Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Шварцман, О рефлексивности групп Бъянки, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 6, 271–272

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm107>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 15:09:11

О РЕФЛЕКТИВНОСТИ ГРУПП БЪЯНКИ

О. В. ШВАРЦМАН

Пусть O_m – кольцо целых чисел мнимого квадратичного поля $K_m = \mathbb{Q}(\sqrt{-m})$, m – свободное от квадратов натуральное число, Cl_m – группа классов дивизоров поля K_m , и h_m – число классов. Через τ обозначим инволюцию комплексного сопряжения на группе $PGL_2(O_m)$. Полупрямое произведение $B_m = PGL_2(O_m) \rtimes \langle \tau \rangle$ назовем *группой Бьянки*. Группа B_m реализуется как дискретная группа движений гиперболического пространства H^3 , и вопрос о ее рефлексивности (см. ниже) исследовался в работах [1]–[3]. В [1] доказано, что если группа B_m рефлексивна, то Cl_m – элементарная 2-группа. Из одного этого необходимого условия уже следует нерелексивность групп B_m для всех достаточно больших m . Наша цель – получить реальную оценку $m \leq 1555$, доказав следующую теорему.

ТЕОРЕМА. *Если группа B_m рефлексивна, то $h_m \leq 4$.*

Оценка теоремы неулучшаема, как показывает пример рефлексивной группы B_{21} [2]. В [3] доказано, что если $m \equiv 1, 2 \pmod{4}$, то группа B_m рефлексивна только при $m = 1, 2, 5, 6, 10, 13, 21$. Поэтому теорема будет доказана при условии, что $m \equiv 3 \pmod{4}$. После этого вопрос о рефлексивности останется открытым для 43 значений m , максимальное из которых равно 1555 [4].

1. Пусть M – решетка над $\mathbb{Z}$ с заданным на ней скалярным произведением. Примитивный вектор x из M называется k -корнем решетки, если $x^2 = k > 0$, и решетка M переходит в себя при отражении r_x относительно гиперплоскости, ортогональной вектору x в пространстве $V = M \otimes \mathbb{R}$. Отражение r_x назовем k -отражением решетки. Если x – корень решетки, то через M_x обозначим подрешетку $M \cap (\mathbb{R}x)^\perp$. Условимся через $[A]$ обозначать решетку $\mathbb{Z}^n$ вместе со скалярным произведением, заданным на ней с помощью матрицы A . Рассмотрим четную гиперболическую решетку ранга 4:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \perp \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{m+1}{2} \end{bmatrix}$$

(ортогональная сумма), и пусть K – конус всех векторов с отрицательным квадратом в пространстве $V = L \otimes \mathbb{R}$. Выберем одну из его связных компонент K_+ и обозначим через G группу всех ортогональных преобразований пространства V , сохраняющих решетку L и конус K_+ . В линейной модели гиперболического пространства группа G является дискретной группой движений H^3 с некомпактной фундаментальной областью конечного объема. Группа Бьянки B_m вкладывается в G в виде нормальной подгруппы конечного индекса Γ [1]. Пусть Γ_r – (нормальная) подгруппа в Γ , порожденная всеми отражениями из Γ . Рефлексивность группы Бьянки означает, что индекс $[\Gamma : \Gamma_r]$ конечен.

2. Здесь собраны необходимые технические леммы.

ЛЕММА 1. *Группа Γ_r содержит только 2- и $2m$ -отражения, и все такие отражения из группы G принадлежат группе Γ_r .*

ЛЕММА 2. *Пусть x – 2- или $2m$ -корень решетки L . Тогда а) группа автоморфизмов решетки L_x не содержит элементов порядка 4; б) любой автоморфизм решетки L_x порядка 3 есть произведение двух ее 2-отражений.*

ЛЕММА 3. *Решетка L не содержит трех попарно ортогональных корней одинаковой длины.*

3. Через $B(C)$ обозначим множество бесконечно удаленных вершин фундаментального многогранника Кокстера C группы Γ_r .

ЛЕММА 4. *Группа G/Γ_r действует транзитивно на множестве $B(C)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть e — примитивный изотропный вектор в L , соответствующий бесконечно удаленной вершине. Включим e в унимодулярную гиперболическую подрешетку $\langle e, f \rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Тогда

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \perp M,$$

где M — четная бинарная евклидова подрешетка с определителем m . Так как стабилизатор бесконечно удаленной вершины в группе Γ_r порожден отражениями, то решетка M содержит 2- или $2m$ -корни. Но тогда $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{m+1}{2} \end{bmatrix}$, и наше утверждение следует из теоремы Витта.

ЛЕММА 5. Пусть $x \in B(C)$. Тогда а) при $m > 3$ фундаментальная область стабилизатора $(\Gamma_r)_x$ на орисфере с центром в x является прямоугольником, одна пара параллельных сторон которого высекается 2-, а другая — $2m$ -отражениями; б) стабилизатор G_x содержит осевую симметрию второго порядка φ_x , не лежащую в $(\Gamma_r)_x$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО пункта б). В базисе, где

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \perp \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{m+1}{2} \end{bmatrix},$$

можно выбрать

$$\varphi_x = \begin{pmatrix} 1 & \frac{m+1}{4} & 1 & \frac{m+1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Доказательство теоремы. Группа G есть полупрямое произведение $G = \Gamma_r \rtimes T$ группы Γ_r и конечной группы T симметрий многогранника C . Пусть T^+ — подгруппа T , состоящая из собственных движений. Если $t \in T^+$ — элемент порядка 3, то его неподвижная ось не может проходить ни через ребро, ни через вершину (последнее запрещено леммами 3 и 5). Но тогда она пересекает внутренность некоторой грани, и элемент t переводит эту грань в себя. Но это противоречит утверждению леммы 2, пункт б). Аналогично исключаем присутствие в T^+ элементов порядка 4. Следовательно, T^+ — абелева 2-группа, и ее порядок $|T^+| \leq 4$, а порядок $|T| \leq 8$. Группа T транзитивна на множестве $B(C)$, и порядок стабилизатора любой вершины ≥ 2 по лемме 5. Поэтому $|B(C)| \leq 4$. Но тогда и число классов Γ -эквивалентных бесконечно удаленных вершин также не превышает четырех. С другой стороны, их число равно h_m [1].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-010-00783) и SFB-343 (Университет г. Билефельд).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Винберг Э. Б. // Вопросы теории групп и гомологической алгебры. Ярославль, 1987. С. 121–127. [2] Шайхеев М. К. // Вопросы теории групп и гомологической алгебры. Ярославль, 1987. С. 127–133. [3] Шварцман О. В. // Вопросы теории групп и гомологической алгебры. Ярославль, 1987. С. 134–139. [4] Cohen H. A Course in Computational Algebraic Number Theory. Berlin: Springer-Verlag, 1993.