - 1$, $|\mu_1(A)| = |\mu_2(A)| > 1$. Автоморфизм B , не являющийся аносовским, принадлежит $Z(A) \cong Z^2 \oplus F$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Smale S. // Physica D. 1991. V. 5. P. 267–273. [2] Smale S. Mathematical problems for the next century // Preprint, 1997. [3] Касселс Д. В. С. Введение в теорию диофантовых приближений. М.: ИЛ, 1961. [4] Бурбаки Н. Общая топология. М.: Физматгиз, 1959.