Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Бухштабер, Н. Рай, Торические многообразия и комплексные кобордизмы,
УМН, 1998, том 53, выпуск 2, 139–140

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm11>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 17:04:43

ТОРИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ И КОМПЛЕКСНЫЕ КОВОРДИЗМЫ

В. М. БУХШТАБЕР, Н. РАЙ

Основным результатом настоящей работы является:

ТЕОРЕМА 1. *В классе комплексных кобордизмов любого стабильно комплексного замкнутого многообразия M^{2n} содержится торическое многообразие.*

Напомним, что n -мерный выпуклый полиэдр P^n называется простым, если в каждой его вершине сходится ровно n граней коразмерности 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. (Детали см. в [1]) Гладкое $2n$ -мерное многообразие M^{2n} называется торическим, если на нем задано действие n -мерного компактного тора $T^n \subset \mathbb{C}^n$, которое локально изоморфно стандартному действию T^n на $\mathbb{C}^n$ и индуцирует на пространстве орбит M^{2n}/T^n комбинаторную структуру простого полиэдра P^n .

Прямое произведение торических многообразий $M_1^{2n_1}$ и $M_2^{2n_2}$ является торическим многообразием. Эquivариантная связная сумма в окрестностях неподвижных точек торических многообразий $M_1^{2n_1}$ и $M_2^{2n_2}$ дает торическое многообразие.

Следовательно, для доказательства теоремы 1 достаточно указать набор торических многообразий, дающий все мультипликативные образующие кольца комплексных кобордизмов $\Omega_U = \mathbb{Z}[a_1, \dots, a_k, \dots]$, $\deg a_k = 2k$ ([2], [3], детали см. в [4]). Класс кобордизмов стабильно комплексного многообразия M^{2k} может быть взят в качестве мультипликативного образующего кольца Ω_U тогда и только тогда, когда его старшее число Чженя $s_k[M^{2k}]$ равно $\pm m(k+1)$, где $m(q) = p$, если $q = p^s$ для некоторого простого p и $m(q) = 1$ в остальных случаях.

Обычный набор образующих дают многообразия Милнора $H_{i,j}$ с $s_k[H_{i,j}] = \binom{i+j}{i}$, $i+j = k+1$, где $H_{i,j} = \{(u_1, \dots, u_{i+1}) \times (v_1, \dots, v_{j+1}) \in \mathbb{C}P(i) \times \mathbb{C}P(j) : \sum_{q=1}^{i+1} u_q v_q = 0, i \leq j\}$.

Фиксируем в $\mathbb{C}^{j+1}$ ортонормированный базис $e_1, \dots, e_{j+1}$ и отождествим $\mathbb{C}^{i+1}$ с подпространством, натянутым на вектора $e_1, \dots, e_{i+1}$. Пусть $\eta \rightarrow \mathbb{C}P(i)$ тавтологическое комплексное линейное расслоение. Многообразие $H_{i,j}$ гомеоморфно пространству $\mathbb{C}P(\zeta)$ проективизации расслоения $\zeta \rightarrow \mathbb{C}P(i)$, такого что $\zeta + \eta$ — тривиальное $(j+1)$ -мерное комплексное расслоение над $\mathbb{C}P(i)$, соответствующее вложению $\mathbb{C}^{i+1} \subset \mathbb{C}^{j+1}$ (см. [5]). Следовательно, имеет место

ЛЕММА 3. $H^*(H_{i,j}) = \mathbb{Z}[x, y]/(x^{i+1}; \sum_{q=0}^j x^q y^{j-q})$, $j \geq i \geq 0$, где $\deg x = \deg y = 2$.

Здесь и далее речь идет о кольцах целочисленных когомологий.

В [1] для любого торического многообразия M^{2n} дано полное описание кольца $H^*(M^{2n})$ в терминах полиэдра P^n и так называемой характеристической функции действия T^n на M^{2n} . Из этого результата легко извлекается

ЛЕММА 4. *Если многообразие M^{2n} является торическим, то $H^*(M^{2n}) = \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_s]/J$, где $s = \text{rank } H^2(M^{2n})$, $\deg t_q = 2$, $q = 1, \dots, s$ и J — идеал, порожденный полиномами степени больше 2, каждый из которых раскладывается в произведение линейных форм от $t_1, \dots, t_s$ с целыми коэффициентами.*

Сопоставляя утверждения лемм 3 и 4, получаем следующий результат:

ЛЕММА 5. *Многообразия $H_{i,j}$ при $j \geq i \geq 2$ не являются торическими.*

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы 1.

ЛЕММА 6. *Пусть $f: M_1^{2i} \rightarrow M_2^{2i}$ — отображение степени 1 стабильно комплексных многообразий и $\zeta \rightarrow M_2^{2i}$ — некоторое j -мерное комплексное векторное расслоение. Тогда*

$$s_{i+j-1}[\mathbb{C}P(f^*\zeta)] = s_{i+j-1}[\mathbb{C}P(\zeta)].$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта Royal Society Joint Projects with CEE/FSU и Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-01-01404).

Далее нам потребуются следующие результаты из [6]. Пусть $e_1, e_2, \dots$ – выбранный базис в $\mathbb{C}^{i+1}$. Флаг $\mathcal{V} = \{0 = V^0 \subset V^1 \subset \dots \subset V^k \subset \dots \subset V^{i+1} = \mathbb{C}^{i+1}\}$ называется ограниченным, если вектора $e_1, \dots, e_k$ содержатся в V^{k+1} для всех $k = 1, \dots, i$. Множество всех ограниченных флагов в $\mathbb{C}^{i+1}$ является $2i$ -мерным стабильно комплексным многообразием B_i . Отображение $f: B_i \rightarrow \mathbb{C}P(i): f(\mathcal{V}) = V^1 \subset \mathbb{C}^{i+1}$ имеет степень 1.

Пусть $S^3(i) = S^3 \times \dots \times S^3 = \{(x_k, y_k) \in \mathbb{C}^2, k = 1, \dots, i: |x_k|^2 + |y_k|^2 = 1\}$. Стандартное действие тора T^2 на $\mathbb{C}^2$ дает действие T^{2i} на $S^3(i)$, называемое также стандартным. Определим для каждой точки из $S^3(i)$ последовательность векторов $v_1, \dots, v_{i+1}$, где $v_{i+1} = e_{i+1}$ и $v_k = x_k e_k + y_k v_{k+1}$, $k = i, \dots, 1$. Получаем гладкое отображение $\varphi: S^3(i) \rightarrow B_i: \varphi((x_k, y_k)) = \mathcal{V} = (V^k)$, где V^k – подпространство, натянутое на вектора $e_1, \dots, e_{k-1}, v_k$.

Стандартное действие тора T^{i+1} на $\mathbb{C}^{i+1}$ индуцирует действие T^i на B_i , относительно которого B_i является торическим. Пусть $g = ((t_k, s_k)) \in T^{2i} = T^2 \times \dots \times T^2$. Рассмотрим гомоморфизм $\lambda: T^{2i} \rightarrow T^i: \lambda(g) = (t_k \bar{p}_k)$, где $p_i = s_i$ и $p_k = s_k p_{k+1}$, $k = (i-1), \dots, 1$. Непосредственная проверка показывает, что $\lambda(g)\varphi(a) = \varphi(g(a))$, где $a \in S^3(i)$. Пусть $\lambda_1: T^i \rightarrow T^{2i}: \lambda_1((p_k)) = ((p_k, p_k \bar{p}_{k+1}))$. Тогда $\text{im } \lambda_1 = \ker \lambda$. Далее, введем гомоморфизм $\lambda_2: T^i \rightarrow T^j$, $j \geq i: \lambda_2((p_k)) = ((p_k \bar{p}_{k+1}))$, где $p_k = 1$, если $k \geq i+1$. Определим теперь векторное расслоение:

$$\xi(i, j) = S^3(i) \times_{T^i} \mathbb{C}^j \longrightarrow B_i = S^3(i) \times_{T^i} (\text{точка}),$$

где действие T^i на $S^3(i)$ задается гомоморфизмом λ_1 , а на $\mathbb{C}^j$ – гомоморфизмом λ_2 .

Непосредственная проверка показывает, что:

1) Стандартное действие тора $T^{2i} \times T^j$ на $S^3(i) \times \mathbb{C}^j$ дает действие тора $T^i \times T^{j-1}$ на пространстве $B_{i,j} = \mathbb{C}P(\xi(i, j))$ проективизации расслоения $\xi(i, j)$. Это действие локально изоморфно стандартному действию тора T^{i+j-1} на $\mathbb{C}^{i+j-1}$.

2) Отображение $\psi: S^3(i) \times S^{2j-1} \rightarrow I^i \times \Delta^{j-1}: \psi((x_k, y_k), (u_1, \dots, u_j)) = (|x_k|^2, k = 1, \dots, i; |u_q|^2, q = 1, \dots, j)$ определяет проекцию на пространство орбит: $B_{i,j} \rightarrow B_{i,j}/T^{i+j-1} \simeq I^i \times \Delta^{j-1}$, $j \geq i \geq 0$, где I^i – i -мерный куб и Δ^{j-1} – стандартный $(j-1)$ -мерный симплекс.

3) Пусть $\zeta \rightarrow \mathbb{C}P(i)$ и $f: B_i \rightarrow \mathbb{C}P(i)$ – введенные выше расслоение и отображение. Тогда $f^*\zeta = \xi(i, j)$ и, следовательно, $B_{i,j} = \mathbb{C}P(f^*\zeta)$. Таким образом, мы построили семейство торических многообразий $B_{i,j}$, дающее, согласно лемме 6, все мультипликативные образующие кольца Ω_U . Теорема 1 доказана.

В дополнение к лемме 5 заметим, что $H_{0,j} = B_{0,j} = \mathbb{C}P(j-1)$; $H_{1,j} = B_{1,j}$ – торические многообразия.

Аналогично доказывается

ТЕОРЕМА 7. *В классе неориентированных кобордизмов любого гладкого замкнутого многообразия M^n содержится $\mathbb{Z}_2^n$ -многообразие, являющееся разветвленным накрытием над простым полиэдром P^n .*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. Davis, T. Januszkiewicz // Duke Math. J. 1991. V. 62. № 2. P. 417–451. [2] J. Milnor // Amer. J. Math. 1960. V. 82. P. 505–521. [3] С.П. Новиков // Матем. сборник 1962. Т. 57 (99). С. 406–442. [4] Р. Стонг Заметки по теории кобордизмов. М.: Мир, 1973. [5] S. Ochanine // Topology 1987. V. 26. P. 143–151. [6] V. M. Buchstaber, N. Ray. Double cobordisms, flag manifolds and quantum doubles, Preprint: Manchester Centre for Pure Mathematics, 1996/18.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова;
Department of Mathematics, University of Manchester,
Manchester M13 9PL, England
E-mail: buchstab@nw.math.msu.su; nige@ma.man.ac.uk

Принято редколлегией
22.01.1998