Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Соболевский, О периодических решениях уравнения Гамильтона–Якоби с периодической силой, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 6, 265–266

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm109>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 18:00:22

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИЛОЙ

А. Н. Соболевский

1. Рассмотрим уравнение Гамильтона–Якоби

$$(1) \quad \partial S / \partial t + H_0(\partial S / \partial x) = -U(t, x),$$

где $x \in \mathbb{R}^1$, $U(t, x) \in C^2(\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2)$, а функция $H_0(p) \in C^2(\mathbb{R}^1)$ строго выпукла и суперлинейна: $\lim_{|p| \rightarrow \infty} H_0(p)/|p| = +\infty$. Через $L_0(v)$ обозначим преобразование Лежандра $H_0(p)$.

При $U(t, x) \equiv 0$ уравнение (1) имеет однопараметрическое семейство классических решений $S^a(t, x) = ax - H_0(a)t$. Мы покажем, что в случае общего периодического потенциала $U(t, x)$ при всех $a \in \mathbb{R}$ существуют обобщенные решения уравнения (1), имеющие вид

$$(2) \quad S^a(t, x) = ax - H(a)t + s^a(t, x), \quad s^a(t, x) \in C(\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2).$$

Будет также получено условие единственности решений такого вида.

Обобщенные решения уравнения (1) понимаются как *вязкостные обобщенные решения* [1]. Исследованию при $\nu \rightarrow 0$ периодических решений уравнения $\partial u / \partial t + u \partial u / \partial x = \nu \partial^2 u / \partial x^2 - \partial U / \partial x$, получаемого из (1) при $H_0(p) = p^2/2$ дифференцированием по x , посвящены работы [2], [3]. Результаты настоящей работы справедливы для уравнений более общего вида и позволяют избежать применения метода исчезающей вязкости.

Обобщенное решение задачи Коши для уравнения (1) с начальными данными

$$(3) \quad S_0(x) = ax + s_0(x), \quad s_0(x) \in C(\mathbb{R}^1 / \mathbb{Z}^1),$$

имеет явное представление в виде так называемой *формулы Лакса–Олейник*:

$$(4) \quad S(t, x) = \min_{\xi} (S_0(\xi) + L(0, \xi; t, x)),$$

$$L(s, x; t, y) = \min_{\eta \in W^{1, \infty}[s, t]: \eta(s)=x, \eta(t)=y} \int_s^t (L_0(\dot{\eta}(\tau)) - U(\tau, \eta(\tau))) d\tau.$$

Можно показать, что функция $L(s, x; t, y)$ диагонально периодична:

$$L(s+1, x; t+1, y) = L(s, x+1; t, y+1) = L(s, x; t, y),$$

обладает полугрупповым свойством: $L(s, x; t, y) = \min_{\xi} (L(s, x; \tau, \xi) + L(\tau, \xi; t, y))$ для всех $s < \tau < t$, локально липшицева и допускает оценки

$$-\max U(t, x) \leq \frac{1}{t-s} L(s, x; t, y) - L_0\left(\frac{y-x}{t-s}\right) \leq -\min U(t, x).$$

2. Решение $S(t, x)$ задачи Коши с начальными данными (3) имеет вид $ax + s(t, x)$ с периодической по x функцией $s(t, x)$. Поскольку потенциал периодичен по t , естественно рассматривать $s(t, x)$ в целые моменты времени $n = 1, 2, \dots$. Обозначим $s(n, x) \equiv s_n(x; a, s_0) = \min_{\xi} (s_0(\xi) + L(0, \xi; n, x) - a(x - \xi))$. Из перечисленных свойств функции L вытекает

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Все $s_n(x; a, s_0)$, $n = 1, 2, \dots$, непрерывны по Липшицу как функции x с константой $C(a)$, которая зависит лишь от величины a и свойств $L(s, x; t, y)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть

$$H_n(a) = \max_{x,y} \frac{1}{n} (a(y-x) - L(0, x; n, y)) = \frac{1}{n} \min_x s_n(x; a, 0).$$

Тогда существует такая выпуклая функция $H(a)$, что $|H(a) - H_n(a)| \leq C(a)/n$.

В силу утверждения 1 $\max_x s_n(x; a, 0) - \min_x s_n(x; a, 0) \leq C(a)$. Поэтому при любых целых $n' > n > 0$ справедливо неравенство $|n' H_{n'}(a) - n H_n(a) - (n' - n) H_{n'-n}(a)| \leq C(a)$, из которого следует утверждение теоремы.

Всякое решение уравнения (1) вида (2) является решением задачи Коши с начальной функцией $S_0^a(x) = ax + s^a(0, x) \equiv ax + s_0^a(x)$ вида (3) и, вследствие (4), решением функционального уравнения

$$(5) \quad \min_{\xi} (s_0^a(\xi) + L(0, \xi; 1, x) - a(x - \xi)) = s_0^a(x) - H(a).$$

Обратно, всякая начальная функция $s_0(x)$, удовлетворяющая (5), определяет решение уравнения (1) вида (2).

При любых $a \in \mathbb{R}$, $s_0(x) \in C^0(\mathbb{R}^1/\mathbb{Z}^1)$ неубывающая последовательность функций $\bar{s}_n^a(x) = \inf_{m \geq n} (s_m(x; a, s_0) + mH(a))$ ограничена сверху по теореме 1 и потому имеет предел $s^a(x)$. Поскольку $\min_{\xi} (\bar{s}_n^a(\xi) + L(0, \xi; 1, x) - a(x - \xi)) = \bar{s}_{n+1}^a(x) - H(a)$, функция $s^a(x)$ удовлетворяет (5). Если в (3) положить $s_0(x) = s^a(x)$, откуда следует

ТЕОРЕМА 2. При любом $a \in \mathbb{R}$ уравнение (1) имеет решение вида (2).

3. Любой функции $s^a(x) \in C(\mathbb{R}^1/\mathbb{Z}^1)$, являющейся решением (5), сопоставим многозначное отображение $T: x \mapsto \arg \min_{\xi} (s^a(\xi) + L(0, \xi; 1, x) - a(x - \xi))$. Справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Отображение T сохраняет циклический порядок на окружности $S^1 \equiv \mathbb{R}^1/\mathbb{Z}^1$. Последовательность множеств $M_n = T^n S^1$ не возрастает по включению и имеет непустое замкнутое пересечение $M = \bigcap_{n=1}^{\infty} T^n S^1 \subseteq S^1$. На M отображение T является гомеоморфизмом в индуцированной топологии и имеет число вращения $\omega(a)$. Для любой окрестности U множества M $T^n S^1 \subset U$ при достаточно больших n .

Пользуясь теорией Обри–Мезера [4], [5], можно показать, что при иррациональном $\omega(a)$ множество M совпадает с замыканием траектории $\{T^n x, n = 1, 2, \dots\}$ любой точки $x \in M$, т.е. является минимальным инвариантным множеством этого отображения. Если $s_1^a(x)$ и $s_2^a(x)$ — два решения (5), T_i — соответствующие отображения, а M_i — их инвариантные множества, $i = 1, 2$, то в силу (5) $s_1^a(y) - s_2^a(y) \leq s_1^a(x) - s_2^a(x)$ для любых $x, y \in T_1 x$. Пользуясь минимальностью множества M_1 , откуда можно вывести, что $M_1 = M_2$ и на этом множестве разность $s_1^a(x) - s_2^a(x)$ постоянна. Примем ее равной 0, так как решение (5) определено с точностью до аддитивной константы. Тогда из утверждения 2 можно вывести, что $s_1^a(x) \geq s_2^a(x)$. Противоположное неравенство доказывается аналогично, так что $s_1^a(x) = s_2^a(x)$. Отсюда следует

ТЕОРЕМА 3. Если $\omega(a)$ иррационально, то уравнение (1) имеет единственное решение вида (2) с точностью до аддитивной константы.

Автор признателен Я. Г. Синаю за постановку задачи и интерес к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Crandall M., Lions P. L. // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. V. 277. №1. P. 1–42.
 [2] Jauslin H. R., Kreiss H. O., Moser J. On the forced Burgers equation with periodic boundary conditions // Preprint, 1997. [3] Sinai Ya. G. Parabolic perturbations of Hamilton–Jacobi equations // Fund. Math. 1998 (to appear). [4] Aubry S., Le Daeron P. Y. // Physica D. 1983. V. 8. P. 381–422. [5] Bangert V. // Dynamics Reported. 1988. V. 1. P. 1–45.

Московский государственный
 университет им. М. В. Ломоносова
 E-mail: ans@srdlan.npi.msu.su

Принято редколлегией
 02.09.1998