Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Дынников, Геометрия зон устойчивости в задаче С.П. Новикова о полуклассическом движении электрона, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 1, 21–60

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm116>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 16:02:09

ГЕОМЕТРИЯ ЗОН УСТОЙЧИВОСТИ В ЗАДАЧЕ С. П. НОВИКОВА О ПОЛУКЛАССИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИИ ЭЛЕКТРОНА

И. А. Дынников

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	21
1.1. Формулировка результатов	23
2. Алгебраическая плотность замкнутых траекторий и эйлерова характеристика	27
2.1. Типы траекторий. Степень иррациональности	27
2.2. Устойчивость замкнутых траекторий	28
2.3. Алгебраическая плотность замкнутых траекторий	28
2.4. Высоты критических точек	30
2.5. Высоты цилиндров замкнутых траекторий	31
2.6. Плотность эйлеровой характеристики	32
2.7. Критический цикл и средняя плотность эйлеровой характеристики ...	36
3. Зоны устойчивости	38
3.1. Минимальные компоненты общего положения	38
3.2. Множество $U(H)$ – замкнутый отрезок	41
3.3. Существенные компоненты	42
3.4. k -подчиненность	44
4. Вырождения	49
4.1. Простейшие вырождения. Граница зоны устойчивости	49
4.2. Общий случай	54
4.3. Размеры зон устойчивости	57
4.4. Вращательная симметрия	58
Список литературы	60

1. Введение

В работе обсуждается задача, поставленная в 1982 г. С. П. Новиковым [1]. В общем виде формулировка задачи следующая. Дана некоторая гладкая функция f в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$, имеющая трехмерную решетку периодов $\mathbb{Z}^3 \subset \mathbb{R}^3$, и фикси-

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01404).

рована некоторая поверхность уровня M этой функции. Рассмотрим плоские сечения этой поверхности. Они могут иметь как замкнутые, так и незамкнутые компоненты. В работе [1] было предложено изучить возможные асимптотические поведения незамкнутых компонент сечения $P \cap M$, а именно, выяснить, имеют ли эти кривые асимптотическое направление, и если да, то как могут соотноситься направления в $-\infty$ и $+\infty$.

Важность этой задачи объясняется тем, что сечения указанного вида возникают как решения уравнения для квазиимпульса электрона, движущегося в кристаллической решетке под действием постоянного однородного магнитного поля (см. [2]). Трехмерное пространство, в котором мы работаем, — это пространство квазиимпульса электрона, а функция f — один из законов дисперсии. Поскольку мы имеем дело с некоторой кристаллической решеткой $\mathcal{L}$, квазиимпульс p определен с точностью до решетки, обратной к $\mathcal{L}$. Действие магнитного поля рассматривается как возмущение и учитывается классическим образом, что дает $\langle H, p \rangle = \text{const}$, где H — вектор магнитного поля.

Подчеркнем особо, что мы работаем не в физическом пространстве, а в двойственном пространстве квазиимпульсов. Наша решетка $\mathbb{Z}^3$ играет роль двойственной решетки $\mathcal{L}^*$, так что нашим линейным формам с целыми коэффициентами будут соответствовать векторы из кристаллической решетки $\mathcal{L}$.

Если плоскость P имеет целочисленное направление, то сечение $P \cap M$ будет инвариантно при сдвигах на векторы из двумерной решетки $P \cap \mathbb{Z}^3$. В этом случае любая незамкнутая неособая компонента сечения $P \cap M$ периодична, т.е. получается периодическим возмущением из некоторой прямой целочисленного направления.

В работах [3]–[5] было показано, что “с вероятностью 1” либо все компоненты сечения $P \cap M$ замкнуты, либо имеются открытые компоненты, и тогда все они являются конечными (и в определенном смысле квазипериодическими) возмущениями прямых линий, причем эти прямые имеют одно и то же направление, аннулирующее некоторую линейную форму с целыми коэффициентами (которой отвечает некоторый вектор физической решетки). При этом были существенно использованы идеи работы [6], в которой было доказано, что открытые компоненты лежат в полосе конечной ширины, если направление плоскости P близко к целочисленному.

Таким образом, гипотеза о том, что открытые компоненты $P \cap M$ лежат в полосе и проходят ее насквозь, сформулированная в работе [7], подтвердилась “в случае общего положения”. Однако, С. П. Царев обнаружил примеры, в которых незамкнутые компоненты, хотя и имеют асимптотическое направление в обычном смысле, не лежат в полосе конечной ширины (см. [5]). Более сложные примеры были построены в [5], в которых открытые компоненты сечения $P \cap M$ вообще не имеют асимптотического направления. Здесь мы покажем, что наличие таких сечений закономерно для некоторой поверхности уровня “достаточно сложной” функции f .

Случай, когда незамкнутые компоненты сечения $P \cap M$ являются конечными возмущениями параллельных прямых, особенно интересен с физической точки зрения. Физические аспекты теории подробно обсуждаются в работах [8]–[10]. Здесь мы будем касаться только чисто математических аспектов. Мы также не придерживаемся физических обозначений и используем, например, для точек пространства $\mathbb{R}^3$ обозначение x , а не p .

Теперь мы дадим все необходимые определения и сформулируем основные результаты.

1.1. Формулировка результатов. Пусть f – функция общего положения на трехмерном торе $\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$. Той же буквой f мы будем обозначать соответствующую функцию на накрывающем пространстве $\mathbb{R}^3$, полученную композицией f с естественной проекцией $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Слова “общее положение” в формулировках утверждений означают, что множество объектов, о которых идет речь и для которых утверждение неверно, имеет в некотором правильном смысле меру нуль. Например, под *функцией общего положения* в этой работе мы понимаем гладкую функцию из функционального подпространства, заданного счетным числом неравенств вида $z(f) \neq 0$, где z – некоторый непрерывный функционал на открытом подмножестве в пространстве C^k (k достаточно большое). В частности, мы требуем, чтобы f была функцией Морса. В качестве функционала z можно взять, например, одно из критических значений функции f (в точности такие функционалы не будут использованы, но понадобятся аналогичные).

Поверхности уровня функции f будем обозначать через M_E , а их $\mathbb{Z}^3$ -накрывающие в $\mathbb{R}^3$ – через $\widehat{M}_E$:

$$M_E = \{x \in \mathbb{T}^3 \mid f(x) = E\},$$

$$\widehat{M}_E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = E\}.$$

В дальнейшем мы всегда будем использовать знак $\widehat{}$ в обозначениях для $\mathbb{Z}^3$ -накрывающих поверхностей, или, вообще, CW-комплексов, лежащих в $\mathbb{T}^3$.

Возьмем теперь некоторую ненулевую линейную форму H на $\mathbb{R}^3$

$$\langle H, x \rangle = H_1 x_1 + H_2 x_2 + H_3 x_3$$

и рассмотрим сечения $\Gamma_{E,h}$ поверхностей $\widehat{M}_E$ плоскостями $H = \text{const}$:

$$(1) \quad P_h = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle H, x \rangle = h\},$$

$$(2) \quad \Gamma_{E,h} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = E, \langle H, x \rangle = h\}.$$

Коллинеарные формы H_1 и H_2 , $H_1 = \lambda H_2$, дают одни и те же сечения, поэтому мы будем использовать нормировку $|H| = 1$, где $|\cdot|$ обозначает обычную евклидову метрику. Таким образом, мы будем лишь считать H точкой единичной сферы S^2 в двойственном пространстве $(\mathbb{R}^3)^*$.

Мы не будем здесь предполагать, что стандартный базис решетки $\mathbb{Z}^3$ ортонормирован, поскольку это неверно в некоторых интересных физических примерах. Для удобства мы будем считать, что объем фундаментальной области тора $\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ равен 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для физических приложений наиболее важен случай, когда поверхность уровня M_E фиксирована. Однако, как было обнаружено в работе [4], полезно рассмотреть все семейство поверхностей уровня, зафиксировав лишь функцию f .

Обозначим через $U(H)$ множество значений E функции f таких, что для некоторого h сечение $\Gamma_{E,h}$ имеет хотя бы одну незамкнутую компоненту (особую или неособую).

ТЕОРЕМА 1. Для любого вектора H множество $U(H)$ является замкнутым отрезком, $U(H) = [E_1(H), E_2(H)]$, $E_2(H) > E_1(H)$, либо состоит ровно из одной точки $E_1(H) = E_2(H)$.

Определенные таким образом функции $E_1(H)$ и $E_2(H)$ могут не быть непрерывными функциями на сфере S^2 , но они “не слишком разрывны”, как видно из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2. На сфере $S^2 \in (\mathbb{R}^3)^*$ существуют (и, очевидно, единственные) непрерывные функции $\tilde{E}_1(H)$ и $\tilde{E}_2(H)$, совпадающие соответственно с $E_1(H)$ и $E_2(H)$ всюду, кроме объединения счетного числа окружностей вида $\langle H, u \rangle = 0$, где $u \in \mathbb{Z}^3$.

На этих окружностях функции $\tilde{E}_1(H)$ и $\tilde{E}_2(H)$ удовлетворяют неравенствам

$$E_1(H) \leq \tilde{E}_1(H) \leq \tilde{E}_2(H) \leq E_2(H).$$

Нас будет особенно интересовать множество $\mathcal{O}$ векторов $H \in S^2$, для которых отрезок $\tilde{U}(H) = [\tilde{E}_1(H), \tilde{E}_2(H)]$ невырожден. Из теоремы 2 видно, что $\mathcal{O}$ является открытым множеством, поскольку это множество, где не равна нулю непрерывная функция $\tilde{E}_2(H) - \tilde{E}_1(H)$,

$$\mathcal{O} = \{H \in S^2 \mid \tilde{E}_1(H) < \tilde{E}_2(H)\}.$$

ТЕОРЕМА 3. Множество $\mathcal{O}$ всюду плотно в S^2 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Линейно связные компоненты множества $\mathcal{O}$ называются зонами устойчивости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что кривая $\gamma(t)$ имеет сильное асимптотическое направление, если на γ существует другая параметризация $\tau(t)$, $d\tau/dt > 0$, такая, что в ней кривая имеет вид

$$\gamma(\tau) = \gamma(0) + \tau v + O(\tau), \quad \tau \rightarrow \pm\infty,$$

где $v \in \mathbb{R}^3$ — некоторый ненулевой вектор. Вектор v называется вектором сильного асимптотического направления. Он определен с точностью до мультипликативной константы.

ТЕОРЕМА 4. Для каждой зоны устойчивости $\mathcal{D} \subset S^2$ существует, и единственна с точностью до знака, линейная форма $l(x) = l_1x_1 + l_2x_2 + l_3x_3$ с целыми взаимно простыми коэффициентами l_i такая, что для любого $H \in \mathcal{D}$, $H \neq \lambda l$, каждая регулярная неограниченная компонента сечения $\Gamma_{E,h}$, где $E \in U(H)$, $h \in \mathbb{R}$, имеет сильное асимптотическое направление v , аннулирующее форму l :

$$\langle l, v \rangle = \langle H, v \rangle = 0.$$

Очевидно, это условие определяет v с точностью до ненулевого множителя:

$$v \sim l \times H.$$

Здесь $\overline{\mathcal{D}}$ обозначает замыкание зоны устойчивости $\mathcal{D}$.

Пока трудно что-либо сказать о топологии индивидуальной зоны устойчивости, и даже неясно, может ли двум различным зонам устойчивости отвечать одна и та же форма l (мы не различаем зоны устойчивости, симметричные относительно начала координат). Тем не менее, основываясь на наблюдениях, сделанных для конкретных примеров, мы выдвигаем следующую гипотезу.

ГИПОТЕЗА 1. Линейные формы l из теоремы 4 различны для различных зон устойчивости. Каждая зона устойчивости односвязна.

Мы будем обозначать через $\mathcal{D}_l$ (любую) зону устойчивости, которой соответствует форма $l \in (\mathbb{Z}^3)^*$.

Несмотря на то, что односвязность зон устойчивости пока не установлена, мы можем качественно описать структуру множества $\mathcal{O}$ возле границы зоны устойчивости.

ТЕОРЕМА 5. 1) Граница $\partial\mathcal{D}_l$ любой зоны устойчивости $\mathcal{D}_l$ является кусочно-гладкой кривой.

2) Каждая регулярная точка границы $H \in \partial\mathcal{D}_l$, удовлетворяющая соотношению вида

$$(3) \quad \langle H, u \rangle = 0, \quad \text{где } u \in \mathbb{Z}^3 \setminus 0, \quad \langle l, u \rangle = 0,$$

принадлежит также границе некоторой другой зоны устойчивости: $H \in \partial\mathcal{D}_m$, $m \neq l$, причем H есть точка излома границы $\partial\mathcal{D}_m$. В этом случае векторное произведение $l \times m$ есть неделимый вектор решетки $\mathbb{Z}^3$, т.е. имеет взаимно простые координаты. Линейная форма H компланарна формам l и m :

$$(4) \quad H = \eta l + \theta m$$

и, кроме того,

$$(5) \quad |\eta/\theta| < 1.$$

3) Границы двух различных зон устойчивости могут иметь лишь конечное число общих точек. Любая общая точка H границ зон $\mathcal{D}_l$ и $\mathcal{D}_m$ имеет вид (4).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Имеется открытое множество (в топологии C^k , где k достаточно большое) функций f , для которых множество $\mathcal{O}$ покрывает всю сферу S^2 и, следовательно, состоит ровно из одной зоны устойчивости (например, в случае малого возмущения функции, зависящей лишь от одной переменной x_i). Однако, если для данной функции f имеются хотя бы две различные зоны устойчивости (это свойство также имеет место для функций из некоторого открытого множества, например, для функций с кубической симметрией и близких к ним), то неизбежно имеется *бесконечное число* зон устойчивости. Действительно, граница каждой зоны устойчивости (если она не пуста) в случае общего положения пересекает бесконечное количество окружностей вида (3), и множество таких точек пересечения всюду плотно на границе зоны. В каждой такой точке к данной зоне устойчивости примыкает другая зона.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Утверждение 2) теоремы 5, в частности, означает, что формы l и m образуют базис подрешетки $P \cap (\mathbb{Z}^3)^*$, где P – плоскость, порожденная l и m . Заметим, что согласно утверждениям 2) знание формы l и формы H , которая лежит на пересечении границы $\partial\mathcal{D}_l$ с целочисленной плоскостью P оставляет только две возможности для формы m . Действительно, легко видеть, что в плоскости P есть только два неколлинеарных вектора m таких, что l и m образуют базис подрешетки $P \cap (\mathbb{Z}^3)^*$ и выполнены условия (4) и (5).

ТЕОРЕМА 6. *Существует константа C , зависящая от функции f , такая, что*

- 1) *для любых $l \in (\mathbb{Z}^3)^*$ и $H \in \overline{\mathcal{D}_l}$ угол между l и H не превосходит $C/|l|$;*
- 2) *площадь любой зоны устойчивости $\mathcal{D}_l$ не превосходит $C/|l|^3$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Из этой теоремы видно, что для формы $l \in (\mathbb{Z}^3)^*$ большой длины зона устойчивости $\mathcal{D}_l$ лежит близко к точке $l/|l| \in S^2$: она целиком содержится в окрестности точки $l/|l|$, радиус которой имеет порядок $|l|^{-1}$. Как показывают примеры, оба случая $l \in \mathcal{D}_l$ и $l \notin \mathcal{D}_l$ возможны. Заметим, что для достаточно большого l зона устойчивости замечает лишь малую часть $C/|l|$ -окрестности точки $l/|l|$.

Из теоремы 5 мы выведем, что объединение всех зон устойчивости (в случае, когда имеются хотя бы две) не покрывает всей сферы S^2 , а

$$\mathcal{Q} = S^2 \setminus \left(\bigcup_l \overline{\mathcal{D}_l} \right)$$

есть, грубо говоря, множество коразмерности ≤ 1 , как показывает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 7. *Кривая общего положения на сфере S^2 , пересекающая как минимум две различные зоны устойчивости, пересекает бесконечное число различных зон устойчивости и пересекает множество $\mathcal{Q}$. Множество $\mathcal{Q}$ не имеет изолированных точек.*

Как видно из этой теоремы, множество $\mathcal{Q}$ имеет сложную структуру. До сих пор неизвестно, имеет ли оно нулевую меру для функции f общего положения. Если $H \in \mathcal{Q}$, то поведение траекторий на M_E при $E = E_1(H) = E_2(H)$ непредсказуемо. Может быть, например, что сечение $\Gamma_{E,h}$ состоит всего из одной регулярной компоненты для почти всех h . Такая траектория блуждает по всей плоскости и не имеет асимптотического направления. Пример, в котором наблюдается такое блуждание, построен в [5]. Как показал А. Зорич [11], в этом случае траектории все же имеют некоторое выделенное направление, вдоль которого “амплитуда блуждания” растет быстрее, чем в перпендикулярном направлении. Неясно, является ли наличие такого выделенного направления закономерностью или же специфично для данного конкретного примера.

Как мы уже отмечали, для физических приложений важнее рассматривать одну фиксированную поверхность уровня M_E . Обозначим через $\mathcal{D}_l^E$ часть зоны $\mathcal{D}_l$, заданную условием $\tilde{E}_1(H) < E < \tilde{E}_2(H)$. Мы называем $\mathcal{D}_l^E$ зоной устойчивости с постоянной энергией E . Поскольку точек, лежащих на пересечении границ двух различных зон $\mathcal{D}_l$, счетное число, и для таких точек H мы имеем $\tilde{E}_1(H) = \tilde{E}_2(H)$, то с вероятностью 1 для данного фиксированного E различные зоны $\mathcal{D}_l^E$ не будут иметь общих граничных точек. Кроме того, из наших результатов вытекает

ТЕОРЕМА 8. *При фиксированном уровне энергии E для почти всех $H \in S^2$ либо $H \in \mathcal{D}_l^E$ для некоторого $l \in (\mathbb{Z}^3)^*$, либо все компоненты всех сечений $\Gamma_{E,h}$ компактны.*

2. Алгебраическая плотность замкнутых траекторий и эйлерова характеристика

2.1. Типы траекторий. Степень иррациональности. Мы называем *траекторией* любое решение $x(t)$ уравнения

$$(6) \quad \frac{d}{dt} x(t) = H \times \nabla f(x),$$

где ∇f обозначает градиент функции f . Любая такая траектория содержится в одном из плоских сечений $\Gamma_{E,h}$. Действительно, в силу (6) имеем:

$$\frac{d}{dt} f(x(t)) = 0, \quad \frac{d}{dt} \langle H, x(t) \rangle = 0.$$

Будем говорить, что связная компонента γ сечения $\Gamma_{E,h}$ *регулярна*, если плоскость P_h пересекает $\widehat{M}_E$ трансверсально в каждой точке кривой γ . Каждая регулярная компонента сечения $\Gamma_{E,h}$ совпадает с одной из траекторий, рассматриваемой без параметризации. *Особая*, т.е. не регулярная, связная компонента сечения $\Gamma_{E,h}$ может состоять из нескольких траекторий: она содержит хотя бы одну *стационарную* траекторию $x(t) = \text{const}$, которая является критической точкой 1-формы

$$(7) \quad \omega_E = dH|_{\widehat{M}_E} = (H_1 dx_1 + H_2 dx_2 + H_3 dx_3)|_{\widehat{M}_E}$$

и особой точкой сечения $\Gamma_{E,h}$, и может содержать *сепаратрисы*, т.е. траектории $x(t)$ такие, что один или оба предела $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t)$ являются критическими точками.

Связные компоненты сечений $\Gamma_{E,h}$ (а также их проекции в $\mathbb{T}^3$) являются *линиями уровня* 1-формы ω_E .

1-форма ω_E 3-периодична, т.е. инвариантна при сдвигах на векторы из $\mathbb{Z}^3$. Это значит, что мы можем рассматривать ее как 1-форму на компактной поверхности M_E . Мы будем обозначать эту форму на M_E также через ω_E . Мы предполагаем, что для всех E и H 1-форма ω_E на поверхности M_E имеет лишь конечное число критических точек. Очевидно, это — случай общего положения.

Слоение (с особенностями), заданное формой ω_E на поверхности M_E , мы будем обозначать через F_E . Его слои — это траектории (6), рассматриваемые как кривые в $\mathbb{T}^3$. Иногда мы будем подчеркивать зависимость от H и писать $\omega_{E,H}$, $F_{E,H}$.

В этом разделе мы сосредоточимся на замкнутых траекториях, т.е. таких решениях $x(t)$ уравнения (6), что $x(T) = x(0)$ для некоторого T .

Если траектория замкнута в $\mathbb{T}^3$, то ее прообраз в $\mathbb{R}^3$ может быть незамкнутым. Это зависит от гомологического класса данной траектории: если этот класс нулевой, то прообраз траектории в $\mathbb{R}^3$ представляет собой объединение $\mathbb{Z}^3$ -семейства одинаковых траекторий, а если гомологический класс траектории ненулевой, то ее прообраз в $\mathbb{R}^3$ есть объединение $\mathbb{Z}^2$ -семейства *периодических* траекторий, т.е. кривых $x(t)$ таких, что $x(T) = x(0) + u$, где $u \in \mathbb{Z}^3$. Мы используем термин “замкнутая траектория” только для траекторий, задающих нулевой класс в $H_1(\mathbb{T}^3, \mathbb{Z})$.

Периодические траектории возможны, только если линейная форма H имеет не максимальную степень иррациональности. *Степенью иррациональности* формы H

называется максимальное число линейно независимых над $\mathbb{Z}$ коэффициентов среди H_1, H_2, H_3 . Если форма H имеет степень иррациональности 1, мы говорим, что она *рациональна*. В этом случае все траектории периодичны. В случае степени иррациональности 3 мы говорим, что форма H *полностью иррациональна*. В этом случае появление периодических траекторий невозможно.

2.2. Устойчивость замкнутых траекторий. Главное нужное нам свойство замкнутых траекторий – это их устойчивость при малых возмущениях. Оно играло ключевую роль уже в работе [6].

ЛЕММА 1. 1) Пусть γ – некоторая замкнутая траектория. Тогда существует ее открытая окрестность U такая, что любая траектория, пересекающая U , также замкнута. Это утверждение остается справедливым при малых возмущениях функции f и формы H .

2) Если для некоторого H все регулярные траектории на поверхности $\widehat{M}_E$ замкнуты, то существует константа C такая, что для E' и H' , достаточно близких соответственно к E и H , все связанные компоненты всех сечений $\Gamma_{E',h}(H')$ компактны и имеют диаметр, не превосходящий C .

3) Для любых E и H существует константа C такая, что любая замкнутая траектория на поверхности $\widehat{M}_E$ при данном H имеет диаметр, не превосходящий C .

Мы не доказываем здесь этих утверждений, представляющих собой простые упражнения по анализу.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Утверждение 1) леммы 1 имеет аналог для периодических траекторий. Нужно лишь потребовать, чтобы при возмущении форма H по-прежнему удовлетворяла условию $\langle H, u \rangle = 0$, где u – направление рассматриваемой периодической траектории. Таким образом, мы возмущаем H в классе линейных форм степени иррациональности ≤ 2 .

Обозначим через $M_E^0(H)$ объединение всех регулярных замкнутых траекторий, лежащих на поверхности M_E . Согласно лемме 1 оно представляет собой открытое подмногообразие в M_E .

ЛЕММА 2. Поверхность M_E^0 имеет конечное число связных компонент. Каждая связная компонента поверхности M_E^0 гомеоморфна либо цилиндру $S^1 \times (0, 1)$, либо двумерному тору $S^1 \times S^1$. Основания, т.е. компоненты границы, цилиндров замкнутых траекторий бывают двух типов:

- 1) единственная точка, которая является точкой локального максимума или минимума 1-формы ω_E ;
- 2) сепаратрисный цикл, т.е. замкнутая кривая γ , состоящая из одной или нескольких критических точек 1-формы ω_E и сепаратрис, их соединяющих.

Доказательство очевидно.

2.3. Алгебраическая плотность замкнутых траекторий. Каждая замкнутая траектория γ ограничивает диск, который мы обозначим через D_γ , лежащий в

плоскости вида (1):

$$(8) \quad dH|_{D_\gamma} = 0, \quad \partial D_\gamma = \gamma.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем говорить, что замкнутая траектория $\gamma \subset \Gamma_{E,h}$ *электроно-подобная*, если градиент ограничения $\nabla(f|_{P_h})$ в любой точке кривой γ является вектором внешней нормали к границе $\partial D_\gamma = \gamma$, и *дырко-подобными*, если $\nabla(f|_{P_h})$ есть вектор внутренней нормали для любой точки из γ . Очевидно, что каждая регулярная замкнутая траектория либо электроно-подобная, либо дырко-подобная.

Зафиксируем некоторые $E \in \mathbb{R}$ и $H \in S^2 \subset (\mathbb{R}^3)^*$. Для простоты пока предположим, что форма H не рациональна: $H \notin \mathbb{R} \cdot (\mathbb{Z}^3)^*$. Для точки $A \in \mathbb{R}^3$ и ненулевого вектора v такого, что $\langle H, v \rangle = 0$, обозначим через $Q_{R,A,v}$ квадрат в плоскости $P_{H(A)}$ с центром в точке A , одна из сторон которого параллельна вектору v и имеет длину R . Обозначим через $n_{R,A,v}^+$ количество электроно-подобных замкнутых траекторий, лежащих внутри квадрата $Q_{R,A,v}$, а через $n_{R,A,v}^-$ — число дырко-подобных траекторий.

ЛЕММА 3. *Существуют пределы*

$$(9) \quad \rho^\pm = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{n_{R,A,v}^\pm}{R^2},$$

не зависящие от A и v .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $K_1, \dots, K_q$ — связные компоненты поверхности M_E^0 . На каждой компоненте K_i мы возьмем некоторую кривую $\alpha_i(t) \subset K_i$, пересекающую каждую траекторию на K_i трансверсально ровно один раз и ориентированную таким образом, чтобы вектор скорости $\frac{d}{dt} \alpha_i$ удовлетворял условию $\langle H, \frac{d}{dt} \alpha_i \rangle > 0$.

Без ограничения общности можем считать, что компоненты $K_1, \dots, K_s$ состоят из электроно-подобных траекторий, а остальные компоненты $K_{s+1}, \dots, K_q$ — из дырко-подобных, где $1 \leq s \leq q$. Из утверждения 3) леммы 1 и общеизвестного утверждения (лемма 4), приведенного ниже, мы получаем:

$$(10) \quad \rho^+ = \sum_{i=1}^s \int_{\alpha_i} dH, \quad \rho^- = \sum_{i=s+1}^q \int_{\alpha_i} dH.$$

ЛЕММА 4. *Пусть $\alpha: [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}^3$ — некоторая гладкая кривая в $\mathbb{T}^3$ такая, что $\langle H, \frac{d}{dt} \alpha(t) \rangle > 0$ для всех $t \in [0, 1]$. Тогда число точек пересечения полного образа $\pi^{-1}(\alpha)$ при проекции $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ с квадратом $Q_{R,A,v}$ равно*

$$\#(\pi^{-1}(\alpha) \cap Q_{R,A,v}) = \left(\int_{\alpha} dH + o(1) \right) \cdot R^2 \quad (R \rightarrow \infty),$$

причем сходимость равномерна по A и v .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Разность

$$\rho = \rho^+ - \rho^-$$

будет называться *алгебраической плотностью* замкнутых траекторий.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Если H имеет рациональное направление, то предел ρ зависит от начальной точки A , а точнее, от значения $H(A)$. В этом случае мы получаем периодическую функцию $\rho(h)$ от $h = H(A)$ и можем рассмотреть *среднее* значение ρ . Это среднее и будет называться алгебраической плотностью замкнутых траекторий, когда направление вектора H рационально. Все дальнейшие утверждения об алгебраической плотности замкнутых траекторий остаются при этом справедливыми.

2.4. Высоты критических точек. Оказывается, что алгебраическую плотность замкнутых траекторий $\rho(E, H)$ можно вычислить, исходя из информации о критических точках 1-формы $\omega_{E, H}$, как следует из теоремы 9 ниже.

Обозначим через $\Omega_i(X)$ группу i -мерных сингулярных цепей в пространстве X . Пусть $A_1, \dots, A_m$ – критические точки 1-формы ω_E на компактной поверхности M_E , G_i – гауссов индекс векторного поля $(H \times \nabla f)|_{M_E}$ в точке A_i . Например, если A_i – точка максимума функции $f|_{M_E}$, то $G_i = 1$, а если A_i – невырожденная седловая точка, то $G_i = -1$.

В каждой точке A_i линейные формы ∇f и H коллинеарны: $\nabla f(A_i) = \lambda_i H$. Обозначим через w_i индекс G_i , умноженный на 1, если $\lambda_i > 0$, и на -1 , если $\lambda_i < 0$:

$$w_i = \text{sign}\langle H, \nabla f(A_i) \rangle G_i.$$

Рассмотрим формальную сумму

$$(11) \quad \sigma = \sigma_E = \sum_{i=1}^m w_i A_i \in \Omega_0(\mathbb{T}^3).$$

ТЕОРЕМА 9.

- 1) 0-цепь σ лежит в ядре гомоморфизма аугментации $\epsilon: \Omega_0(\mathbb{T}^3) \rightarrow \mathbb{Z}$.
- 2) Существует 0-цикл $\tilde{\sigma} \in \Omega_0(\mathbb{R}^3)$ такой, что

$$p_*(\tilde{\sigma}) = \sigma \quad \text{и} \quad \langle H, \tilde{\sigma} \rangle = \rho.$$

3) При подходящем выборе цикла $\tilde{\sigma}$ (для всех E и H) значение $\langle l, \tilde{\sigma} \rangle$ любой линейной формы $l \in (\mathbb{R}^3)^*$ на цикле $\tilde{\sigma}$ является непрерывной функцией от E , H и f .

Дадим некоторые пояснения. Первая часть теоремы утверждает просто, что

$$\sum_i w_i = 0,$$

и, следовательно, цикл $\tilde{\sigma}$ корректно определяет некоторый *вектор* из пространства $\mathbb{R}^3$. Таким образом, имеет смысл взятие значения линейной формы на $\tilde{\sigma}$.

Вторая часть теоремы означает, что можно выбрать по одной точке $\tilde{A}_i$ в прообразе $\pi^{-1}(A_i)$ каждой из критических точек таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$w_i H(\tilde{A}_i) = \rho.$$

Третье утверждение означает, что вектор, определенный суммой $w_i \tilde{A}_i$, является непрерывной функцией поверхности M_E и линейной формы H при подходящем выборе прообразов $\tilde{A}_i$.

Мы докажем теорему 9 в разделе 2.6. Перед этим мы укажем другой 0-цикл, обладающий почти теми же свойствами, что и σ .

2.5. Высоты цилиндров замкнутых траекторий. Трансверсали α_i из доказательства леммы 3 можно выбрать таким образом, чтобы кривая α_i соединяла критические точки 1-формы ω_E , лежащие на основаниях соответствующего цилиндра K_i , если K_i – цилиндр:

$$H \times \nabla f|_{\partial \alpha_i} = 0,$$

и α_i была замкнутой, если K_i – двумерный тор:

$$\partial \alpha_i = \emptyset.$$

Рассмотрим 1-цепь

$$\alpha = \sum_{i=1}^s \alpha_i - \sum_{i=s+1}^q \alpha_i \in \Omega_1(\mathbb{T}^3).$$

Ее граница

$$\sigma' = \partial \alpha \in \Omega_0(\mathbb{T}^3)$$

является линейной комбинацией критических точек 1-формы ω_E с целыми коэффициентами. По построению 0-цепь σ' лежит в ядре гомоморфизма аугментации, $\epsilon(\sigma') = 0$.

ТЕОРЕМА 10. *Существует 0-цикл $\tilde{\sigma}' \in \Omega_0(\mathbb{R}^3)$ такой, что*

$$\pi^*(\tilde{\sigma}') = \sigma' \quad \text{и} \quad \langle H, \tilde{\sigma}' \rangle = \rho.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существует сингулярная 1-цепь $\tilde{\alpha} \in \Omega_1(\mathbb{R}^3)$ такая, что $\pi_*(\tilde{\alpha}) = \alpha$. Положим $\tilde{\sigma}' = \partial \tilde{\alpha}$. Очевидно, что $\pi_*(\tilde{\sigma}') = \sigma'$. Применяя формулу Гаусса и равенство (10), получаем

$$\rho = \int_{\alpha} dH = \int_{\tilde{\alpha}} dH = \langle H, \partial \tilde{\alpha} \rangle = \langle H, \tilde{\sigma}' \rangle.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. *Для произвольной фиксированной линейной функции $H \in S^2 \in (\mathbb{R}^3)^*$ и поверхности уровня M_E общего положения мы имеем*

$$\sigma = \sigma'.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае общего положения 1-форма ω_E имеет только морсовские критические точки. Обозначим их, как и раньше, через $A_1, \dots, A_m$. В прообразе $\pi^{-1}(A_i)$ каждой критической точки произвольно выберем по представителю $\tilde{A}_i \in \pi^{-1}(A_i)$. В случае общего положения не выполнено ни одно соотношение вида

$$(12) \quad \sum_{i=1}^m z_i H(\tilde{A}_i) + \langle H, u \rangle = 0, \quad \text{где} \quad z_i \in \mathbb{Z}, \quad u \in \mathbb{Z}^3,$$

$(z_1, \dots, z_m) \neq (0, \dots, 0)$. Действительно, малое возмущение поверхности M_E не меняет количество и типы критических точек, но может менять значения $H(\tilde{A}_i)$ произвольно в достаточно малой окрестности первоначальных значений. Множество соотношений (12) счетно.

Для завершения доказательства осталось заметить, что если $\sigma \neq \sigma'$, то соотношение

$$\langle H, \tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}' \rangle = 0,$$

которое следует из теорем 9 и 10, есть частный случай (12).

2.6. Плотность эйлеровой характеристики. Мы приступаем к доказательству теоремы 9. Рассмотрим часть пространства $\mathbb{R}^3$, лежащую “ниже” поверхности M_E :

$$\widehat{\xi}_E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) \leq E\}.$$

Мы хотим исследовать асимптотическое поведение эйлеровой характеристики пересечения

$$Q_{R,A,v} \cap \widehat{\xi}_E,$$

когда $R \rightarrow \infty$. Чтобы избежать трудностей с “граничным эффектом” мы воспользуемся следующей леммой. Зафиксируем некоторое $\varepsilon > 0$.

ЛЕММА 5. *Существуют константы C_1 и C_2 такие, что для любых $R > \varepsilon$, $A \in \mathbb{R}^3$ и v такого, что $\langle H, v \rangle = 0$, в плоскости $P_{H(A)}$ существует связная и односвязная область $Q'_{R,A,v}$ такая, что*

$$Q_{R-\varepsilon,A,v} \subset Q'_{R,A,v} \subset Q_{R,A,v}$$

и ограничение функции f на границу $\partial Q'_{R,A,v}$ имеет не более $C_1 R + C_2$ критических точек.

Доказательство незначительной модификации этого утверждения можно найти в [4]. Предосторожности, связанные с граничным эффектом, излишни для достаточно хороших, например аналитических, функций. Для произвольной функции можно также избежать граничного эффекта, если взять *среднее значение* величины $\chi_{R,A,v}$ по всем A из фундаментальной области тора $\mathbb{T}^3$ (см. ниже).

Обозначим через $\chi_{R,A,v}$ эйлерову характеристику пересечения $Q'_{R,A,v} \cap \widehat{\xi}_E$:

$$\chi_{R,A,v}(E) = \chi(Q'_{R,A,v} \cap \widehat{\xi}_E).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Предел

$$\overline{\chi}_E = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\chi_{R,A,v}(E)}{R^2}$$

существует и равен алгебраической плотности замкнутых траекторий, лежащих на $\widehat{M}_E$:

$$\overline{\chi}_E = \rho.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эйлерова характеристика множества $Q'_{R,A,v} \cap \widehat{\xi}_E$ с очевидностью равна

$$\chi_{R,A,v} = b_0(Q'_{R,A,v} \cap \widehat{\xi}_E) - b_0(Q'_{R,A,v} \setminus \widehat{\xi}_E) + 1,$$

где $b_0(X)$ обозначает число связных компонент множества X (нулевое число Бетти). Число связных компонент множества $Q'_{R,A,v} \cap \widehat{\xi}_E$, не пересекающих границу $\partial Q'_{R,A,v}$, совпадает с числом замкнутых электроно-подобных траекторий, целиком лежащих в $Q'_{R,A,v}$. Число прочих компонент имеет порядок $O(R)$ согласно лемме 5. Таким образом, имеем

$$b_0(Q'_{R,A,v} \cap \widehat{\xi}_E) = n_{R,A,v}^+ + O(R) \quad (R \rightarrow \infty).$$

Аналогично,

$$b_0(Q'_{R,A,v} \setminus \widehat{\xi}_E) = n_{R,A,v}^- + O(R) \quad (R \rightarrow \infty).$$

Следовательно,

$$\chi_{R,A,v} = n_{R,A,v}^+ - n_{R,A,v}^- + O(R) = \rho \cdot R^2 + o(R^2).$$

Чтобы доказать теорему 9, мы вычислим $\overline{\chi}_E$ другим способом с помощью теории Морса.

Пусть β — некоторая ориентированная кривая или, вообще, сингулярная 1-цепь в $\mathbb{T}^3$ такая, что ограничение формы dH на (регулярную часть) β имеет конечное число критических точек. Мы обозначим через $\epsilon(Q'_{R,A,v} \frown \beta)$ алгебраическое число точек пересечения квадрата $Q'_{R,A,v}$ с прообразом $\pi^{-1}(\beta)$ (значение аугментации на цикле пересечения). Следующее утверждение есть незначительное обобщение леммы 4.

ЛЕММА 6. *При $R \rightarrow \infty$ мы имеем*

$$\epsilon(Q'_{R,A,v} \frown \beta) = \left(\int_{\beta} dH + o(1) \right) \cdot R^2.$$

Обозначим через l_H прямую в $(\mathbb{R}^3)^*$ с направляющим вектором H . Рассмотрим прообраз β прямой l_H при отображении градиента $\nabla f: \mathbb{T}^3 \rightarrow (\mathbb{R}^3)^*$:

$$\beta = \{x \in \mathbb{T}^3 \mid \nabla f(x) = \lambda H\}.$$

Ориентируем β следующим образом. Мы выберем H в качестве положительного направления прямой l_H . Теперь возьмем некоторую *коориентацию* на l_H , т.е. некоторую 2-форму ν , дополняющую dH до формы объема. Например, $\nu = *(dH)$. Если f — функция общего положения, то ограничение прообраза $(\nabla f)^*\nu$ этой формы на подпространство, нормальное к β , не обращается в нуль всюду за исключением, быть может, конечного числа точек кривой β . Это ограничение мы возьмем в качестве коориентации кривой β , что задаст нам ориентацию на β . Нетрудно видеть, что вместе с такой ориентацией кривая β есть *замкнутый цикл*, $\partial\beta = 0$.

Опишем сингулярный цикл β более подробно. Он состоит из всех тех точек A , которые являются критическими для 1-формы $\omega_{f(A)}$ на поверхности $M_{f(A)}$, что равносильно условию: любая точка $\tilde{A}$ из полного прообраза $\pi^{-1}(A)$ является также критической точкой ограничения функции f на плоскость $P_{H(\tilde{A})}$. Почти все точки цикла β разбиваются на два класса: точки типа максимума или минимума и точки типа седла (это разбиение не зависит от того, рассматриваем ли мы эти точки как критические для 1-формы ω_E на M_E или как критические точки функции f , ограниченной на плоскость P_h). Цикл β специально был ориентирован таким образом, чтобы в точках типа максимума/минимума функция $H|_{\beta}$ возрастала в направлении ориентации, а в точках типа седла — убывала.

Цикл β обязательно содержит все критические точки самой функции f . Заметим, что если f — морсовская функция, то все ее критические точки являются *регулярными*

Рис. 1. Кривая β возле максимума или минимума f Рис. 2. Часть кривой β типа максимум/минимум возле критической точки функции f индекса 1 или 2

точками цикла β , поскольку отображение градиента ∇f является локальным диффеоморфизмом в окрестности такой точки. Поведение кривой β возле критической точки функции f (а точнее, поведение ее накрывающей в $\mathbb{R}^3$) в случае самого общего положения показано на рис. 1–3.

В случае общего положения возможны также точки максимума или минимума 1-формы H , ограниченной на кривую β . Такие точки лежат на границе между максимально-минимальной и седловой частями кривой β . Поведение траекторий возле таких точек показано на рис. 4.

Легко видеть, что цикл пересечения $M_E \cap \beta$ совпадает с σ_E . Для функции f и формы H общего положения все, кроме конечного числа, поверхности M_E пересекают кривую β трансверсально. Когда E проходит через критическое значение функции f , число критических точек в σ_E увеличивается (или уменьшается) на 2, и при этом две новые критические точки имеют одинаковые типы, но значения $\text{sign}\langle H, \nabla f \rangle$ в них противоположны. Когда E проходит через значение функции f в точке типа той, что

Рис. 3. Седловая часть кривой β возле критической точки функции f индекса 1 или 2

Рис. 4. Точка минимума $dH|_{\beta}$

показана на рис. 4, также рождается (или исчезает) пара критических точек 1-формы ω_E , но теперь новые точки имеют различные типы, а значения $\text{sign}\langle H, \nabla f \rangle$ в них совпадают.

Обозначим через β_E часть цикла β , лежащую “под M_E ”:

$$\beta_E = \beta \cap \xi_E.$$

ЛЕММА 7. Плотность эйлеровой характеристики сечения множества $\hat{\xi}_E$ плоскостью P_h равна

$$\overline{\chi}_{E,H} = \int_{\beta_E} dH.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы применим элементарную теорию Морса. Эйлерова характеристика $\chi_{R,A,v}$ пересечения $Q'_{R,A,v} \cap \hat{\xi}_E$ равна с точностью до $O(R)$ числу

точек максимума/минимума функции $f|_{Q'_{R,A,v} \cap \widehat{\xi}_E}$ минус число седловых критических точек. Множество критических точек функции $f|_{P_h}$ совпадает с пересечением $P_h \cup \pi^{-1}(\beta)$. Для невырожденной критической точки A ограничения $f|_{P_h}$ ориентация плоскости P_h (заданной 1-формой коориентации dH) совпадает с коориентацией кривой $\pi^{-1}(\beta)$ в точке A , если A есть точка максимума или минимума функции $f|_{P_h}$, и противоположна коориентации кривой $\pi^{-1}(\beta)$, если A есть седловая точка. Таким образом,

$$\chi(Q'_{R,a,v} \cap \widehat{\xi}_E) = \epsilon(Q'_{R,a,v} \frown \widehat{\beta}_E) + o(R^2).$$

Применение леммы 6 завершает доказательство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 9. Мы имеем

$$\sigma = \partial \beta_E.$$

Возьмем какую-нибудь 1-цепь $\widetilde{\beta}_E$ такую, что $\pi(\widetilde{\beta}_E) = \beta_E$. Положим $\widetilde{\sigma} = \partial \widetilde{\beta}_E$. Утверждение 1) теоремы 9 теперь очевидно. Утверждение 2) следует из леммы 7, предложения 1 и формулы Гаусса:

$$\rho_E = \overline{\chi}_E = \int_{\beta_E} dH = \int_{\widetilde{\beta}_E} dH = \langle H, \widetilde{\sigma}_E \rangle.$$

Что же касается утверждения 3), заметим, что для любой линейной функции l 1-форма dl есть корректно определенная 1-форма на $\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$. Имеем:

$$\langle \widetilde{\sigma}, l \rangle = \int_{\beta_E} dl.$$

При малых возмущениях функции f , уровня E и формы H последний интеграл меняется мало.

2.7. Критический цикл и средняя плотность эйлеровой характеристики. Мы завершаем этот раздел конструкцией, обобщающей 0-цикл σ_E и результаты, связывающие σ_E с плотностью эйлеровой характеристики. Это обобщение не связано с основным предметом исследования настоящей работы.

Пусть f — функция общего положения на n -мерном торе $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, $H_1, \dots, H_n$ — базис в пространстве линейных функций на $\mathbb{R}^n$ такой, что

$$\int_{\mathbb{T}^n} dH_1 \wedge \dots \wedge dH_n = 1.$$

Снова обозначим через M_E поверхность уровня $f(x) = E$, а через ξ_E — множество точек x таких, что $f(x) \leq E$.

Пусть $0 < k < n$. Рассмотрим сечения множества $\widehat{\xi}_E = \pi^{-1}(\xi_E)$ k -мерными плоскостями вида

$$P_h = \{x \in \mathbb{R}^n \mid H_i(x) = h_i, i = k+1, \dots, n\}, \quad h = (h_{k+1}, \dots, h_n).$$

Для $A \in \mathbb{R}^n$ обозначим через $Q_{R,A}$ “куб с ребром R ” в плоскости P_h , где $h = (H_{k+1}(A), \dots, H_n(A))$:

$$Q_{R,A} = \{x \in P_h \mid -R/2 \leq H_i(x - A) \leq R/2, i = 1, \dots, k\}.$$

Функция

$$\chi_{E,R,A} = \chi(\widehat{\xi}_E \cap Q_{R,A})$$

является n -периодической функцией от A :

$$\chi_{E,R,A+v} = \chi_{E,R,A} \quad \forall v \in \mathbb{Z}^n.$$

Таким образом, мы можем рассматривать $\chi_{E,R,\cdot}$ как функцию на $\mathbb{T}^n$ и определить *среднее значение*

$$\chi_{E,R} = \int_{\mathbb{T}^n} \chi_{E,R,A} dA.$$

Нас интересует предел

$$(13) \quad \overline{\chi}_E = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\chi_{E,R}}{R^k},$$

который мы назовем *средней плотностью эйлеровой характеристики*.

Обозначим через σ_E подходящим образом ориентированную (см. ниже) сингулярную $(n - k - 1)$ -цепь из $\Omega_{n-k-1}(M_E)$, состоящую из точек x таких, что 1-формы $dH_i|_{M_E}, i = k + 1, \dots, n$, линейно зависимы в точке x .

ТЕОРЕМА 11. 1) Цепь σ_E есть замкнутый $(n - k - 1)$ -цикл.

2) Существует предел (13).

3) Существует $(n - k - 1)$ -цикл в $\mathbb{R}^n$, $\tilde{\sigma}_E \in \Omega_{n-k-1}(\mathbb{R}^n)$, такой, что $\pi_*(\tilde{\sigma}_E) = \sigma_E$ и

$$(14) \quad \overline{\chi}_E = \int_{\tilde{\sigma}_E} H_{k+1} \cdot dH_{k+2} \wedge \dots \wedge dH_n.$$

Мы называем σ_E *критическим циклом*. Его ориентация определяется следующим образом. На $\mathbb{T}^n$ существуют единственный набор функций $a_1(x), \dots, a_n(x)$ такой, что $\nabla f(x) = a_1 dH_1 + \dots + a_n dH_n$. Точки цепи σ_E являются решениями системы уравнений $a_i(x) = 0, i = 1, \dots, k$. Мы требуем, чтобы касательная $(n - k - 1)$ -форма τ , задающая ориентацию цепи σ_E , удовлетворяла условию: n -форма $da_1 \wedge \dots \wedge da_k \wedge \nabla f \wedge \tau$ отличается от $dH_1 \wedge \dots \wedge dH_n$ положительным множителем во всех точках $x \in \sigma_E$ таких, что форма $da_1 \wedge \dots \wedge da_k$ не обращается в нуль на нормальном подпространстве к σ_E . В случае общего положения это условие корректно определяет ориентацию цепи σ_E .

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Поскольку грани куба $Q_{R,A}$ являются кубами меньшей размерности, индукцией по k можно вывести точную формулу для $\chi_{E,R}$, которая будет иметь вид

$$\chi_{E,R} = \lambda_k R^k + \dots + \lambda_1 R + \lambda_0,$$

где λ_i – линейные комбинации интегралов вида (14) по соответствующим критическим циклам размерности $i \leq k$, λ_0 – это объем области ξ_E .

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Плотность эйлеровой характеристики $\chi_{E,R}$ рассматривалась ранее в работе [12], где она вычислена через секционную кривизну поверхности уровня M_E .

3. Зоны устойчивости

3.1. Минимальные компоненты общего положения. Пусть линейная форма H полностью иррациональна, и, таким образом, траектории на M_E не могут быть периодическими, а могут быть либо замкнутыми гомологичными нулю в T^3 , либо всюду плотными в некоторой части поверхности M_E . Мы называем замыкание незамкнутой траектории *минимальной компонентой* слоения $F_{E,H}$. Сепаратрисные циклы разрезают поверхность M_E на конечное число минимальных компонент и цилиндров, заполненных замкнутыми траекториями.

Пусть M_E — поверхность уровня общего положения, а точнее, такая, что 1-форма $\omega_E = (H_1 dx_1 + H_2 dx_2 + H_3 dx_3)|_{M_E}$ является морсовской и не выполнено ни одно соотношение вида (12). Тогда в силу иррациональности H каждое сечение $\Gamma_{E,h}$ может иметь не более одной особой точки. *A priori* можно ожидать четыре различных типа особых линий уровня 1-формы ω_E (т.е. особых компонент $\Gamma_{E,h}$):

- тип 1) изолированная точка максимума или минимума 1-формы ω_E ;
- тип 2) “восьмерка”, т.е. седловая критическая точка с двумя сепаратрисными циклами;
- тип 3) критическая точка с одним сепаратрисным циклом и двумя “хвостами”, уходящими в бесконечность (см. рис. 5 а));
- тип 4) седловая критическая точка с четырьмя хвостами, уходящими в бесконечность (см. рис. 5 б)).

Рис. 5. Особые линии уровня типа 3 и 4

Малая окрестность особой линии уровня типа 1 или 2 состоит только из замкнутых траекторий.

Сепаратрисный цикл, содержащийся в особой линии уровня типа 3 отделяет некоторую минимальную компоненту, заполненную открытыми траекториями, от некоторого цилиндра замкнутых траекторий.

Любая седловая точка, лежащая на особой линии уровня типа 4, обязана быть *внутренней* точкой некоторой минимальной компоненты, что противоречило бы следствию 1. Действительно, такая седловая точка должна входить в 0-цикл σ с коэффициентом ± 1 , но не входит в 0-цикл σ' . Это невозможно, поскольку в нашем случае $\sigma = \sigma'$. Таким образом, на поверхности уровня общего положения при иррациональном H могут появляться только особые линии уровня типов 1–3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *В случае поверхности M_E и линейной формы H общего положения любая минимальная компонента слоения F_E является двумерным тором с конечным числом (может быть, нулевым) дырок. Каждая дырка является сепаратрисным циклом, состоящим из седловой критической точки 1-формы ω_E и сепаратрисы, примыкающей к седлу с двух сторон.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как мы только что видели, любая компонента границы любой минимальной компоненты L , заполненной открытыми траекториями, имеет вид сепаратрисного цикла, который входит в состав особой линии уровня типа 3 1-формы ω_E , и 1-форма ω_E не имеет критических точек внутри минимальной компоненты. Приклеим плоский двумерный диск D_γ к каждой компоненте γ границы ∂L . Полученная поверхность L' не имеет границы, а особенности ограничения 1-формы $H_1 dx_1 + H_2 dx_2 + H_3 dx_3$ на L' выглядят, как показано на рис. 6 а). Суммарный вклад такой особенности в топологический индекс соответствующего слоения равен нулю. Действительно, после стягивания диска D_γ в точку полученное слоение топологически эквивалентно слоению, не имеющему особенности в этой точке (рис. 6 б)).

Рис. 6. Стягивание диска D_γ в точку

Следовательно, эйлерова характеристика поверхности L' равна нулю, откуда L' – двумерный тор.

Пусть снова M_E – поверхность уровня общего положения, а H – линейная форма общего положения такие, что некоторая траектория на M_E незамкнута и не выполнено ни одно из условий (12). Пусть $L_1, \dots, L_p$ – двумерные торы, полученные из минимальных компонент приклеиванием плоских дисков вида D_γ к каждой компоненте γ границы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. i) *Торы $L_1, \dots, L_p$ задают один и тот же с точностью до знака неделимый элемент в $H_2(\mathbb{T}^3, \mathbb{Z})$:*

$$(15) \quad 0 \neq [L_1] = \pm[L_2] = \dots = \pm[L_p] \in H_2(\mathbb{T}^3, \mathbb{Z}).$$

ii) *Число p минимальных компонент слоения F_E , заполненных открытыми траекториями, четно.*

iii) *Для любых E', H' , достаточно близких соответственно к E и H (причем H' иррационального), число минимальных компонент слоения $F_{E', H'}$, заполненных открытыми траекториями, равно p , все они являются двумерными торами с дырками и имеют тот же (с точностью до знака) гомологический класс (15).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. i) Для начала докажем, что каждый гомологический класс $[L_i]$ ненулевой. Действительно, если бы это было не так, мы бы имели: образ первых гомологий $H_1(L_i, \mathbb{Z})$ при вложении $L_i \rightarrow \mathbb{T}^3$ есть либо одномерная подрешетка в $\mathbb{Z}^3$, либо $\{0\}$. В последнем случае каждая связная компонента $\mathbb{Z}^3$ -накрывающей поверхности $\hat{L}_i$ компактна. В первом же случае каждая связная компонента поверхности $\hat{L}_i$ лежит в конечной окрестности некоторой прямой, имеющей целочисленное направление. В обоих случаях все сечения поверхности $\hat{L}_i$ плоскостями P_h имеют лишь компактные компоненты.

Далее, поверхности L_i по построению не пересекаются и не имеют самопересечений. Действительно, они были получены из части поверхности M_E , состоящей из открытых траекторий, приклеиванием дисков вида D_γ , где γ — сепаратрисный цикл. Пересечение внутренней части такого диска с поверхностью M_E может состоять только из замкнутых траекторий. Пересечение этих дисков с *внутренней* частью минимальных компонент невозможно. Как следствие, мы получаем

$$[L_i] \frown [L_j] = 0,$$

откуда следует (15).

ii) Объединение всех торов L_i получается из поверхности M_E конечным числом морсовских перестроек: удаления 1-ручки и приклеивания двух дисков вместо нее. Как следствие, имеем

$$\sum_{i=1}^p [L_i] = [M_E] = 0,$$

откуда $p \equiv 0 \pmod{2}$.

iii) Мы уже видели, что замкнутые траектории устойчивы относительно малых возмущений. Это означает, что если E', H' достаточно близки к E и H соответственно, то каждому цилиндру K замкнутых траекторий слоения $F_{E,H}$ соответствует цилиндр K' замкнутых траекторий слоения $F_{E',H'}$, близкий к K . Мы должны показать, что в случае общего положения незамкнутые траектории не разрушаются, т.е. минимальные компоненты не распадаются в объединение вновь образовавшихся цилиндров замкнутых траекторий.

Пусть L_i^0 — минимальная компонента, из которой получен тор L_i приклеиванием дисков вида D_γ к компонентам $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ границы ∂L_i^0 . Для E' и H' , достаточно близких к E и H соответственно, имеются сепаратрисные циклы $\gamma'_1, \dots, \gamma'_r$, близкие к циклам $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ соответственно, которые отрезают от поверхности M'_E тор с дырками $L_i'^0$, близкий к L_i^0 . Приклеивая диски $D_{\gamma'_j}$ к границе $\partial L_i'^0$, получаем тор L'_i , близкий к L_i и имеющий тот же гомологический класс: $[L'_i] = [L_i] \neq 0$. Как мы видели выше, стягивание дисков D_{γ_j} в точку дает слоение без особых точек. Очевидно, это будет верно и для соответствующего слоения на L'_i . Следовательно, либо все траектории на L'_i замкнуты, либо все незамкнуты. Следующая очевидная лемма показывает, что первый случай невозможен.

ЛЕММА 8. Пусть L — замкнутая поверхность, вложенная в $\mathbb{T}^3$, такая, что гомологический класс $[L] \in H_2(\mathbb{T}^3)$ ненулевой. Тогда пересечение любой плоскости P , “не параллельной” $[L]$ (например, имеющей иррациональное направление), с прообразом $\hat{L} = \pi^{-1}(L) \subset \mathbb{R}^3$ имеет неограниченные компоненты.

3.2. Множество $U(H)$ – замкнутый отрезок. Здесь мы дадим доказательство теоремы 1, которое будет состоять из лемм 9–11.

Пусть линейная форма H (необязательно иррациональная) фиксирована. Будем использовать следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\xi_E^+ &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) \geq E\}, \\ \xi_E^- &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) \leq E\}, \\ \Gamma_{E,h}^\pm &= \widehat{\xi}_E^\pm \cap P_h.\end{aligned}$$

Пусть U^+ (соответственно, U^-) – множество уровней E таких, что множество $\Gamma_{E,h}^+$ (соответственно, $\Gamma_{E,h}^-$) имеет только компактные связные компоненты для любого $h \in \mathbb{R}$. Очевидно, что если $E \in U^+$ (соответственно, $E \in U^-$), то $[E, +\infty) \subset U^+$ (соответственно $(-\infty, E] \subset U^-$).

ЛЕММА 9. *Множества $U^\pm$ открыты.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $E \in U^\pm$, то все траектории на M_E замкнуты. Наше утверждение следует из устойчивости замкнутых траекторий (лемма 1) и того факта, что пространство замкнутых траекторий на M_E с индуцированной топологией компактно.

Таким образом, множества $U^\pm$ имеют вид

$$U^- = (-\infty, E_1), \quad U^+ = (E_2, +\infty).$$

ЛЕММА 10. *Множества U^+ и U^- не пересекаются:*

$$E_2 \geq E_1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как легко следует из леммы 1, если $E \in U^+$ (соответственно, $E \in U^-$), то существует константа C такая, что любая связная компонента сечения $\Gamma_{E,h}^+$ (соответственно, сечения $\Gamma_{E,h}^-$) имеет диаметр меньше C для любого h . Но вещественную плоскость P_h нельзя представить в виде объединения двух множеств $\Gamma_{E,h}^\pm$, каждое из которых имеет равномерно ограниченные связные компоненты.

ЛЕММА 11. *Объединение множеств U , U^+ и U^- есть вся вещественная прямая $\mathbb{R}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $E \notin (U^+ \cup U^-)$. Мы должны показать, что $E \in U$.

Из леммы 1, следует, что существует константа C такая, что все компактные компоненты множеств $\Gamma_{E,h}^\pm$ имеют диаметр меньше C . Обозначим через A^+ (соответственно, через A^-) множество таких $h \in \mathbb{R}$, что все связные компоненты сечения $\Gamma_{E,h}^+$ (соответственно, $\Gamma_{E,h}^-$) компактны и, следовательно, имеют диаметр меньше C . По предположению ни одно из множеств $A^\pm$ не покрывает всю прямую $\mathbb{R}$. Теперь покажем, что объединение $A^+ \cup A^-$ также не покрывает $\mathbb{R}$.

Действительно, пусть $h \in A^+$. Тогда $P_h \setminus \Gamma_{E,h}^+$ — открытое подмножество плоскости P_h , имеющее неограниченные компоненты. Отсюда следует, что для h' , достаточно близкого к h , множество $\Gamma_{E,h'}^-$ имеет среди прочих достаточно большие компоненты, т.е. имеющие диаметр $> C$, и следовательно, имеет неограниченные компоненты. Это означает, что $h' \notin A^-$. Аналогично, можно показать, что если $h \in A^-$, то малая окрестность точки h имеет пустое пересечение с A^+ . Следовательно, $\partial A^+ \cap \partial A^- = A^+ \cap \partial A^- = \emptyset$, что невозможно при $A^+ \cup A^- = \mathbb{R}$.

Теперь пусть $h \notin (A^+ \cup A^-)$. Мы утверждаем, что сечение $\Gamma_{E,h}$ имеет неограниченные компоненты. Действительно, пусть X и Y — внутренние точки неограниченных компонент подмножеств $\Gamma_{E,h}^+$ и $\Gamma_{E,h}^-$ соответственно. Возьмем произвольную кривую α , трансверсальную к $\Gamma_{E,h}$, соединяющую точки X и Y . Число точек пересечения кривой α с компактными связными компонентами сечения $\Gamma_{E,h}$ обязано быть четным. С другой стороны, число точек пересечения в $\alpha \cap \Gamma_{E,h}$ должно быть нечетным. Следовательно, множество $\Gamma_{E,h}$ имеет неограниченные компоненты.

3.3. Существенные компоненты. Удалим из поверхности M_E объединение $M_{E,H}^0$ всех регулярных замкнутых траекторий. Обозначим оставшуюся часть $M_E \setminus M_{E,H}^0$ через $M_{E,H}^1$. Она не обязательно имеет вид поверхности с краем, но во всяком случае это двумерный (в некоторых исключительных случаях одномерный) CW-комплекс. Пусть $N_1, \dots, N_r$ — его связные компоненты. Для каждого $i \leq r$ пусть d_i обозначает размерность образа первой группы гомологий компоненты N_i при вложении $N_i \rightarrow \mathbb{T}^3$. Эта размерность может быть равна 0, 1, 2 или 3.

Число d_i имеет простую геометрическую интерпретацию. Рассмотрим связную компоненту $\tilde{N}_i$ $\mathbb{Z}^3$ -накрывающей $\tilde{N}_i \subset \mathbb{R}^3$ компоненты N_i . Если компонента $\tilde{N}_i$ компактна, то $d_i = 0$ (это в точности означает, что N_i — особая компактная линия уровня 1-формы ω_E , разделяющая цилиндры замкнутых траекторий или всего одна точка — точка максимума или минимума 1-формы ω_E). Если $d_i = 1$, то компонента $\tilde{N}_i$ неограничена, но лежит в конечной окрестности прямой, имеющей целочисленное направление. Условие $d_i = 2$ означает, что $\tilde{N}_i$ лежит в конечной окрестности некоторой целочисленной плоскости. В случае $d_i = 3$ мы имеем $\tilde{N}_i = \tilde{N}_i$.

Будем говорить, что N_i — *существенная компонента* слоения $F_{E,H}$, если $d_i \geq 2$. Легко видеть, что в случае $d_i = 1$ компонента N_i заполнена периодическими траекториями.

Положим

$$d(E, H) = \max_{1 \leq i \leq r} d_i.$$

Очевидно, условие $d(E, H) \geq 1$ в точности означает, что $E \in U(H) = [E_1(H), E_2(H)]$. Функции $E_1(H)$ и $E_2(H)$, вообще говоря, не являются непрерывными. Причина этого в неустойчивости компонент N_i , для которых $d_i = 1$. Точнее, если $d(E, H) = 1$, то для любой полностью иррациональной формы H' , достаточно близкой к H , будем иметь $d(E, H') = 0$.

В разделе 3.1 мы видели примеры, в которых условие $d(E, H) = 2$ выполнено для некоторого открытого множества пар (E, H) . Равенство $d(E, H) = 0$ также устойчиво при малых возмущениях (лемма 1). Таким образом, наша идея состоит в рассмотрении множества тех E , для которых имеются существенные компоненты ($d \geq 2$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для любой формы H множество $\tilde{U}(H) = \{E \mid d(E, H) \geq 2\}$ есть замкнутый отрезок или ровно одна точка:

$$\tilde{U}(H) = [\tilde{E}_1, \tilde{E}_2], \quad \tilde{E}_1 \leq \tilde{E}_2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем, что если $d(E, H) = 1$, то неравенство $d(E', H) \leq 1$ выполнено либо для всех $E' > E$, либо для всех $E' < E$.

Без ограничения общности можно считать, что $d_1 = d_2 = \dots = d_t = 1$, $d_{t+1} = \dots = d_r = 0$. Граница комплекса $N_1 \cup \dots \cup N_t$ имеет вид объединения сепаратрисных циклов. Приклеим диски D_γ вида (8) к границе объединения $N_1 \cup \dots \cup N_t$. Мы утверждаем, что полученный CW-комплекс N_E является на самом деле кусочно-гладкой поверхностью, вложенной в $\mathbb{T}^3$. Она наделена ориентацией, наследованной от M_E , и ее класс гомологий равен нулю, $[N_E] = 0$.

Действительно, N_E можно получить из M_E заменой каждого цилиндра замкнутых траекторий двумя (или одним) дисками вида D_γ , где γ — основание цилиндра, и затем удаления компактных особых линий уровня $N_{t+1}, \dots, N_r$, разделяющих цилиндры замкнутых траекторий. Поверхность N_E не имеет самопересечений, так как пересечение внутренней части любого диска D_γ с M_E может состоять только из замкнутых траекторий.

Поверхность N_E разделяет тор $\mathbb{T}^3$ на две части, B_E и W_E : $\partial B_E = -\partial W_E = N_E$. Их $\mathbb{Z}^3$ -накрывающие в $\mathbb{R}^3$ можно описать следующим образом.

Возьмем произвольную точку X в $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим плоскость P_h , проходящую через нее, $h = \langle H, X \rangle$. Пересечение $\Gamma_{E,h}$ плоскости P_h и поверхности M_E разделяет P_h на две части $\Gamma_{E,h}^\pm$. Раскрасим неограниченные компоненты множества $\Gamma_{E,h}^-$ в черный цвет, а неограниченные компоненты множества $\Gamma_{E,h}^+$ — в белый. Теперь раскрасим диски, ограниченные замкнутыми компонентами сечения $\Gamma_{E,h}$ в тот же цвет, в который окрашена их внешность (см. рис. 7). Если мы сделаем это для всех плоскостей P_h , то вся внутренняя часть множества $\widehat{B}_E$ окажется окрашенной в черный цвет, а внутренняя часть $\widehat{W}_E$ — в белый.

Рис. 7. Раскраска плоскости P_h

Равенство $d(E, H) = 1$ означает, что по меньшей мере одно из множеств B_E и W_E имеет только компоненты, ограниченные в двух направлениях, т.е. лежащие в конечной окрестности некоторой прямой. Пусть X и Y — точки, не лежащие внутри ограниченных в двух направлениях компонент множеств B_E и W_E . Тогда их можно соеди-

нить путем, не пересекающим N : в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ всегда можно “обойти” множество, лежащее в конечной окрестности прямой, если только мы не находимся внутри него. Следовательно, точки X и Y одного цвета.

Заметим теперь, что если $E' < E$, то $B_{E'} \subset B_E$ и $W_{E'} \supset W_E$. Следовательно, если $\widehat{B}_E$ (соответственно, $\widehat{W}_E$) имеет только компоненты, ограниченные в двух направлениях, то это верно и для $E' < E$ (соответственно, для $E' > E$). Таким образом, дополнение к множествам $\widetilde{U}^-$ и $\widetilde{U}^+$, состоящим из значений E таких, что соответственно $\widetilde{B}_E$ и $\widetilde{W}_E$ имеют только компоненты, ограниченные в двух направлениях, связно.

По аналогии со случаем замкнутых траекторий можно показать, что множества $\widetilde{U}^\pm$ открыты и, таким образом, имеют вид $\widetilde{U}^- = (-\infty, \widetilde{E}_1)$, $\widetilde{U}^+ = (\widetilde{E}_2, +\infty)$. Неравенство $\widetilde{E}_2 > \widetilde{E}_1$ следует из того факта, что пространство $\mathbb{R}^3$ нельзя представить в виде объединения двух частей, каждая из которых имеет только равномерно ограниченные в двух направлениях компоненты (хотя направления, в которых эти компоненты неограничены, могут быть различны для разных компонент).

3.4. k -подчиненность. Мы видели в разделе 3.1, что в ситуации общего положения каждая минимальная компонента представляет собой двумерный тор (с дырками) и гомологический класс этого тора ненулевой. Но нам нужно также рассматривать “более вырожденные” ситуации, поскольку для фиксированной функции f мы имеем однопараметрическое семейство поверхностей M_E и дупараметрическое семейство линейных функций H . Чтобы сделать возможным рассмотрение вырожденных случаев, мы введем следующее понятие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть k – некоторый двумерный гомологический класс тора $\mathbb{T}^3$, $k \in H_2(\mathbb{T}^3, \mathbb{Z})$. Мы говорим, что пара (M_E, H) , поверхность уровня $+$ линейная форма, *подчинена* классу k , если существует кусочно-гладкая связная поверхность L , вложенная в тор $\mathbb{T}^3$, такая, что:

- i) $[L] = k$,
- ii) поверхность L состоит из двух частей: $L = L^f \cup L^H$, $\partial L^f = \partial L^H$, где $L^f = L \cap M_E$, а L^H имеют вид объединения дисков вида (8):

$$L^H = D_{\gamma_1} \cup \dots \cup D_{\gamma_s},$$

$\gamma_1, \dots, \gamma_s$ – замкнутые траектории или сепаратрисные циклы.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Заметим, что элемент $k \in H_2(\mathbb{T}^3, \mathbb{Z})$ в этом определении должен быть неделимым. Действительно, если $[L]/n \in H_2(\mathbb{T}^3, \mathbb{Z})$, где $n > 1$, то поверхность L обязана иметь самопересечения.

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Часть L^f поверхности L в определении 5 не обязана быть поверхностью с краем. Может даже случиться, что $L^f = \partial L^f$, и это действительно имеет место в некоторых интересных случаях.

ЗАМЕЧАНИЕ 12. Очевидно, что в случае общего положения, описанного в разделе 3.1, пара (M_E, H) подчинена классу k , где k – гомологический класс (15).

ЗАМЕЧАНИЕ 13. С помощью двойственности Пуанкаре мы можем отождествить двойственную решетку $(\mathbb{Z}^3)^*$, канонически изоморфную первой группе когомологий $H^1(\mathbb{T}^3, \mathbb{Z})$, со второй группой гомологий $H_2(\mathbb{T}^3, \mathbb{Z})$. Таким образом, мы можем рассматривать гомологический класс $k \in H_2(\mathbb{T}^3, \mathbb{Z})$ как линейную форму на $\mathbb{R}^3$ с целыми коэффициентами.

ЛЕММА 12. Если пара (M_E, H) подчинена некоторому классу $k \in (\mathbb{Z}^3)^* = H_2(\mathbb{T}^3, \mathbb{Z})$, то $E \in \tilde{U}(H)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это – непосредственное следствие леммы 8.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть форма H и функция f фиксированы. Предположим, что поверхности $M_{E'}$ и $M_{E''}$, $E' < E''$, подчинены классам k_1 и k_2 соответственно. Тогда:

- i) $k_1 = \pm k_2$;
- ii) для любого $E \in (E', E'')$ существует положительное ε такое, что пара (M_E, H') также подчинена классу k , если $|H' - H| < \varepsilon$.

ЗАМЕЧАНИЕ 14. Может оказаться (и, как мы увидим, это бывает верно для функций f общего положения), что пара (M_E, H) подчинена одновременно двум различным классам k_1 и k_2 . В этом случае $d(E, H) = 3$, $E = \tilde{E}_1(H) = \tilde{E}_2(H)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть поверхности L_1 и L_2 удовлетворяют условию определения 5 для поверхностей уровня $M_{E'}$ и $M_{E''}$ соответственно. Мы утверждаем, что поверхности L_1 и L_2 могут быть выбраны непересекающимися друг друга.

Действительно, имеем $L_1^f \cap L_2^f = \emptyset$. Так как L_1^H есть объединение семейства дисков вида (8), пересечение $L_1^H \cap L_2$ может иметь компоненты двух типов: замкнутые траектории и диски вида (8). В обоих случаях удалим из L_2 эти компоненты пересечения вместе с малыми окрестностями, состоящими их замкнутых траекторий, и приклеим новые диски вида (8) к полученным дыркам, как показано на рис. 8.

Рис. 8. Исправление поверхности L_2

Аналогичным образом можно исправить поверхность L_1 так, чтобы она не пересекала L_2^H .

Таким образом, без ограничения общности можно предполагать, что $L_1 \cap L_2 = \emptyset$. Следовательно, $k_1 \frown k_2 = [L_1] \frown [L_2] = 0$, откуда следует $k_1 = \lambda k_2$, $\lambda \in \mathbb{Q}$. Так как оба элемента $k_{1,2}$ неделимы, мы имеем $\lambda = \pm 1$.

Пусть теперь $E' < E < E''$. Легко показать, что поверхности $L_{1,2}$ разрезают тор $\mathbb{T}^3$ на две части: $\mathbb{T}^3 = T_1 \cup T_2$, $\partial T_1 = \partial T_2 = L_1 \cup L_2$. Рассмотрим часть поверхности M_E , которая лежит в T_1 , т.е. $M_E \cap T_1$. По построению ее граница есть $\partial(M_E \cap T_1) = M_E \cap (L_1 \cup L_2) = M_E \cap (L_1^H \cup L_2^H)$. Она имеет вид

$$\partial M_E \cap T_1 = \alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_q,$$

где α_i — замкнутые траектории или сепаратрисные циклы. Мы утверждаем, что поверхность

$$L = (M_E \cap T_1) \cup D_{\alpha_1} \cup \dots \cup D_{\alpha_q}$$

удовлетворяет условию определения 5.

Действительно, мы имеем $[L] \frown [L_1] = 0$, и, следовательно, мы должны только проверить, что $[L] \neq 0$. Возьмем две точки $X \in L_1^f$, $Y \in L_2^f$. Очевидно, что существуют кривые β_1 и β_2 такие, что $\beta_i \subset T_i$, $\partial \beta_1 = -\partial \beta_2 = Y - X$ и β_1 пересекает M_E трансверсально. Так как $f(Y) > E > f(X)$, мы видим, что алгебраическое число точек пересечения кривой β_1 с L равно 1, в то время как β_2 не пересекает L . Таким образом, для замкнутого цикла $\beta = \beta_1 + \beta_2$ мы имеем

$$\beta \frown [L] \neq 0.$$

Благодаря устойчивости замкнутых траекторий относительно малых возмущений мы имеем: для линейной формы H' , достаточно близкой к H , все траектории на M_E , пересекающие $L_{1,2}^H$, замкнуты. Удалив все эти траектории из $M_E \cap T_1$ и приклеив соответствующие диски вида (8), мы получим поверхность L , удовлетворяющую условию определения 5 для пары (M_E, H') .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Если $E \in \tilde{U}(H)$ и критические точки ω_E не удовлетворяют ни одному соотношению вида (12), то пара (M_E, H) подчинена некоторому классу $k \in (\mathbb{Z}^3)^*$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы уже доказали это утверждение в случае полностью иррациональной формы H (предложение 2).

В случае степени иррациональности 1, $H \in \mathbb{R} \cdot \mathbb{Z}^3$, наше утверждение следует из факта, доказанного в [6]: если никакие две различные седловые критические точки 1-формы ω_E не соединены сепаратрисой, то на M_E можно найти набор замкнутых траекторий, разрезающий M_E на торы с дырками и цилиндры.

В случае формы H степени иррациональности 2 возможны два случая.

Случай 1: все траектории замкнуты или периодичны. Тогда можно приблизить H формой с рациональными коэффициентами, не разрушая замкнутых и периодических траекторий, а затем применить рассуждение из [6].

Случай 2: все траектории на M_E неперiodичны. Тогда проходит то же рассуждение, что и в доказательстве предложения 2, без каких-либо изменений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Если $\tilde{U}(H)$ – невырожденный отрезок, т.е. $\tilde{E}_2(H) > \tilde{E}_1(H)$, то существует целочисленная форма k такая, что пара (M_E, H) подчинена классу k для любого $E \in \tilde{U}(H)$. Кроме того, для любого $E \in \tilde{U}(H)$ выполнено $d(E, H) = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы докажем здесь немного более слабое утверждение. А именно, мы опустим доказательство k -подчиненности для крайних точек отрезка $\tilde{U}(H)$.

Пусть $\tilde{E}_1 < E < \tilde{E}_2$. Возьмем некоторое ε такое, что $\tilde{E}_1 < E - \varepsilon < E + \varepsilon < \tilde{E}_2$. Мы хотим показать, что пара (M_E, H) подчинена некоторому $k \in (\mathbb{Z}^3)^*$. Для этого без ограничения общности можно предположить, что поверхности $M_{E \pm \varepsilon}$ находятся в общем положении, т.е. значения $E \pm \varepsilon$ удовлетворяют условию предложения 6. Действительно, функцию f можно пошевелить вблизи поверхностей уровня $M_{E \pm \varepsilon}$ так, чтобы привести эти поверхности в общее положение, а поверхности $M_E, M_{\tilde{E}_{1,2}}$ оставить без изменений. Применяя предложение 6, а затем предложение 5 к поверхностям $M_{E \pm \varepsilon}$, получаем, что пара (M_E, H) подчинена некоторому классу $k \in (\mathbb{Z}^3)^*$. Из предложения 5 теперь следует, что класс k одинаков для всех E таких, что $\tilde{E}_1 < E < \tilde{E}_2$.

Пусть теперь L – поверхность, удовлетворяющая условию определения 5 для (M_E, H) , $E' \in \tilde{U}(H)$, $E' \neq E$. Тогда пересечение L и $M_{E'}$ состоит из замкнутых траекторий и компактных особых линий уровня 1-формы $\omega_{E'}$. Следовательно, существенные компоненты слоения $F_{E'}$ не пересекают L , откуда $d(E', H) \leq 2$.

Теперь мы готовы доказать теорему 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Из свойства устойчивости замкнутых траекторий вытекает, что для любых $H \in S^2$ и $\varepsilon > 0$ существует δ такое, что неравенство $|H' - H| < \delta$ влечет

$$\tilde{E}_1(H') > \tilde{E}_1(H) - \varepsilon, \quad \tilde{E}_2(H') < \tilde{E}_2(H) + \varepsilon.$$

С другой стороны, из предложений 5 и 7 мы видим, что если $\tilde{E}_2(H) > \tilde{E}_1(H)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует δ такое, что неравенство $|H' - H| < \delta$ влечет

$$\tilde{E}_1(H') < \tilde{E}_1(H) + \varepsilon, \quad \tilde{E}_2(H') > \tilde{E}_2(H) - \varepsilon.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Если $d(E, H) = 2$, то

- 1) пара (M_E, H) подчинена некоторому, единственному с точностью до знака, классу $k \in (\mathbb{Z}^3)^*$, и, кроме того, существует четное число торов $L_1, \dots, L_p$, $[L_1] = \dots = [L_p] = k$, каждый из которых удовлетворяет условию определения 5, таких, что их соответствующие части $L_1^f, \dots, L_p^f$ покрывают существенную часть слоения $F_{E, H}$;
- 2) любая незамкнутая траектория на $\widehat{M}_E$ для данного H имеет сильное асимптотическое направление v , удовлетворяющее условию $\langle k, v \rangle = 0$.

Доказательство второго утверждения содержится в работе [4]. Первое утверждение означает, что существенную часть слоения $F_{E, H}$ можно подходящим образом разрезать вдоль сепаратрисных циклов так, чтобы каждая из полученных частей превращалась в двумерный тор после приклеивания дисков вдоль этих циклов (почти всегда

эти части – просто торы с дырками, однако возможны исключения). Доказательство этого утверждения (в несколько иной формулировке) в случае иррациональной формы H дано в работе [5]. В случае немаксимальной степени иррациональности доказательство несложно, но громоздко и малоинтересно. Мы его опускаем.

Из предложений 5, 7 и 8 следует утверждение теоремы 4 за исключением случая $H \in \partial\mathcal{D}$. Поведение траекторий для граничных точек области устойчивости мы рассмотрим ниже.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Если $\tilde{E}_2(H) = \tilde{E}_1(H)$, то $d(E_1, H) = 3$.

ЗАМЕЧАНИЕ 15. В этом случае обязательно выполнено некоторое соотношение вида (12). Тем не менее, пара (M_{E_1}, H) может быть подчинена некоторому $k \in (\mathbb{Z}^3)^*$, и минимальные компоненты могут быть торами с дырками, разделенными сепаратрисными циклами. В разделе 4.1 мы подробно рассмотрим эту ситуацию.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $d(E, H) = 2$. Мы докажем, что тогда E – не единственная точка множества $\tilde{U}(H)$.

Вспомним конструкции N_E , B_E и W_E из раздела 3.3, которые применимы и к случаю $d(E, H) = 2$. Равенство $d(E, H) = 2$ означает, что:

- 1) образ первых гомологий каждого из множеств $\tilde{B}_E$ и $\tilde{W}_E$ по меньшей мере двумерен;
- 2) существует тор $L_1 \subset \mathbb{T}^3$, не пересекающий N_E ;
- 3) пара (M_E, H) подчинена некоторому $k \in (\mathbb{Z}^3)^*$.

Пусть поверхность L_2 удовлетворяет условию определения 5. Очевидно, что $\pm[L_2] = [L_1]$.

Тор L_1 целиком лежит либо в B_E , либо в W_E . Предположим для определенности, что $L_1 \subset B_E$. Для $E' < E$, достаточно близкого к E , тор L_1 не пересекает $M_{E'}^1$. Также, как мы делали это в доказательстве предложения 5, можно показать, что пара $(M_{E'}, H)$ подчинена k , и, следовательно, $d(E', H) = 2$.

Теорема 3 вытекает из следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Для функции f общего положения любая форма H степени иррациональности 1, $H \in \mathbb{R} \cdot (\mathbb{Z}^3)^*$, лежит внутри некоторой зоны устойчивости: $\tilde{E}_1 < \tilde{E}_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае рациональной формы H все траектории замкнуты или периодичны. Незначительное обобщение рассуждения из работы [6] показывает, что если мы разрежем поверхность M_E вдоль всех сепаратрисных циклов, гомологичных нулю, то получим объединение торов и цилиндров с дырками. Отсюда нетрудно показать, что равенство $d(E, H) = 3$ возможно, только если имеются как минимум две пары различных седел, соединенных сепаратрисами. Это условие коразмерности 2. Поскольку H пробегает счетное множество, а E пробегает отрезок, в случае общего положения мы можем считать, что ни одно такое условие не выполнено. Из предложения 9 теперь следует, что $\tilde{E}_2(H) > \tilde{E}_1(H)$.

4. Вырождения

В этом разделе мы опишем геометрически поведение минимальных компонент в различных случаях, в частности, на границе зон устойчивости. Мы дадим качественное описание наиболее общих ситуаций, не приводя подробных доказательств.

4.1. Простейшие вырождения. Граница зоны устойчивости. Рассмотрим сначала ситуацию, когда для всех $E \in \tilde{U}(H)$ поверхность M_E имеет отрицательную кривизну, неособа и имеет род 3 для всех H из некоторой области, причем вложение $M_E \hookrightarrow \mathbb{T}^3$ индуцирует эпиморфизм в первых гомологиях. Это наиболее интересный и важный случай. Случай рода 2 тривиален, поскольку в этом случае всегда $d(E, H) = 2$.

Мы наложили условие отрицательной кривизны поверхности M_E только для того, чтобы форма $\omega_{E,H}$ не имела критических точек типа максимума или минимума. В окрестности таких точек все траектории замкнуты. В работе [5] указана процедура, позволяющая избавляться от “лишних” замкнутых траекторий так, чтобы асимптотическое поведение открытых траекторий не менялось. При этом в разряд “лишних” мы не записываем цилиндры замкнутых траекторий, оба основания которых примыкают к минимальным компонентам, заполненным открытыми траекториями, и которые могут вырождаться при некоторых E и H из интересующей нас области.

В случае рода 3 при условии отрицательной кривизны поверхности M_E форма ω_E имеет четыре седловые особые точки. Если $\tilde{E}_1 < \tilde{E}_2$, то слоение F_E распадается на торы с дырками (четное число) и цилиндры замкнутых траекторий. В нашем случае простой подсчет показывает, что должно быть два тора и два цилиндра. На каждом основании цилиндров лежит по одной седловой точке 1-формы ω_E . Из условия, что вложение $M_E \hookrightarrow \mathbb{T}^3$ индуцирует эпиморфизм в первых гомологиях, нетрудно вывести, что один из цилиндров замкнутых траекторий электроно-подобный, а другой – дырко-подобный. Схематически фундаментальная область поверхности $\tilde{M}_E$ показана на рис. 9.

Рис. 9

Зафиксируем H и будем варьировать E . Торы с дырками, заполненные открытыми траекториями, ведут себя устойчиво до тех пор, пока они отделены друг от друга

цилиндрами замкнутых траекторий. Когда E растет, цилиндр электроно-подобных траекторий уменьшается по высоте и увеличивается “в диаметре”. При некотором E цилиндр вырождается (т.е. его основания слипаются), два седла оказываются на одном сепаратрисном цикле. Соответствующее особое сечение $\Gamma_{E,h}$, а также близкие к нему показаны на рис. 10.

$\Gamma_{E,h+\varepsilon}$ $\Gamma_{E,h}$ $\Gamma_{E,h-\varepsilon}$

Рис. 10

Если теперь увеличить E еще сколь угодно мало, все траектории в плоскости P_h окажутся замкнуты (рис. 11). Это означает, что вырождение цилиндра электроно-подобных траекторий происходит при $E = \tilde{E}_2$. Цилиндр дырко-подобных траекторий ведет себя ровно противоположным образом электроно-подобному и вырождается при $E = \tilde{E}_1$.

$\Gamma_{E+\varepsilon,h}$

Рис. 11

Зафиксируем некоторую зону устойчивости $\mathcal{D}_l$. Обозначим четыре седловые точки 1-формы $\omega_{E,H}$ через A_1, A_2, A_3, A_4 , причем сделаем это согласованно таким образом, чтобы

- 1) A_i были непрерывными функциями от E и H ;
- 2) A_1 и A_2 лежали соответственно на нижнем и верхнем основаниях электроно-подобного цилиндра, а A_3 и A_4 — на нижнем и верхнем основаниях дыр-

ко-подобного цилиндра в случае, когда $E \in \tilde{U}(H)$ и H находится в рассматриваемой зоне устойчивости $\mathcal{D}_l$.

Это можно сделать в области параметров E, H такой, что критические точки формы $\omega_{E,H}$ не слипаются.

У каждой точки A_i мы также выберем по прообразу $\tilde{A}_i$ в $\mathbb{R}^3$ так, чтобы эти прообразы непрерывно зависели от E и H и точки $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2$ (точки $\tilde{A}_3, \tilde{A}_4$) лежали на основаниях одного и того же цилиндра, когда $H \in \mathcal{D}_l$. Условие $E \in \tilde{U}(H)$ при $H \in \mathcal{D}_l$ имеет вид:

$$(16) \quad \langle H, \tilde{A}_2 \rangle \geq \langle H, \tilde{A}_1 \rangle, \quad \langle H, \tilde{A}_4 \rangle \geq \langle H, \tilde{A}_3 \rangle.$$

Уравнение

$$\langle H, \tilde{A}_2(E, H) \rangle = \langle H, \tilde{A}_1(E, H) \rangle$$

задает функцию $\tilde{E}_2(H)$, а уравнение

$$\langle H, \tilde{A}_4(E, H) \rangle = \langle H, \tilde{A}_3(E, H) \rangle$$

— функцию $\tilde{E}_1(H)$.

Простое вычисление дает

$$\delta \langle H, \tilde{A}_i(E, H) \rangle = \langle \delta H, \tilde{A}_i \rangle + \left\langle H, \frac{\nabla f(A_i)}{|\nabla f(A_i)|^2} \right\rangle \delta E.$$

Так как мы положили $|H| = 1$, а A_i — критическая точка 1-формы $\omega_{E,H}$, мы имеем

$$(17) \quad \delta \langle H, \tilde{A}_i(E, H) \rangle = \langle \delta H, \tilde{A}_i \rangle \pm \mu_i \delta E, \quad \text{где} \quad \mu_i = \frac{1}{|\nabla f(A_i)|}$$

и знак $\pm$ зависит от того, сонаправлены векторы H и $\nabla f(A_i)$ или нет. В наших обозначениях для A_1, A_4 следует брать знак $+$, а для A_2, A_3 — знак $-$. Отсюда легко видеть, что функции $\tilde{E}_{1,2}(H)$ дифференцируемы в тех точках H из зоны устойчивости $\mathcal{D}_l$, где не происходит вырождения критических точек 1-формы $\omega_{\tilde{E}_{1,2}, H}$.

Пусть теперь H_0 — точка границы зоны устойчивости $\mathcal{D}_l$. Это означает, что и электроно-подобный, и дырко-подобный цилиндры при $H = H_0$, $E = \tilde{E}_1(H) = \tilde{E}_2(H)$ выродились и превратились в сепаратрисные циклы с двумя седлами на каждом. Из формул (16) и (17) следует, что в окрестности точки H_0 условие принадлежности $H = H_0 + \Delta H$ зоне $\mathcal{D}_l$ записывается с точностью до $O(|\Delta H|^2)$ в виде неравенства

$$(18) \quad \left\langle \Delta H, \frac{\tilde{A}_2 - \tilde{A}_1}{\mu_2 + \mu_1} + \frac{\tilde{A}_4 - \tilde{A}_3}{\mu_4 + \mu_3} \right\rangle > 0,$$

где $\tilde{A}_i = \tilde{A}_i(\tilde{E}_1(H_0), H_0)$.

В случае общего положения вектор $\frac{\tilde{A}_2 - \tilde{A}_1}{\mu_2 + \mu_1} + \frac{\tilde{A}_4 - \tilde{A}_3}{\mu_4 + \mu_3}$ не обращается в нуль на границе зоны, поэтому граница зоны устойчивости кусочно-гладкая.

Рис. 12

Когда H движется по границе зоны устойчивости $\mathcal{D}_l$, вектор u сильного асимптотического направления траекторий, заданный условиями $\langle l, u \rangle = \langle H, u \rangle = 0$, вращается в некоторой целочисленной плоскости и для всюду плотного на $\partial\mathcal{D}_l$ множества линейных форм H имеет рациональное направление. Рассмотрим подробнее эту ситуацию.

Итак, пусть u – некоторый целочисленный вектор, аннулирующий l , и H_0 – точка на границе зоны $\mathcal{D}_l$ такая, что $\langle H_0, u \rangle = 0$. Тогда все незамкнутые траектории, а значит, и особые сечения $\Gamma_{E_0, h}$ периодичны, где $E_0 = \tilde{E}_1(H_0)$. Особые сечения показаны на рис. 12. Сепаратрисы $\alpha_i, \beta_i, i = 1, 2, 3, 4$, разрезают поверхность M_{E_0} на четыре кольца, которые мы обозначим через $R_{1,2,3,4}$. Кольца R_i , дополнительно разрезанные вдоль специально выбранных трансверселей a_i , изображены на рис. 13. Прямоугольники положены на плоскость таким образом, чтобы функция высоты H возрастала в направлении снизу вверх, а ориентация прямоугольников, происходящая из ориентации поверхности, совпадала с ориентацией плоскости рисунка.

ЗАМЕЧАНИЕ 16. Рассматриваемый нами случай разрезания поверхности M_{E_0} на кольца не является единственно возможным с комбинаторной точки зрения. Дело в том, что цилиндр замкнутых траекторий, основания которого лежат на разных минимальных компонентах, вдобавок к типу (электронно- или дырочно-подобный) имеет еще одну комбинаторную характеристику: его нижнее основание может быть “справа” или “слева” от сепаратрис, выходящих из лежащего на нем седла (см. рис. 5 а)). Мы рассматриваем здесь случай, когда наши два цилиндра “одинаково ориентированы”. В случае “противоположной ориентации” ситуация полностью аналогична.

Пара (M_{E_0}, H_0) подчинена одновременно двум классам, один из которых, l , тот же, что и внутри рассматриваемой нами зоны. Действительно, рассмотрим сепаратрисные циклы

$$\gamma_1 = \alpha_1 \alpha_2, \quad \gamma_2 = \alpha_3 \alpha_4, \quad \gamma_3 = \alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2, \quad \gamma_4 = \alpha_3 \beta_3 \alpha_4 \beta_4.$$

Следующие поверхности, имеющие вид двумерных торов, удовлетворяют условию определения 5:

$$L_1 = R_1 \cup R_2 \cup D_{\gamma_1} \cup D_{\gamma_2}, \quad L_2 = R_2 \cup R_3 \cup D_{\gamma_3} \cup D_{\gamma_4}.$$

Рис. 13

Мы имеем $[L_1] = l$. Обозначим гомологический класс тора L_2 через m . При возмущении E и H m -подчиненность сохранится, если слоение $F_{E,H}$ будет иметь замкнутые слои или сепаратрисные циклы, гомотопные γ_3 и γ_4 . Это условие записывается следующим образом:

$$(19) \quad \begin{aligned} \langle H, \tilde{A}_2 \rangle &\leq \langle H, \tilde{A}_1 + u \rangle, & \langle H, \tilde{A}_2 \rangle &\leq \langle H, \tilde{A}_1 - u \rangle, \\ \langle H, \tilde{A}_4 \rangle &\leq \langle H, \tilde{A}_3 + u \rangle, & \langle H, \tilde{A}_4 \rangle &\leq \langle H, \tilde{A}_3 - u \rangle. \end{aligned}$$

Отсюда, применяя (17), получаем, что в окрестности точки H_0 условие $H_0 + \Delta H \in \mathcal{D}_m$ с точностью до $O(|\Delta H|^2)$ имеет вид:

$$(20) \quad \left\langle \Delta H, \frac{\tilde{A}_2 - \tilde{A}_1}{\mu_2 + \mu_1} + \frac{\tilde{A}_4 - \tilde{A}_3}{\mu_4 + \mu_3} \right\rangle + |\langle \Delta H, u \rangle| \times \left(\frac{1}{\mu_1 + \mu_2} + \frac{1}{\mu_3 + \mu_4} \right) < 0.$$

Таким образом, в окрестности H_0 на сфере $S^2 \in (\mathbb{R}^3)^*$ мы имеем ситуацию, показанную на рис. 14, где

$$u' = \left(\frac{1}{\mu_1 + \mu_2} + \frac{1}{\mu_3 + \mu_4} \right) u, \quad v = \frac{\tilde{A}_2 - \tilde{A}_1}{\mu_2 + \mu_1} + \frac{\tilde{A}_4 - \tilde{A}_3}{\mu_4 + \mu_3}.$$

Рассмотрим следующие 1-циклы $u, u_1, u_2 \in \mathbb{Z}^3 \cong H_1(\mathbb{T}^3, \mathbb{Z})$:

$$u = \pm[\beta_i], \quad u_1 = [a_2^{-1} \alpha_1^{-1} a_3 \alpha_3], \quad u_2 = [a_1 a_2].$$

Нетрудно видеть, что u, u_1, u_2 образуют базис решетки $\mathbb{Z}_3$ и

$$(21) \quad \langle l, u_1 \rangle = \langle m, u_2 \rangle = 1, \quad \langle l, u_2 \rangle = \langle m, u_1 \rangle = 0.$$

Рис. 14

Кроме того, мы имеем: $\langle H, u \rangle = \langle l, u \rangle = \langle m, u \rangle = 0$, откуда

$$H = \eta l + \theta m,$$

где

$$\eta = \int_{u_1} dH, \quad \theta = \int_{u_2} dH.$$

Поскольку $\int_{a_i} dH > 0$, $\int_{\alpha_i} dH = 0$ для всех $i \leq 4$ и

$$\left(\int_{a_1} + \int_{a_2} - \int_{a_3} - \int_{a_4} \right) dH = 0,$$

мы имеем

$$|\eta| = \left| \left(\int_{a_3} - \int_{a_2} \right) dH \right| < \theta = \left(\int_{a_1} + \int_{a_2} \right) dH.$$

Таким образом, мы доказали утверждения 1), 2) теоремы 5 в частном случае. Утверждение 3) следует из того, что для любой точки $H \in \partial \mathcal{D}_l \cap \partial \mathcal{D}_m$ все три формы l , m и H аннулируют один и тот же вектор u – вектор сильного асимптотического направления траекторий. С точностью до множителя он равен $l \times m$. В случае общего положения граница зоны $\mathcal{D}_l$ пересекается с окружностью $\langle H, l \times m \rangle = 0$ трансверсально.

4.2. Общий случай. В предыдущем разделе мы видели, что возникновение и распад пары минимальных компонент, заполненных открытыми траекториями, могут быть связаны с вырождением одного из цилиндров замкнутых траекторий. Однако это не единственная возможная ситуация для функции f и формы H общего положения. Другой возможный случай – критическое значение функции f .

Если $A \in \mathbb{R}^3$ – критическая точка функции f индекса 1 (соответственно 2) и одновременно седловая критическая точка ограничения функции f на плоскость $P_{\langle H_0, A \rangle}$, то для всех H из некоторой окрестности точки H_0 мы можем иметь $\tilde{E}_2 = f(A)$ (соответственно $\tilde{E}_1 = f(A)$). Такая критическая точка ведет себя в данном случае подобно вырожденному цилиндру электроно- (соответственно дырко-) подобных траекторий, стянутому в точку. Однако это вырождение также имеет коразмерность 1 (по переменным E, H).

Мы утверждаем, что критическая точка индекса 1 или 2, а также вырожденный цилиндр замкнутых траекторий исчерпывают список вырождений коразмерности 1, приводящих к распаду или рождению пары минимальных компонент, заполненных открытыми траекториями. Для точки $H \in \partial \mathcal{D}_l$ общего положения слоение $F_{E, H}$, где $E = \tilde{E}_1(H) = \tilde{E}_2(H)$, имеет две особенности указанного вида, поскольку рождение минимальных компонент должно происходить одновременно с уничтожением.

В предыдущем разделе мы рассмотрели случай, когда и рождение и уничтожение происходят при вырождении цилиндров замкнутых траекторий. Заметим, что функция общего положения имеет на каждом критическом уровне лишь по одной критической точке. Поэтому мы можем не рассматривать ситуацию, когда и рождение, и уничтожение пары минимальных компонент для $H \in \partial \mathcal{D}_l$ связано с критическими точками индекса 1 или 2.

В случае, когда слоение F_{E_0, H_0} при $H_0 \in \partial \mathcal{D}_l$, $E_0 = \tilde{E}_1(H) = \tilde{E}_2(H)$ имеет две минимальные компоненты, разделенные одним вырожденным цилиндром замкнутых траекторий и критической точкой функции f индекса 1 или 2, условие $H_0 + \Delta H \in \mathcal{D}$ записывается с точностью до $O(|\Delta H|^2)$ в виде

$$\left\langle \Delta H, \frac{\tilde{A}_2 - \tilde{A}_1}{\mu_2 + \mu_1} \right\rangle > 0,$$

где A_1 и A_2 – седловые точки на вырожденном цилиндре. Если $\langle H_0, u \rangle = 0$, где $u \in \mathbb{Z}^3$, то H_0 принадлежит также границе некоторой другой зоны $\mathcal{D}_m$, задаваемой локально с точностью до $O(|\Delta H|^2)$ неравенством

$$\left\langle \Delta H, \frac{\tilde{A}_2 - \tilde{A}_1}{\mu_2 + \mu_1} \right\rangle + \frac{|\langle \Delta H, u \rangle|}{\mu_1 + \mu_2} < 0.$$

Таким образом, мы приходим принципиально к тому же выводу относительно расположения зон $\mathcal{D}_l$ и $\mathcal{D}_m$, что и в случае двух вырожденных цилиндров замкнутых траекторий. Отметим также, что для $H \in \mathcal{D}_m$, $H \neq H_0$, либо $\tilde{E}_1(H) > E_0$, либо $\tilde{E}_2(H) < E_0$, т.е. на границе $\partial \mathcal{D}_m$ уже происходит простое вырождение двух цилиндров. Неформально говоря, локальная постоянность функции $\tilde{E}_1(H) = \tilde{E}_2(H)$ на границе зоны устойчивости является скорее исключением, чем правилом. По-видимому, это может иметь место лишь для конечного числа зон.

Заметим, что внутри зоны устойчивости на соответствующих уровнях может быть любое (ограниченное для фиксированной функции f) четное число минимальных компонент. Но если H достаточно близко к границе зоны, то таких компонент может быть только две. Действительно, одновременное рождение и распад $2k$ минимальных компонент на границе зоны – это вырождение, имеющее коразмерность $2k$ по E и H . В случае функции f общего положения такое вырождение никогда не происходит, если $k > 1$.

Рис. 15. Слоение в примере Царева

Таким образом, мы видим, что если избавиться от всех “лишних” замкнутых траекторий, как описано в работе [5], то в окрестности точки $H \in \partial \mathcal{D}_l$ общего положения мы, как правило, будем иметь ситуацию, описанную в предыдущем разделе. Исключение составляет случай, когда один из рассмотренных там цилиндров целиком стянут в точку, но, как мы видели, поведение зон устойчивости в этом случае аналогичное. Для исследования того, что происходит в окрестности регулярной точки границы зоны устойчивости, достаточно рассматривать поверхности рода 3.

В [5] была разработана сложная процедура, позволяющая описывать все возможные слоения $F_{E,H}$ в случае поверхности M_E рода 3. В частности, там был построен пример поверхности M_E и вектора H , для которых слоение $F_{E,H}$ имеет всего одну минимальную компоненту, и как следствие, незамкнутые траектории не имеют асимптотического направления. Здесь мы покажем, что наличие таких поверхностей уровня закономерно для “достаточно сложных” функций f , а именно, таких, что имеется хотя бы две различные зоны устойчивости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7. Пусть γ – кривая общего положения на сфере $S^2 \in (\mathbb{R}^3)^*$, пересекающая две различные зоны устойчивости. Пересечение кривой γ с замыканием каждой из зон – замкнутый отрезок. Так как границы любых двух зон могут иметь лишь конечное число общих точек, можно считать, что γ не проходит ни через одну из них. Отсюда отрезки $\gamma \cap \overline{\mathcal{D}_l}$ попарно не пересекаются. Утверждение теоремы следует теперь из того, что множество, полученное из $\mathbb{R}$ выбрасыванием любого семейства попарно не пересекающихся отрезков, непусто и не имеет изолированных точек.

Все, кроме счетного числа, формы $H \in \mathcal{Q}$ имеют степень иррациональности 3. Действительно, как следует из работы [5], в случае степени иррациональности 2 либо мы имеем устойчивую ситуацию, $H \in \mathcal{D}_l$ для некоторого $l \in (\mathbb{Z}^3)^*$, либо имеются хотя бы две пары седел, соединенных сепаратрисами. Таким образом, условие $H \in \mathcal{Q}$ и $\langle H, u \rangle = 0$, где $u \in \mathbb{Z}^3$, имеет коразмерность 3 и в случае общего положения может выполняться лишь для изолированных значений E, H .

Заметим однако, что в случае функции $f(x) = \cos(2\pi x_1) + \cos(2\pi x_2) + \cos(2\pi x_3)$ множеству $\mathcal{Q}$ принадлежат целые окружности $H_1 \pm H_2 \pm H_3 = 0$ за исключением рациональных точек. Однако это – следствие особой симметрии функции f : $f(x + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})) = -f(x)$, которая не имеет места в случае общего положения и не встречается в физических примерах. Отметим также, что рациональные H , для которых выполнено $H_1 \pm H_2 \pm H_3 = 0$, в этом случае принадлежат границам двух зон устойчивости $\mathcal{D}_l, \mathcal{D}_m$ и являются их точками излома. Кроме того, имеет место равенство $H = \eta(l \pm m)$. Например, $(5, 4, 1) \in \partial \mathcal{D}_{(2,1,0)} \cap \mathcal{D}_{(3,3,1)}$.

Случай $H \in \mathcal{Q}$ и $\langle H, u \rangle = 0$, $u \in \mathbb{Z}^3$, реализуется в примере С. П. Царева. Минимальные компоненты в этом примере – торы с дырками, но эти дырки нельзя заклеить дисками, поскольку их границы не гомологичны нулю в $\mathbb{T}^3$, а задают цикл, совпадающий с u при отождествлении $\mathbb{Z}^3 \cong H_1(\mathbb{T}^3, \mathbb{Z})$. Структура соответствующего слоения $F_{E,H}$ и несколько сечений $F_{E,h}$ показаны на рис. 15 и 16. A, B, C, D – седла, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ – сепаратрисы, a, a', b, b' – разрезы вдоль некоторых трансверселей (именно такое слоение получается в случае $f = \sum \cos(2\pi x_i)$, $H_1 \pm H_2 \pm H_3 = 0$, $E = 0$). Как показано в [5], в случае степени иррациональности 2 все незамкнутые траектории имеют асимптотическое направление в обычном смысле.

Если $H \in \mathcal{Q}$ и H имеет степень иррациональности 3, то минимальные компоненты имеют род ≥ 3 .

4.3. Размеры зон устойчивости. Здесь мы дадим набросок доказательства теоремы 6. Пусть пара (M_E, H) подчинена некоторому классу l , а L – соответствующий двумерный тор из определения 5.

Как легко видеть, двумерный тор, линейно вложенный в $\mathbb{T}^3$ и задающий гомологический класс l , имеет площадь, равную евклидовой длине формы $l \in (\mathbb{R}^3)^*$. Любой другой гомологичный ему тор имеет не меньшую площадь. Отсюда

$$S_L \geq |l|.$$

Поверхности M_E имеют ограниченную площадь. Поэтому для больших $l \in (\mathbb{Z}^3)^*$ большую часть тора L составляют плоские диски вида (8). Их ограниченное число, и

хотя бы один (на самом деле хотя бы два) из них имеет площадь порядка $O(|l|)$. Расстояние между ближайшими дисками в накрывающем пространстве $\mathbb{R}^3$ имеет порядок $O(1/|l|)$. Отсюда при отклонении H на угол порядка $O(1/|l|)$ диски будут “сталкиваться” друг с другом, что означает, что мы выйдем из зоны устойчивости. Отсюда следует первое из утверждений теоремы 6.

Выберем в плоскости $\langle H, \cdot \rangle = 0$ базис u_1, u_2 . Пусть a и b – длины проекций наибольшего из дисков в L^H на направления u_1 и u_2 . Тогда $|u_1| \cdot |u_2| \geq O(|l|)$. Столкновение дисков происходит при отклонении H в направлении u_i на угол порядка $O(1/(|l| \cdot |u_i|))$. Отсюда площадь зоны $\mathcal{D}_l$ имеет порядок

$$S_{\mathcal{D}_l} \leq \frac{1}{|l| \cdot |u_1|} \cdot \frac{1}{|l| \cdot |u_2|} \leq O\left(\frac{1}{|l|^3}\right).$$

4.4. Вращательная симметрия. Поверхности, появляющиеся в физических примерах, часто обладают дополнительной дискретной симметрией – той, которой обладает соответствующая кристаллическая решетка. Наличие такой симметрии не мешает применять результаты, полученные для случая общего положения, поскольку мы рассматриваем пару – поверхность уровня + форма H , которая для всех, кроме конечного числа, форм H не обладает уже никакой симметрией.

В ряде интересных случаев функция f инвариантна относительно вращения вокруг некоторого целочисленного вектора $k \in \mathbb{Z}^3$ на угол $\pi/4$, $\pi/3$ или $\pi/6$. Очевидно, что зона устойчивости $\mathcal{D}_k$, если она не пуста, обладает той же вращательной симметрией. Следующее утверждение показывает, что она всегда не пуста и содержит вектор $H = \frac{k}{|k|}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. Пусть $S: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ некоторое вращение на угол $\pi/3$, $\pi/4$ или $\pi/6$, сохраняющее решетку $\mathbb{Z}^3$, k – собственный целочисленный вектор: $Sk = k$. Если функция f инвариантна относительно S , $f(Sx) = f(x)$, то точка $H = \frac{k}{|k|} \in S^2$ лежит внутри зоны устойчивости $\mathcal{D}_k$ и $\tilde{E}_2(H) = E_2(H) > \tilde{E}_1(H) = E_1(H)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $H = \frac{k}{|k|}$ и возьмем некоторое $E \in U(H)$. Очевидно, форма H рациональна. Рассмотрим сечение $\Gamma_{E,h}$, имеющее неограниченные компоненты. Оно инвариантно при сдвигах из двумерной решетки $\mathbb{Z}^3 \cap P_0$ и при вращении S . Легко видеть, что такое сечение обязано быть особым и должно разрезать плоскость P_h на диски вида (8). Образ L плоскости P_h при проекции $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ есть двумерный тор, удовлетворяющий определению 5.

В этом случае лишь конечное число (с точностью до целочисленных сдвигов) сечений $\Gamma_{E,h}$ имеют неограниченные компоненты и все они особые. Все другие сечения состоят из замкнутых траекторий. Очевидно, мы имеем $d(E, H) = 2$.

Как следствие, мы получаем: если функция f имеет кубическую симметрию, то $(1, 0, 0) \in \mathcal{D}_{(1,0,0)}$, $(1, 1, 1) \in \mathcal{D}_{(1,1,1)}$.

Рис. 16. Сечения в примере Царева

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Новиков С. П. Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса // УМН. 1982. Т. 37. №5. С. 3–49.
- [2] Лифшиц И. М., Песчанский В. Г. Гальваномагнитные характеристики металлов с открытыми поверхностями Ферми. I // ЖЭТФ. 1958. Т. 35. С. 1251–1264.
- [3] Дынников И. А. Доказательство гипотезы С. П. Новикова для случая малых возмущений рациональных магнитных полей // УМН. 1992. Т. 47. №3. С. 161–162.
- [4] Дынников И. А. Доказательство гипотезы С. П. Новикова о полуклассическом движении электрона // Матем. заметки. 1993. Т. 53. №5. С. 57–68.
- [5] Dynnikov I. A. Semiclassical motion of the electron. A proof of the Novikov conjecture in general position and counterexamples // Solitons, Geometry and Topology: On the Crossroads / ed. V. M. Buchstaber. AMS Transl. (2). V. 179, 1997. P. 45–73.
- [6] Зорич А. В. Задача Новикова о полуклассическом движении электрона в однородном магнитном поле, близком к рациональному // УМН. 1984. Т. 39. №5. С. 235–236.
- [7] Novikov S. P. Quasiperiodic structures in topology // Proc. of the Conf. “Topological Methods in Modern Mathematics” (Stony Brook, 1991). Houston, TX: Publish or Perish, Inc., 1993. P. 223–233.
- [8] Новиков С. П., Мальцев А. Я. Топологические квантовые характеристики, наблюдаемые при исследовании проводимости в нормальных металлах // Письма в ЖЭТФ. 1996. Т. 63. №10. С. 809–813.
- [9] Дынников И. А., Мальцев А. Я. Топологические характеристики электронного спектра монокристалла // ЖЭТФ. 1997. Т. 112. С. 371–378.
- [10] Мальцев А. Я. Аномальное поведение тензора электрической проводимости в сильных магнитных полях // ЖЭТФ. 1997. Т. 112. С. 1710–1726.
- [11] Zorich A. V. Asymptotic flag of an orientable measured foliation on a surface // Proc. “Geometric Study of Foliations” (Tokyo, November 1993) / ed. T. Mizutani et al. Singapore: World Scientific, 1994. P. 479–498.
- [12] Гусейн-Заде С. М. О количестве критических точек у квазипериодического потенциала // Функц. анализ и его прил. 1989. Т. 23. №2. С. 55–56.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: dynnikov@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию
15.01.1999