Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. П. Суетин, Асимптотика полиномов Ахиезера и равномерная сходимость аппроксимаций Паде для гиперэллиптических функций, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 6, 267–268

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm110>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 12:55:40

АСИМПТОТИКА ПОЛИНОМОВ АХИЕЗЕРА И РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ АППРОКСИМАЦИЙ ПАДЕ ДЛЯ ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

С. П. СУЕТИН

1. В [1] Н. И. Ахиезер ввел класс полиномов, ортогональных на системе непересекающихся отрезков $E = [-1, 1] \setminus \bigcup_{j=1}^g (\alpha_j, \beta_j)$, $-1 < \alpha_1 < \beta_1 < \dots < \alpha_g < \beta_g < 1$, вещественной оси $\mathbb{R}$ относительно весов следующих двух видов: $P(x)/t(x)\sqrt{Q(x)}$, $\sqrt{Q(x)}/t(x)P(x)$, функция $t(x)$ непрерывна и положительна на E , $P(x) = \prod_{j=1}^g (x - \alpha_j)$, $Q(x) = (x^2 - 1) \prod_{j=1}^g (x - \alpha_j) \times (x - \beta_j)$; выбирается та ветвь корня $\sqrt{Q(z)}$ в $\mathbb{C} \setminus E$, которая положительна на верхнем берегу разреза $(\beta_g, 1)$, $\sqrt{Q(x)} = \sqrt{Q(x + i0)}$, $x \in E$. Ортогональные полиномы относительно таких весов будем обозначать соответственно $T_n(x; t) = x^n + \dots$ и $U_n(x; t) = x^n + \dots$. Ахиезер показал [1], что для случая $t(x) = p(x)$ — произвольный полином четной степени с вещественными коэффициентами, положительный на E ($p \in \mathbb{R}[x]$) задача *нахождения* пары полиномов $T_n(x; p)$, $U_{n-1}(x; p)$ эквивалентна задаче “построения” некоторой функции (*функции Ахиезера*) A_n , мероморфной (рациональной по z и w) на гиперэллиптической римановой поверхности $\mathfrak{R}$ алгебраической функции $w^2 = Q(z)$, с заранее предписанным расположением $n + g$ полюсов и n нулей. Этими условиями оставшиеся g “свободных” нулей функции Ахиезера на $\mathfrak{R}$ определяются однозначно, а сама эта функция — однозначно с точностью до постоянного множителя.

Ахиезер получил некоторые соотношения, устанавливающие связь между ортогональными полиномами для $t(x) = p_1(x)$ и $t(x) = p_2(x)$, $p_1, p_2 \in \mathbb{R}[x]$, аналогичные классическим соотношениям С. Н. Бернштейна [2, 42, §7] для случая одного интервала $E = [-1, 1]$. Вопрос об асимптотике полиномов Ахиезера *вне множества* E им не рассматривался даже для случая $t(x) \equiv 1$. Натолчком [3] в связи с исследованием сходимости аппроксимаций Паде и Эрмита–Паде определенных классов функций были получены некоторые результаты об асимптотике полиномов, аналогичных полиномам Ахиезера. Однако при этом заранее предполагалось, что функция типа функции Ахиезера обладает определенными свойствами. Видом [4] получили асимптотические формулы для полиномов, *эрмитово* ортогональных относительно неотрицательных весов достаточно общего вида на системе контуров и дуг, расположенных в комплексной плоскости. Из результатов Видома вытекает следующая асимптотическая формула для полиномов Ахиезера вне множества E [4, с. 220]: $T_n(z; p) = C(E)^n \Phi(z)^n (F_n(z) + o(1))$, где $C(E)$ — (логарифмическая) емкость E , $\Phi(z) = \exp\{G(z, \infty)\}$, $G(z, \infty)$ — (многозначная) комплексная функция Грина множества E , $F_n(z)$ — многозначная аналитическая вне E функция, являющаяся решением некоторой экстремальной граничной задачи и, вообще говоря, имеющая нули ($\leq g$) вне E . Вопрос об асимптотическом поведении нулей функции F_n Видом оставил открытым [4, с. 232].

Одним из основных результатов настоящей заметки является утверждение о том, что в “*общем положении*” для любого $p \in \mathbb{R}[x]$ существует подпоследовательность $\Lambda = \Lambda(p) \subset \mathbb{N}$, по которой функции F_n не имеют нулей вне E , все нули полиномов $U_{n-1}(z; p)$ и $T_n(z; p)$ “*стягиваются*” к E , а сами эти полиномы в $D = \mathbb{C} \setminus E$ имеют *асимптотику*. Этот результат является частным случаем утверждения о *существовании* (в “общем положении”) *равномерно сходящейся внутри D подпоследовательности аппроксимаций Паде* $[n - 1/n](z)$ для некоторых классов гиперэллиптических функций.

2. Пусть $b_1, b_2, \dots, b_{2g+2}$ — произвольные попарно различные точки комплексной плоскости $\mathbb{C}$, находящиеся в “общем положении” (см. ниже); $Q(z) = \prod_{j=1}^{2g+2} (z - b_j)$, $P(z) = z^g + \dots$ — полином степени g , все g нулей которого — простые и лежат среди точек $\{b_j\}$. Для голоморфной в окрестности бесконечно удаленной точки $z = \infty$ функции $f(z) = P(z)/\sqrt{Q(z)}$, где ветвь корня выбрана так, что $zf(z) \rightarrow 1$ при $z \rightarrow \infty$, рассмотрим последовательность *аппроксимаций Паде* $[n - 1/n]_f(z)$ типа $(n - 1, n)$, $n \in \mathbb{N}$. Рациональная функция $[n - 1/n]_f(z)$ равна отношению $-P_{1,n}(z; f)/P_{2,n}(z; f)$ полиномов $P_{1,n}, P_{2,n} \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P_{1,n} \leq n - 1$, $\deg P_{2,n} \leq n$,

$P_{2,n} \neq 0$, таких, что $P_{1,n}(z; f) + P_{2,n}(z; f)f(z) = \mathcal{O}(z^{-n-1})$ при $z \rightarrow \infty$. Для случая, когда все b_j принадлежат отрезку $[-1, 1]$, имеем $P_{2,n}(z) = T_n(z; 1)$, $P_{1,n}(z) = -U_{n-1}(z; 1)$.

Из теоремы Г. Штала [5] о сходимости диагональных и близких к ним аппроксимаций Паде алгебраических функций по (логарифмической) емкости вытекает, что $[n - 1/n]_f(z) \xrightarrow{\text{cap}} f(z)$ равномерно внутри области D , допускающей выделение однозначной ветви функции $f(z)$, граница ∂D которой: содержит все точки $\{b_j\}$, состоит из конечного числа аналитических дуг (“разрезов”) и имеет минимальную емкость среди границ всех таких областей. Будем считать, что выполнено первое условие “общего положения” точек $\{b_j\}$: граница ∂D состоит ровно из $g + 1$ (непересекающихся) аналитических дуг (“разрезов”) ℓ_j , $\partial D = \bigcup_{j=1}^{g+1} \ell_j$; для классического случая полиномов Ахиезера это условие заведомо выполняется.

Функция $f(z) = P(z)/w(z)$ является (однозначной) мероморфной функцией на римановой поверхности $\mathfrak{R}$ гиперэллиптической функции $w = w(z)$, $w^2 = Q(z)$, а функция Ахиезера для обсуждаемого в этом пункте случая ($t(x) \equiv 1$) выражается непосредственно через функцию $R_n(z) = P_{1,n}(z) + P_{2,n}(z)f(z)$ следующим образом: $A_n(z) = R_n(z)/f(z)$.

Изучение асимптотики полиномов Ахиезера $P_{1,n}$ и $P_{2,n}$ тесно связано с исследованием поведения g “свободных” нулей функции $R_n(z)$. Хорошо известно [6], что эта задача сводится к решению проблемы Якоби обращения абелевых интегралов. Требуемое исследование поведения этих нулей функции $R_n(z)$ удастся провести с помощью конструктивного подхода к решению проблемы обращения Якоби, основанному на использовании η -функции Римана [7].

3. Положим $v_k = \int_{b_1}^{\infty} z^{k-1} dz/w(z)$, $k = 1, \dots, g$. Пусть $E = \partial D$ – описанный выше компакт минимальной емкости, полином $p \in \mathbb{C}[z]$ отличен от нуля на E и

$$(*) \quad f(z) = \frac{1}{\pi i} \int_E \frac{1}{z-t} \frac{dt}{p(t)w^+(t)},$$

где $w^+(t)$ – граничные значения функции $w(z)$ на ориентированных кривых, составляющих E .

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнено первое условие “общего положения” и, кроме того, величины $\operatorname{Re} v_k$, $\operatorname{Im} v_k$, $k = 1, \dots, g$, линейно независимы с единицей над полем рациональных чисел. Тогда для любой функции $f(z)$ вида (*) существует подпоследовательность $\Lambda = \Lambda(p) \subset \mathbb{N}$ такая, что при $n \in \Lambda$ все нули полиномов $P_{2,n}(z; f)$ “стягиваются” к E и равномерно внутри D

$$P_{2,n}(z; f) = C(E)^n \Phi(z)^n F_n(z)(1 + o(1)), \quad [n - 1/n]_f(z) = f(z)(1 + o(1)),$$

где $F_n(z)$ – некоторая многозначная функция, голоморфная вне E , модуль которой однозначен, отличен от нуля и ограничен равномерно по n .

Следующая теорема уточняет результат Видома для случая полиномов Ахиезера.

ТЕОРЕМА 2. Если гармонические меры отрезков, составляющих E , $\omega_k(\infty)$, $k = 1, \dots, g$, линейно независимы с единицей над полем рациональных чисел, то для любого $p \in \mathbb{R}[x]$ существует подпоследовательность $\Lambda = \Lambda(p) \subset \mathbb{N}$ такая, что при $n \in \Lambda$ все нули полиномов $T_n(z; p)$ “стягиваются” к E и равномерно внутри D

$$T_n(z; p) = C(E)^n \Phi(z)^n F_n(z)(1 + o(1)),$$

где $F_n(z)$ имеет тот же смысл, что и в теореме 1.

Теоремы 1 и 2 справедливы и при замене в (*) $1/p(t)$ на достаточно гладкую функцию $h(t) \neq 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ахиезер Н. И. // Докл. АН СССР. 1960. Т. 134. № 1. С. 9–12. [2] Бернштейн С. Н. Собрание сочинений. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1952. [3] Nuttall J. // J. Approx. Theory. 1984. V. 42. P. 299–386. [4] Widom H. // Adv. Math. 1969. V. 3. № 2. P. 127–232. [5] Stahl H. // Constr. Approx. 1986. V. 2. P. 225–240, 241–251. [6] Ахиезер Н. И. // Докл. АН СССР. 1961. Т. 141. № 2. С. 263–266. [7] Дубровин Б. А. // УМН. 1981. Т. 36. № 2. С. 11–80.