Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Е. Скурихин, Вялые пучки на предпучках множеств, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 6, 263–264

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm108>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 13:06:51

ВЯЛЫЕ ПУЧКИ НА ПРЕДУЧКАХ МНОЖЕСТВ

Е. Е. Скурихин

Как известно, вялые пучки работают на топологических пространствах с совершенно разными топологическими свойствами. Свойства вялости используются при изучении производных функторов обратного предела $\lim^n$. При разработке этальной теории также выделялись различные классы ациклических пучков с тем же названием.

В данной работе рассматриваются вялые пучки на предпучках множеств, заданных на частичном упорядоченном множестве (ч.у.м.) K , снабженном топологией Гротендика τ . Если $K \subset OX$ (OX решетка открытых подмножеств топологического пространства X), то частными случаями получающихся результатов являются, в зависимости от τ , основные факты относительно вялых [1] и вялых нормальных пучков [2]. Во всех случаях получаемые результаты относятся к функтору $\lim$ и его производным функторам $\lim_\tau^{(n)}$, совпадающим с $\lim^{(n)}$, если τ дискретная топология Гротендика.

Напомним некоторые обозначения, относящиеся к предпучкам множеств (см. [3]–[6]). Пусть (K, τ) – сайт (т.е. категория K и топология Гротендика τ на ней), $\widehat{K}$ – категория предпучков множеств на K . Для $D \in \text{Ob}(\widehat{K})$ через K_D и $K_{D, \tau}$ соответственно обозначаются множества всех и всех τ -замкнутых подпредпучков D (если $A \in K_D$, то $s \in [A]_\tau(k) \Leftrightarrow s \in D(k)$ и $\exists \{f_i: k_i \rightarrow k \mid i \in I\} \in \tau(k): sf_i \in A(k_i)$; A – τ -замкнут в D , если $A = [A]_\tau$). Отображения $j: K \rightarrow K_1$ и $j_\tau: K \rightarrow K_{1, \tau}$, где 1 – пучок на K , для которого множество $1(k)$ одноэлементное для всех k , определяются так: $j(k)(l)$ одноэлементно, если $\text{Hom}(l, k) \neq \emptyset$, и пусто в противном случае; $j_\tau(k) = [j(k)]_\tau$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\mathcal{U}$ – некоторая совокупность пар (D, B) предпучков множеств на K , таких, что $B \subset D$. Назовем τ -пучок $\mathcal{A}$ $\mathcal{U}$ -вялым, если $\forall (D, B) \in \mathcal{U}$ отображение ограничения $\text{Hom}_{\widehat{K}}(D, \mathcal{A}) \rightarrow \text{Hom}_{\widehat{K}}(B, \mathcal{A})$ – эпиморфизм.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть (K, τ) – сайт, D, B – предпучки множеств на K , $B \subset D$, $\Gamma: \mathcal{S}_\tau \rightarrow \text{Ab}$ зададим формулой $\Gamma(\mathcal{A}) = \ker\{\text{Hom}_{\widehat{K}}(D, \mathcal{A}) \rightarrow \text{Hom}_{\widehat{K}}(B, \mathcal{A})\} = \{u: D \rightarrow \mathcal{A} \mid u|_B = 0\}$. Положим $H_\tau^n(D, B, \mathcal{A}) = (R^n\Gamma)(\mathcal{A})$, $H_\tau^n(D, \mathcal{A}) = H_\tau^n(D, \emptyset, \mathcal{A})$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть (K, τ) – сайт. 1. Для любых $D \in \text{Ob}(\widehat{K})$, $B \in K_D$, $\forall \mathcal{A} \in \mathcal{S}_\tau$ имеется точная последовательность когомологий

$$0 \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Hom}_{\widehat{K}}(D, \mathcal{A}) \rightarrow \text{Hom}_{\widehat{K}}(B, \mathcal{A}) \rightarrow H_\tau^1(D, B, \mathcal{A}) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow H_\tau^n(D, B, \mathcal{A}) \rightarrow H_\tau^n(D, \mathcal{A}) \rightarrow H_\tau^n(B, \mathcal{A}) \rightarrow H_\tau^{n+1}(D, B, \mathcal{A}) \rightarrow \dots$$

2. Пусть $\mathcal{U}$ – некоторая совокупность пар (E, F) предпучков множеств на K , таких, что $F \subset E$. Предположим, что для любого $\mathcal{U}$ -вялого τ -пучка $\mathcal{A}$ и для любой пары $(D, B) \in \mathcal{U}$, $H_\tau^k(D, \mathcal{A}) = H_\tau^k(B, \mathcal{A}) = 0$ при $k > 0$. Тогда следующие условия на абелев τ -пучок $\mathcal{A}$ и число $n \geq 0$ эквивалентны:

- $\mathcal{A}$ обладает $\mathcal{U}$ -вялой резольвентой длины n ;
- для любой резольвенты $0 \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}^0 \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{B}^n \rightarrow 0$ пучка $\mathcal{A}$ длины n из того, что $\mathcal{B}^i$ – $\mathcal{U}$ -вялые ($0 \leq i \leq n-1$), следует, что $\mathcal{B}^n$ – $\mathcal{U}$ -вял;
- $\forall (D, B) \in \mathcal{U}$, $H_\tau^{n+1}(D, B, \mathcal{A}) = 0$;
- $\forall (D, B) \in \mathcal{U}$, $H_\tau^k(D, B, \mathcal{A}) = 0$ при $k > n$;
- $\forall (D, B) \in \mathcal{U}$, $H_\tau^n(D, \mathcal{A}) \rightarrow H_\tau^n(B, \mathcal{A})$ – эпиморфизм;
- $\forall (D, B) \in \mathcal{U}$, $H_\tau^{n+1}(D, B, \mathcal{A}) \rightarrow H_\tau^{n+1}(D, \mathcal{A})$ – мономорфизм.

В частности, при $n = 0$ получается когомологический критерий $\mathcal{U}$ -вялости.

Таким образом, следуя [7] и [8], можно определить, например, $(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ -размерность Бредона предпучка множеств E , как минимальную длину $\mathcal{U}$ -вялой резольвенты $\mathcal{A}$, если $\mathcal{U}$ состоит из пар подпредпучков E . Из результатов автора [6] легко выводится для Тихоновских пространств обычное неравенство, связывающее когомологическую размерность и размерность Бредона паракомпактных пространств. Кроме того, обычная когомологическая размерность топологического пространства может быть естественно определена, как размерность Бредона в подходящем сайте.

Выделим условия, обеспечивающие ацикличность вялых пучков, необходимую, в частности, для применения предыдущей теоремы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть (K, τ) сайт, $D \in \text{Ob}(\widehat{K})$, $P \subset K_{D, \tau}$. $\beta = \{B_i \in K_D \mid i \in I\}$ называется ограничено P - τ -представимым (или принадлежит классу $\mathcal{R}_P$), если I можно так вполне упорядочить, что $\forall i > 0 \ [\cup \{B_i \cap B_j \mid j < i\}]_\tau \in P$. Если K — ч.у.м., то $\alpha = \{a_i \in K \mid i \in I\} \in \mathcal{R}_P \Leftrightarrow j(\alpha) = \{j(a_i) \in K_1 \mid i \in I\} \in \mathcal{R}_P$; если $\forall i, j \in I$ существует $a_i \wedge a_j$, то последнее равносильно следующему: $\forall i > 0, \{a_i \wedge a_j \mid j < i\} \in \tau(C_i)$, где $C_i \in P$. Будем писать $\beta \in \mathcal{R}_P(B)$, если $\beta \in \mathcal{R}_P$ и $\beta \in \tau(B)$.

Нетрудно видеть, что если $Q \wedge L \subset P$, и для всякого $J \subset I$ мощности меньшей, чем I , $[\cup \{B_i \mid i \in J\}]_\tau \in L$, $[B_i]_\tau \in Q$, то $\beta \in \mathcal{R}_P$. В частности, если P подрешетка $K_{D, \tau}$, I не более, чем счетно, $[B_i]_\tau \in P$, то $\beta \in \mathcal{R}_P$.

Пусть K, L — множества, $\alpha = \{a_i \in K \mid i \in I\}$, $b \in K$. Через $\alpha \cup b$ будем обозначать семейство $\beta = \{a_i, b \mid i \in I\}$, причем если множество I упорядоченно, то множеством индексов β будем считать $I \cup \{-1\}$, где $-1 < i \forall i \in I$; $\alpha \subset L$ означает $a_i \in L \forall i \in I$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть (K, τ) сайт, K — ч.у.м., $D \in \text{Ob}(\widehat{K})$, $L, M \subset K_{D, \tau}$, $\mathcal{U} = \{(A, B) \mid A \in M, B \in L, B \subset A\}$, и дана точная последовательность $(*)$ абелевых τ -пучков на K : $0 \rightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{u} \mathcal{B} \xrightarrow{v} \mathcal{C} \rightarrow 0$.

1. Если $E \in K_D$, семейства $\beta \in \mathcal{R}_L(E)$, вписанные в M образуют конфинальную систему τ -покрытий E , и в последовательности $(*)$ $\mathcal{A}$ — $\mathcal{U}$ -вялый τ -пучок, то последовательность $0 \rightarrow \text{Hom}_{\widehat{K}}(E, \mathcal{A}) \rightarrow \text{Hom}_{\widehat{K}}(E, \mathcal{B}) \rightarrow \text{Hom}_{\widehat{K}}(E, \mathcal{C}) \rightarrow 0$ точна.

2. Пусть для каждого $H \in L$, вписанного в M , семейства $\beta \in \mathcal{R}_L(H)$, вписанные в M , образуют конфинальную систему τ -покрытий H . Тогда

- а) Если $E \in K_D$ и семейства класса $\mathcal{R}_L(E)$, вписанные в M , образуют конфинальную систему τ -покрытий E , то для любого $\mathcal{U}$ -вялого τ -пучка $\mathcal{D}$, $H_\tau^n(E, \mathcal{D}) = 0 \forall n \geq 1$. В частности, так будет, если имеется $\beta = \{B_i \mid i \in I\} \in \mathcal{R}_L(E)$, β вписано в M , $[B_i]_\tau \in L$, и выполняется соотношение $L \wedge (L \vee L) \subset L$.
- б) Если в последовательности $(*)$ пучки $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — $\mathcal{U}$ -вялые, то и $\mathcal{C}$ — $\mathcal{U}$ -вял.

3. Пусть $E, F \in K_D$, $F \subset E$.

- а) Если существует семейство α подпредпучков E , вписанное в M , такое, что $[\alpha \cap F]_\tau \subset L$, и $\alpha \cup F \in \mathcal{R}_L(E)$, то для всякого $\mathcal{U}$ -вялого пучка $\mathcal{A}$ отображение $\text{Hom}_{\widehat{K}}(E, \mathcal{A}) \rightarrow \text{Hom}_{\widehat{K}}(F, \mathcal{A})$ является эпиморфизмом.
- б) Если в каждое τ -покрытие E вписывается такое семейство $\alpha \prec M$ подпредпучков D , что $\alpha \cup F \in \mathcal{R}_L(E)$, то из того, что пучок $\mathcal{A}$ в последовательности $(*)$ является $\mathcal{U}$ -вялым, следует, что $\forall s \in \text{Hom}_{\widehat{K}}(E, \mathcal{C}), \forall t \in \text{Hom}_{\widehat{K}}(F, \mathcal{B})$, таких, что $v \circ t = s|_F$, имеется такой гомоморфизм $\tilde{t}: E \rightarrow \mathcal{B}$, что $\tilde{t}|_F = t$, $v \circ \tilde{t} = s$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Годаман Р. Гомологическая алгебра и теория пучков. М.: ИЛ, 1961. [2] Скурихин Е. Е. // Матем. вестник. Белград. 1987. Т. 39. С. 65–75, 213–224. [3] Grothendieck A. (with Artin M., Verdier J.-L.) // Lect. Note in Math.. V. 269, 270. P. 1972–1973. [4] Скурихин Е. Е. // Труды МИАН. 1992. Т. 193. С. 169–173. [5] Ситников К. А., Скурихин Е. Е. // Труды МИАН. 1991. Т. 196. С. 156–160. [6] Скурихин Е. Е. Пучковые когомологии и полные брауэровы решетки. Владивосток: Дальнаука, 1993. [7] Bredon G. E. Sheaf Theory. New York, 1967. [8] Кузьминов В. И., Шведов И. А. // Докл. АН СССР. 1976. Т. 231. № 1. С. 24–27.

Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток

Принято редколлегией
22.11.1998