Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. И. Богоявленский, Кольцо когомологий для гладких отображений, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 1, 11–20

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm115>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 15:09:12

УДК 514.747

КОЛЬЦО КОГОМОЛОГИЙ ДЛЯ ГЛАДКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

О. И. Богоявленский

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. A - B - C -когомологии для динамических систем	11
§ 2. Кольцо B -когомологий для гладких отображений	12
§ 3. B -когомологии твист-отображений	15
§ 4. Инвариантный смысл условия невырожденности	19
Список литературы	20

§ 1. A - B - C -когомологии для динамических систем

I. Напомним конструкцию A - B - C -когомологий динамических систем, введенных в наших работах [3]–[6]. Пусть Λ_V^m – линейное пространство гладких дифференциальных m -форм на многообразии M^n , которые являются инвариантными по отношению к некоторой гладкой динамической системе V

$$(1.1) \quad \dot{x}^i = V^i(x^1, \dots, x^n)$$

на многообразии M^n . Оператор внутреннего произведения i_V и оператор внешнего дифференцирования d действуют на V -инвариантных дифференциальных формах. Любая V -инвариантная m -форма ω_m удовлетворяет уравнению $L_V \omega_m = 0$, где $L_V = i_V \circ d + d \circ i_V$ есть оператор Ли-дифференцирования. Поэтому операторы i_V и d удовлетворяют уравнениям

$$(1.2) \quad i_V^2 = 0, \quad d^2 = 0, \quad i_V \circ d = -d \circ i_V$$

на линейном пространстве V -инвариантных дифференциальных форм. Вследствие уравнений (1.2) оператор $d_V = i_V \circ d = -d \circ i_V$ удовлетворяет уравнениям

$$(1.3) \quad d_V^2 = 0, \quad d_V \circ i_V = i_V \circ d_V = 0, \quad d_V \circ d = d \circ d_V = 0.$$

Линейные пространства Λ_V^m V -инвариантных дифференциальных m -форм с тремя операторами i_V , d и $d_V = i_V \circ d$ образуют A -, B - и C -комплексы соответственно

$$\begin{aligned} A: \quad 0 &\longleftarrow \Lambda_f^0 \xleftarrow{i_V} \Lambda_f^1 \xleftarrow{i_V} \dots \xleftarrow{i_V} \Lambda_f^{n-1} \xleftarrow{i_V} \Lambda_f^n \longleftarrow 0, \\ B: \quad 0 &\longrightarrow \Lambda_f^0 \xrightarrow{d} \Lambda_f^1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Lambda_f^{n-1} \xrightarrow{d} \Lambda_f^n \longrightarrow 0, \\ C: \quad &\xrightarrow{d_V} \Lambda_f^m \xrightarrow{d_V} \Lambda_f^m \xrightarrow{d_V} \Lambda_f^m \xrightarrow{d_V} \dots \end{aligned}$$

II. Линейные пространства $H_A^*(V, M^n)$, $H_B^*(V, M^n)$ и $H_C^*(V, M^n)$ являются когомологиями по отношению к операторам i_V , d и d_V соответственно:

$$(1.4) \quad \begin{aligned} H_A^*(V, M^n) &= \text{Ker } i_V / \text{Im } i_V, & H_B^*(V, M^n) &= \text{Ker } d / \text{Im } d, \\ H_C^*(V, M^n) &= \text{Ker } d_V / \text{Im } d_V. \end{aligned}$$

Фактор-пространства $H_A^*(V, M^n)$ и $H_B^*(V, M^n)$ (1.4) наследуют кольцевую структуру, определенную внешним произведением V -инвариантных дифференциальных форм, поскольку операторы i_V и d являются косыми дифференцированиями. Оператор $d_V = i_V \circ d$ не является дифференцированием. Поэтому линейные пространства $H_C^*(V, M^n)$ имеют только групповую структуру.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. A -когомологии $H_A^*(V, M^n)$ образуют дифференциальный комплекс по отношению к оператору d . B -когомологии $H_B^*(V, M^n)$ образуют дифференциальный комплекс по отношению к оператору i_V . C -когомологии $H_C^*(V, M^n)$ образуют два дифференциальных комплекса по отношению к операторам i_V и d . Когомологии всех этих дифференциальных комплексов являются дополнительными инвариантами динамической системы V .

§ 2. Кольцо B -когомологий для гладких отображений

I. В предыдущем параграфе мы ввели A - B - C -когомологии для динамических систем. Среди них только B -когомологии имеют аналоги для дискретных динамических систем. Пусть f — некоторое гладкое отображение многообразия M^n в себя. Пусть Λ_f^q означает линейное пространство f -инвариантных k -форм ω_q : $f^*\omega_q = \omega_q$. Рассмотрим дифференциальный комплекс f -инвариантных дифференциальных форм

$$0 \longrightarrow \Lambda_f^0 \xrightarrow{d} \Lambda_f^1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Lambda_f^{n-1} \xrightarrow{d} \Lambda_f^n \longrightarrow 0.$$

Мы определяем B -когомологии гладкого отображения f формулой

$$H_B^*(f, M^n) = \text{Ker } d / \text{Im } d.$$

Внешнее произведение f -инвариантных дифференциальных форм индуцирует кольцевую структуру в когомологиях $H_B^*(f, M^n)$.

Пусть диффеоморфизм f_τ является сдвигом на время τ вдоль траекторий динамической системы V . В этом случае определен кольцевой гомоморфизм

$$H_B^*(V, M^n) \rightarrow H_B^*(f_\tau, M^n).$$

Для многих динамических систем V этот гомоморфизм становится изоморфизмом при $\tau \rightarrow 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Представленные конструкции показывают, что B -когомологии гладких отображений f и A - B - C -когомологии динамических систем V отличаются от когомологического уравнения $R(f(x)) - R(x) = G(x)$, которое было введено Гильбертом [10] и исследовано Колмогоровым [12], см. также [11].

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В работе [6] мы показали, что любая группа G симметрий динамической системы V обладает линейными представлениями в A - B - C -когомологиях. Аналогично, любая группа Γ диффеоморфизмов многообразия M^n , которые коммутируют с гладким отображением $f: M^n \rightarrow M^n$, имеет линейные представления в когомологиях $H_B^m(f, M^n)$, $m = 1, \dots, n$.

II. Существует кольцевой гомоморфизм

$$\alpha: H_B^*(f, M^n) \rightarrow H^*(M^n),$$

который преобразует B -когомологический класс f -инвариантных замкнутых q -форм в соответствующий класс когомологий де-Рама общих замкнутых q -форм.

Гомоморфизм α имеет обратный и поэтому является изоморфизмом для следующих диффеоморфизмов f :

1) Предположим, что диффеоморфизм $f: M^n \rightarrow M^n$ гомотопен тождественному отображению и является периодическим с периодом p . Отображения

$$(2.1) \quad f^m: M^n \rightarrow M^n, \quad f^p = \text{id}$$

определяют действие циклической группы $\mathbb{Z}_p$. Для любой замкнутой q -формы ω_q мы определяем q -форму

$$\alpha^{-1}\omega_q = \frac{1}{p} \sum_{m=1}^p (f^m)^*(\omega_q).$$

Очевидно, что q -форма $\alpha^{-1}\omega_q$ является замкнутой и инвариантной по отношению к диффеоморфизму f ; q -форма $\alpha^{-1}\omega_q$ принадлежит тому же классу когомологий де-Рама в $H^q(M^n)$, что и замкнутая q -форма ω_q , поскольку q -формы $(f^m)^*(\omega_q)$ когомологичны ω_q при всех m , так как отображение f гомотопно тождественному отображению. Поэтому $\alpha \circ \alpha^{-1} = \text{id}$ в $H^q(M^n)$ и, следовательно, отображение α является изоморфизмом.

2) Пусть $M^n = X^{n-k} \times \mathbb{T}^k$, где X^{n-k} — некоторое гладкое $(n-k)$ -мерное многообразие с атласом локальных координат $x^1, \dots, x^n$ и $\mathbb{T}^k$ есть k -мерный тор с угловыми координатами $\varphi_1, \dots, \varphi_k$. Рассмотрим диффеоморфизм

$$(2.2) \quad f: (x^i, \varphi_j) \rightarrow (x^i, \varphi_j + a_j)$$

многообразия M^n в себя. Здесь $a_1, \dots, a_k$ — произвольные рационально независимые постоянные.

Пусть $g(x, \varphi)$ — произвольная гладкая функция на M^n . Диффеоморфизм f (2.2) тора $\mathbb{T}^k$ в себя является эргодическим, если константы $a_1, \dots, a_k$ рационально независимы [1], [2], [9]. Отсюда мы получаем

$$\overline{g(x)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N g(x^i, \varphi_j + ma_j) = \frac{1}{(2\pi)^k} \int_{\mathbb{T}^k} g(x, \varphi) d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_k.$$

Пусть ω_q — произвольная замкнутая q -форма

$$\omega_q = \sum_{\ell+m=q} \sum_{i,j} a_{i,j}(x, \varphi) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_\ell} \wedge d\varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{j_m}$$

на многообразии M^n . Для всех диффеоморфизмов

$$f^m: (x^i, \varphi_j) \rightarrow (x^i, \varphi_j + ma_j),$$

дифференциалы $d(f^m)$ являются тождественными отображениями касательных пространств $T_{(x,\varphi)}(X^{n-k} \times \mathbb{T}^k)$. Используя этот факт, мы получаем равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N (f^m)^*(\omega_q) = \sum_{\ell+m=q} \sum_{i,j} \overline{a_{i,j}(x)} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_\ell} \wedge d\varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{j_m}.$$

Мы определяем

$$\alpha^{-1}\omega_q = \overline{\omega}_q = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N (f^m)^*(\omega_q).$$

Очевидно, что q -форма $\overline{\omega}_q$ является замкнутой и инвариантной по отношению к диффеоморфизму (2.2). Очевидно, что $\alpha^{-1} \circ \alpha = \text{id}$. Построенная f -инвариантная замкнутая q -форма $\overline{\omega}_q$ принадлежит тому же классу когомологий де-Рама в $H^q(M^n)$, что и замкнутая q -форма ω_q . Действительно, q -формы $(f^m)^*(\omega_q)$ когомологичны ω_q при всех m , поскольку диффеоморфизм f (2.2) гомотопен тождественному отображению. Поэтому $\alpha \circ \alpha^{-1} = \text{id}$ в $H^q(M^n)$ и, следовательно, отображение α является изоморфизмом. Таким образом, мы доказали, что отображение α является изоморфизмом двух колец когомологий

$$(2.3) \quad \alpha : H_B^*(f, M^n) = H^*(M^n)$$

для диффеоморфизмов f (2.2) многообразий $M^n = X^{n-k} \times \mathbb{T}^k$ в себя.

III. Пусть $(n+1)$ -мерное многообразие $S_f M^n$ является надстройкой [11] многообразия M^n , соответствующей некоторому диффеоморфизму $f: M^n \rightarrow M^n$. Пусть $t \in [0, 1]$ – “вертикальная” координата на $S_f M^n$, которая определяет векторное поле $V = \partial/\partial t$. Отображение f индуцирует диффеоморфизм f_1 надстройки $S_f M^n$: $f_1(x, t) = (f(x), t)$. Очевидно, что диффеоморфизм f_1 является сдвигом на единицу времени вдоль траекторий векторного поля $V = \partial/\partial t$ на многообразии $S_f M^n$.

Любая f -инвариантная k -форма ω_k на M^n индуцирует V -инвариантную k -форму $E\omega_k$ на $S_f M^n$, которая определена уравнениями $E_t^*(E\omega_k) = \omega_k$, $i_V E\omega_k = 0$, где отображения E_t являются вложениями $E_t: M^n \rightarrow S_f M^n$, где $E_t(x) = (x, t)$.

ТЕОРЕМА 1. Для любого диффеоморфизма $f: M^n \rightarrow M^n$ следующие два кольца когомологий изоморфны:

$$(2.4) \quad H_B^*(V, S_f M^n) = H_B^*(f, M^n) \otimes H^*(S^1).$$

Здесь $H^*(S^1) = \mathbb{R}^1 \oplus \mathbb{R}^1$ есть кольцо когомологий де-Рама окружности S^1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть η_{k+1} – некоторая V -инвариантная $(k+1)$ -форма на $S_f M^n$. V -инвариантность означает, что форма η_{k+1} переходит в себя при сдвиге $f_\tau: t \rightarrow t + \tau$ для любого τ . Поэтому $(k+1)$ -форма η_{k+1} имеет вид

$$(2.5) \quad \eta_{k+1} = dt \wedge E\omega_k + E\omega_{k+1},$$

в открытом цилиндре $I \times M^n$, $0 < t < 1$. Здесь ω_k и ω_{k+1} – некоторые k - и $(k+1)$ -дифференциальные формы на M^n . После сдвига f_1 V -инвариантная $(k+1)$ -форма η_{k+1} преобразуется в себя:

$$f_1^* \eta_{k+1} = dt \wedge E f^* \omega_k + E f^* \omega_{k+1} = \eta_{k+1}.$$

Отсюда мы получаем $f^* \omega_k = \omega_k$, $f^* \omega_{k+1} = \omega_{k+1}$.

Обратно, если две дифференциальные формы ω_k и ω_{k+1} на M^n являются f -инвариантными, то $(k+1)$ -форма η_{k+1} (2.5) корректно определена на многообразии $S_f M^n$ и V -инвариантна. Форма η_{k+1} (2.5) замкнута или точна тогда и только тогда, когда формы ω_k и ω_{k+1} замкнуты или точны. Это заканчивает доказательство изоморфизма (2.4).

IV. Пусть M^{2k} – некоторое симплектическое многообразие с симплектической структурой ω , и пусть $f: M^{2k} \rightarrow M^{2k}$ – эргодический диффеоморфизм общего положения, сохраняющий симплектическую структуру ω . Кольцо B -когомологий для такого диффеоморфизма f общего положения изоморфно фактор-кольцу полиномов от одной переменной u :

$$(2.6) \quad H_B^*(f, M^{2k}) = \mathbb{R}[u]/u^{k+1}\mathbb{R}[u].$$

Образующая $u \in H_B^2(f, M^{2k})$ соответствует f -инвариантной симплектической структуре ω . Отметим, что рассмотренные ранее диффеоморфизмы (2.2) не являются эргодическими. Поэтому соответствующие кольца B -когомологий (2.3) не изоморфны кольцам B -когомологий (2.6).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Изоморфизм (2.3) для “интегрируемых” диффеоморфизмов (2.2) и изоморфизм (2.6) для “неинтегрируемых” эргодических диффеоморфизмов f общего положения показывают, что кольцо когомологий $H_B^*(f, M^n)$ является новым инвариантом, который одновременно характеризует топологические свойства многообразия M^n и глобальные свойства гладкого отображения $f: M^n \rightarrow M^n$.

§ 3. B -когомологии твист-отображений

Пусть многообразие M^{2k} является тороидальной областью $\mathcal{O} = B_a \times \mathbb{T}^k$, где $B_a \subset \mathbb{R}^k$ – шар

$$B_a : \sum_{j=1}^k (I_j - I_{j0})^2 < a^2,$$

и $\mathbb{T}^k$ – тор с угловыми координатами $\varphi_1, \dots, \varphi_k$. Определим диффеоморфизм $f: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$ формулой

$$(3.1) \quad f(I_j, \varphi_j) = (I_j, \varphi_j + \alpha_j(I)), \quad j = 1, \dots, k,$$

где $\alpha_j(I)$ являются произвольными гладкими функциями. Диффеоморфизм (3.1) называется твист-отображением и является отображением Пуанкаре для интегрируемых гамильтоновых систем в тороидальных областях на подмногообразиях постоянной энергии. Диффеоморфизмы (3.1) возникают также в виде дискретизаций интегрируемых гамильтоновых систем.

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что твист-отображение f (3.1) при $k \geq 2$ удовлетворяет следующему условию невырожденности:*

$$(3.2) \quad \det \left\| \frac{\partial \alpha_\ell(I)}{\partial I_j} \right\| \neq 0, \quad \ell, j = 1, \dots, k,$$

и что отображение $(I_1, \dots, I_k) \rightarrow (\alpha_1(I), \dots, \alpha_k(I))$ является взаимно однозначным в шаре B_a . Тогда первые пять B -когомологических групп имеют вид

$$H_B^0(f, \mathcal{O}) = \mathbb{R}^1, \quad H_B^1(f, \mathcal{O}) = 0, \quad H_B^2(f, \mathcal{O}) = \mathbb{R}^\infty, \quad H_B^3(f, \mathcal{O}) = 0, \quad H_B^4(f, \mathcal{O}) = \mathbb{R}^\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие невырожденности (3.2) означает, что функции $J_\ell = \alpha_\ell(I)$ образуют новую систему координат в шаре B_a . Диффеоморфизм f (3.1) принимает вид $f(J_i, \varphi_i) = (J_i, \varphi_i + J_i)$ в новых координатах.

Уравнение инвариантности $f^*\theta = \theta$ для дифференциальной 1-формы

$$\theta = \theta_i(J, \varphi) dJ_i + \theta_{k+i}(J, \varphi) d\varphi_i$$

эквивалентно системе уравнений

$$(3.3) \quad \theta_{k+i}(J, \varphi) = \theta_{k+i}(J, \varphi + J),$$

$$(3.4) \quad \theta_i(J, \varphi) = \theta_i(J, \varphi + J) + \theta_{k+i}(J, \varphi + J).$$

Итерируя уравнение (3.3) N раз, мы получаем уравнение

$$(3.5) \quad \theta_{k+i}(J, \varphi) = \theta_{k+i}(J, \varphi + NJ)$$

для произвольного целого числа N . Для общего вектора $J = (J_1, \dots, J_k)$ точки $\varphi + NJ$ всюду плотны в торе $\mathbb{T}^k$. Функции $\theta_{k+i}(J, \varphi)$ являются гладкими. Поэтому уравнения (3.5) влекут, что функции $\theta_{k+i}(J, \varphi)$ зависят только от переменных J_i : $\theta_{k+i}(J, \varphi) = \theta_{k+i}(J)$.

Итерируя уравнение (3.4) N раз, мы получаем

$$(3.6) \quad \theta_i(J, \varphi) = \theta_i(J, \varphi + NJ) + N\theta_{k+i}(J)$$

для произвольного целого числа N . Гладкие функции $\theta_i(J, \varphi)$ ограничены по модулю на любом торе $\mathbb{T}^k$. Правая часть уравнения (3.6) ограничена при всех N , только если $\theta_{k+i}(J) = 0$. Поэтому уравнение (3.6) влечет $\theta_i(J, \varphi) = \theta_i(J)$ по тем же причинам, что и для уравнения (3.5). Таким образом, мы доказали, что любая f -инвариантная 1-форма θ имеет вид

$$(3.7) \quad \theta = \theta_i(J) dJ_i.$$

Если 1-форма θ (3.7) является замкнутой, $d\theta = 0$, то, применяя лемму Пуанкаре, мы получаем $\theta = dF(J)$, где $F(J)$ — некоторая гладкая функция. Поэтому первая когомологическая группа $H_B^1(f, \mathcal{O})$ равна нулю.

2а) Уравнение инвариантности $f^*\omega = \omega$ для дифференциальной 2-формы

$$\omega = a_{\ell i}(J, \varphi) dJ_\ell \wedge dJ_i + b_{\ell i}(J, \varphi) dJ_\ell \wedge d\varphi_i + c_{\ell i}(J, \varphi) d\varphi_\ell \wedge d\varphi_i$$

эквивалентно системе уравнений

$$(3.8) \quad c_{\ell i}(J, \varphi) = c_{\ell i}(J, \varphi + J),$$

$$(3.9) \quad b_{\ell i}(J, \varphi) = b_{\ell i}(J, \varphi + J) + 2c_{\ell i}(J, \varphi + J),$$

$$(3.10) \quad a_{\ell i}(J, \varphi) = a_{\ell i}(J, \varphi + J) + \frac{1}{2}(b_{\ell i}(J, \varphi + J) - b_{i\ell}(J, \varphi + J)) + c_{\ell i}(J, \varphi + J).$$

Уравнения (3.8) и (3.9) имеют тот же вид, что и уравнения (3.3) и (3.4). Поэтому, применяя те же аргументы, мы получаем $b_{\ell i}(J, \varphi) = b_{\ell i}(J)$, $c_{\ell i}(J, \varphi) = 0$. Подставляя эти формулы и итерируя уравнение (3.10) N раз, мы выводим

$$a_{\ell i}(J, \varphi) = a_{\ell i}(J, \varphi + NJ) + \frac{N}{2}(b_{\ell i}(J) - b_{i\ell}(J)).$$

Это уравнение имеет тот же вид, что и уравнение (3.6). Поэтому те же аргументы доказывают, что $a_{\ell i}(J, \varphi) = a_{\ell i}(J)$, $b_{\ell i}(J) - b_{i\ell}(J) = 0$. Таким образом, мы установили, что любая f -инвариантная 2-форма ω имеет вид

$$(3.11) \quad \omega = a_{\ell i}(J) dJ_\ell \wedge dJ_i + b_{\ell i}(J) dJ_\ell \wedge d\varphi_i,$$

где $b_{\ell i}(J) = b_{i\ell}(J)$.

2b) Уравнение $d\omega = 0$ для выведенной 2-формы ω (3.11) эквивалентно системе $k+1$ уравнений

$$d(a_{\ell i}(J) dJ_\ell \wedge dJ_i) = 0, \quad d(b_{\ell i}(J) dJ_\ell) = 0, \quad i = 1, \dots, k.$$

Применяя лемму Пуанкаре, мы получаем

$$a_{\ell i}(J) dJ_\ell \wedge dJ_i = d(f_i(J) dJ_i), \quad b_{\ell i}(J) dJ_\ell = dB_i(J).$$

Последние k уравнений ($i = 1, \dots, k$) и уравнения $b_{\ell i}(J) = b_{i\ell}(J)$ влекут

$$b_{\ell i}(J) = b_{i\ell}(J) = \frac{\partial B_i(J)}{\partial J_\ell} = \frac{\partial B_\ell(J)}{\partial J_i}.$$

Поэтому существует такая гладкая функция $B(J)$, что

$$B_i(J) = \frac{\partial B(J)}{\partial J_i}, \quad b_{\ell i}(J) dJ_\ell = d \frac{\partial B(J)}{\partial J_i}.$$

Таким образом, мы доказали, что любая f -инвариантная замкнутая 2-форма ω имеет вид

$$(3.12) \quad \omega = d \frac{\partial B(J)}{\partial J_i} \wedge dJ_i + df_i(J) \wedge dJ_i,$$

где $B(J)$ и $f_i(J)$ — произвольные гладкие функции.

Формулы (3.7), (3.12) доказывают, что когомологические классы в группе $H_B^2(f, \mathcal{O})$ определены классами функций $B(J)$ по модулю линейных функций $c_1 J_1 + \dots + c_k J_k$. Поэтому группа когомологий $H_B^2(f, \mathcal{O})$ является бесконечномерной.

3a) Уравнение инвариантности $f^* \omega_3 = \omega_3$ для дифференциальной 3-формы

$$(3.13) \quad \begin{aligned} \omega_3 = & b_{i\ell m}(J, \varphi) dJ_i \wedge dJ_\ell \wedge d\varphi_m + c_{i\ell m}(J, \varphi) dJ_i \wedge dJ_\ell \wedge dJ_m \\ & + g_{i\ell m}(J, \varphi) dJ_i \wedge d\varphi_\ell \wedge d\varphi_m + h_{i\ell m}(J, \varphi) d\varphi_i \wedge d\varphi_\ell \wedge d\varphi_m \end{aligned}$$

эквивалентно системе уравнений

$$(3.14) \quad \begin{aligned} h_{i\ell m}(J, \varphi) &= h_{i\ell m}(J, \varphi + J), \\ g_{i\ell m}(J, \varphi) &= g_{i\ell m}(J, \varphi + J) + 3h_{i\ell m}(J, \varphi + J), \\ b_{i\ell m}(J, \varphi) &= b_{i\ell m}(J, \varphi + J) + 3h_{i\ell m}(J, \varphi + J) \\ &\quad + g_{i\ell m}(J, \varphi + J) - g_{\ell i m}(J, \varphi + J), \\ c_{i\ell m}(J, \varphi) &= c_{i\ell m}(J, \varphi + J) + g_{i\ell m}(J, \varphi + J) + h_{i\ell m}(J, \varphi + J) \\ &\quad + \frac{1}{3}(b_{i\ell m} + b_{\ell m i} + b_{m i \ell})(J, \varphi + J). \end{aligned}$$

Первые три уравнения (3.14) имеют ту же структуру, что и уравнения (3.8)–(3.10). Поэтому, применяя тот же метод, мы получаем

$$h_{ilm}(J, \varphi) = 0, \quad g_{ilm}(J, \varphi) = g_{ilm}(J), \quad b_{ilm}(J, \varphi) = b_{ilm}(J),$$

и соотношения симметрии $g_{ilm}(J) = g_{lim}(J)$. Функции $g_{ilm}(J)$ по их определению (3.13) удовлетворяют соотношениям $g_{ilm}(J) = -g_{iml}(J)$. Легко проверить, что эти два множества соотношений симметрии влекут $g_{ilm}(J) = 0$. Поэтому последнее уравнение (3.14) принимает вид

$$(3.15) \quad c_{ilm}(J, \varphi) = c_{ilm}(J, \varphi + J) + \frac{1}{3}(b_{ilm} + b_{lmi} + b_{mil})(J).$$

Итерируя уравнение (3.15) N раз, мы приходим к уравнению

$$c_{ilm}(J, \varphi) = c_{ilm}(J, \varphi + NJ) + \frac{N}{3}(b_{ilm} + b_{lmi} + b_{mil})(J).$$

Это уравнение имеет тот же вид, что и уравнение (3.6). Поэтому те же аргументы доказывают равенства

$$(3.16) \quad c_{ilm}(J, \varphi) = c_{ilm}(J), \quad b_{ilm}(J) + b_{lmi}(J) + b_{mil}(J) = 0.$$

Таким образом, мы доказали, что любая f -инвариантная 3-форма ω_3 имеет вид

$$(3.17) \quad \omega_3 = b_{ilm}(J) dJ_i \wedge dJ_\ell \wedge d\varphi_m + c_{ilm}(J) dJ_i \wedge dJ_\ell \wedge dJ_m,$$

где коэффициенты $b_{ilm}(J)$ удовлетворяют уравнениям (3.16).

3b) Уравнение $d\omega_3 = 0$ для 3-формы (3.17) эквивалентно системе $k + 1$ уравнений

$$(3.18) \quad d(b_{ilm}(J) dJ_i \wedge dJ_\ell) = 0, \quad d(c_{ilm}(J) dJ_i \wedge dJ_\ell \wedge dJ_m) = 0,$$

где $m = 1, \dots, k$. Применяя лемму Пуанкаре к уравнениям (3.18), мы получаем, что 3-форма ω_3 имеет вид

$$(3.19) \quad \omega_3 = d(b_{lm}(J) dJ_\ell) \wedge d\varphi_m + d(a_{i\ell}(J) dJ_i \wedge dJ_\ell).$$

Применяя уравнение инвариантности $f^*\omega_3 = \omega_3$ к 3-форме (3.19), мы приходим к уравнению

$$d(b_{lm}(J) dJ_\ell \wedge dJ_m) = 0.$$

Поэтому лемма Пуанкаре влечет

$$b_{lm}(J) dJ_\ell \wedge dJ_m = d(B_m(J) dJ_m),$$

где $B_m(J)$ – некоторые гладкие функции. Это уравнение означает, что

$$b_{lm}(J) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial B_m(J)}{\partial J_\ell} - \frac{\partial B_\ell(J)}{\partial J_m} \right) + \bar{b}_{lm}(J), \quad \bar{b}_{lm}(J) = \bar{b}_{m\ell}(J).$$

Отсюда мы получаем

$$(3.20) \quad \begin{aligned} d(b_{lm}(J) dJ_\ell) &= d(\tilde{b}_{lm}(J) dJ_\ell), \\ \tilde{b}_{lm}(J) &= \bar{b}_{lm}(J) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial B_m(J)}{\partial J_\ell} + \frac{\partial B_\ell(J)}{\partial J_m} \right), \quad \tilde{b}_{lm}(J) = \tilde{b}_{m\ell}(J). \end{aligned}$$

Уравнения (3.19) и (3.20) эквивалентны равенству $\omega_3 = d\omega_2$, где 2-форма ω_2 имеет вид

$$(3.21) \quad \omega_2 = a_{i\ell}(J) dJ_i \wedge dJ_\ell + \tilde{b}_{\ell m}(J) dJ_\ell \wedge d\varphi_m.$$

Вследствие уравнения (3.11) 2-форма ω_2 (3.21) является f -инвариантной. Поэтому равенство $\omega_3 = d\omega_2$ доказывает, что группа когомологий $H_B^3(f, \mathcal{O})$ равна нулю.

4) Пусть ω_i – f -инвариантные замкнутые 2-формы (3.12), соответствующие некоторым гладким функциям $B_i(J)$. Дифференциальная 4-форма

$$\omega_4 = \sum_{i,j=1}^N c_{ij} \omega_i \wedge \omega_j$$

является f -инвариантной и замкнутой при производных постоянных c_{ij} . Формула (3.17) для произвольной f -инвариантной 3-формы ω_3 доказывает, что равенство $\omega_4 = d\omega_3$ невозможно, если функции $B_i(J)$ в уравнении (3.12) и постоянные c_{ij} находятся в общем положении. Поэтому группа когомологий $H_B^4(f, \mathcal{O})$ является бесконечномерной.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Применяя методы данной работы, можно доказать, что для общих твист-отображений f (3.1), невырожденных в смысле (3.2), все четные группы когомологий $H_B^{2\ell}(f, \mathcal{O})$ являются бесконечномерными при $1 \leq \ell \leq k$, а все нечетные группы когомологий $H_B^{2\ell+1}(f, \mathcal{O})$ являются нулевыми. Доказательство будет опубликовано в другой работе.

§ 4. Инвариантный смысл условия невырожденности

Условие невырожденности (3.2) аналогично условию невырожденности Пуанкаре [14] для интегрируемых гамильтоновых систем. В работах [6], [7] мы установили инвариантный смысл условия Пуанкаре и условия изоэнергетической невырожденности по Пуанкаре. Для выяснения инвариантного смысла условия (3.2), мы вводим следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $f: M^n \rightarrow M^n$ – некоторый диффеоморфизм. Алгебра Ли f -инвариантных векторных полей на M^n называется алгеброй Ли $\mathcal{S}_f$ симметрий диффеоморфизма f .

ТЕОРЕМА 3. *Твист-отображение f (3.1) тогда и только тогда удовлетворяет условию невырожденности (3.2) в плотной открытой области $\mathcal{D} \subset B_a$, когда его алгебра Ли симметрий $\mathcal{S}_f$ абелева.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Твист-отображение (3.1) является сдвигом на единицу времени вдоль траекторий динамической системы V :

$$(4.1) \quad \dot{I}_1 = 0, \dots, \dot{I}_k = 0, \quad \dot{\varphi}_1 = \alpha_1(I), \dots, \dot{\varphi}_k = \alpha_k(I).$$

Поэтому любая симметрия системы (4.1) является симметрией диффеоморфизма (3.1). Следовательно, алгебра Ли $\mathcal{S}_V$ симметрий системы (4.1) является подалгеброй Ли в $\mathcal{S}_f$. Условие невырожденности (3.2) совпадает с аналогичным условием для динамической системы (4.1), см. уравнение (2.11) работы [6].

Если алгебра Ли $\mathcal{S}_f$ абелева, то ее подалгебра Ли $\mathcal{S}_V$ также абелева. Поэтому, применяя предложение 1 работы [6], мы получаем, что условие (3.2) выполнено.

Обратно, если условие невырожденности (3.2) выполнено, то твист-отображение (3.1) имеет вид $f(J_i, \varphi_i) = (J_i, \varphi_i + J_i)$ в новых координатах $J_\ell = \alpha_\ell(I)$. Любое векторное поле U в тороидальной области $\mathcal{O}$ имеет вид

$$(4.2) \quad U = \sum_{i=1}^k \left(U^i(J, \varphi) \frac{\partial}{\partial J_i} + U^{k+i}(J, \varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \right).$$

Условие f -инвариантности векторного поля (4.2) принимает вид

$$U^i(J, \varphi + J) = U^i(J, \varphi), \quad U^{k+i}(J, \varphi + J) = U^{k+i}(J, \varphi) + U^i(J, \varphi).$$

Эти уравнения имеют тот же вид, что и уравнения (3.3), (3.4). Поэтому, применяя методы теоремы 2, мы получаем $U^i(J, \varphi) = 0$, $U^{k+i}(J, \varphi) = U^{k+i}(J)$. Таким образом, любое f -инвариантное векторное поле (4.2) имеет вид

$$U = \sum_{i=1}^k U^{k+i}(J) \frac{\partial}{\partial \varphi_i}.$$

Следовательно, алгебра Ли симметрий $\mathcal{S}_f$ абелева.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Abraham R., Marsden J. E. Foundations of Mechanics. Reading, Massachusetts: The Benjamin/Cummings Publ. Comp., 1978.
- [2] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974.
- [3] Bogoyavlenskij O. I. A cohomology of dynamical systems // C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada. 1995. V. 17. № 6. P. 253–258.
- [4] Bogoyavlenskij O. I. Theory of tensor invariants of integrable Hamiltonian systems. I. Incompatible Poisson structures // Comm. Math. Phys. 1996. V. 180. № 3. P. 529–586.
- [5] Bogoyavlenskij O. I. The A - B - C -cohomologies for dynamical systems // C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada. 1996. V. 18. № 5. P. 199–204.
- [6] Bogoyavlenskij O. I. Theory of tensor invariants of integrable Hamiltonian systems. II. Theorem on symmetries and its applications // Comm. Math. Phys. 1997. V. 184. № 2. P. 301–365.
- [7] Bogoyavlenskij O. I. Conformal symmetries of dynamical systems and Poincaré's 1892 concept of iso-energetic non-degeneracy // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1998. V. 326. P. 213–218.
- [8] De Pham G. Sur l'Analysis situs des varietes a n dimensions // J. Math. Pures Appl. (9). 1931. V. 10. P. 115–200.
- [9] Halmos P. R. Lectures on ergodic theory. New York: Chelsea Publ. Comp., 1956.
- [10] Hilbert D. Mathematische probleme // Lecture presented at the Second Internat. Congr. Paris. 1900; // Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. 1900. P. 253–297.
- [11] Katok A., Hasselblatt B. Introduction to the modern theory of dynamical systems. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
- [12] Колмогоров А. Н. О сохранении условно периодических движений при малых возмущениях функции Гамильтона // Докл. АН СССР. 1954. Т. 98. С. 527–530.
- [13] Moser J. On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus // Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II. 1962. V. 1. P. 1–20.
- [14] Poincaré H. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Paris: Gauthier-Villars et Fils, 1892.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва;
Квинский Университет, Кингстон, Канада

Поступила в редакцию
14.08.1998