Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Натанзон, Модули римановых поверхностей, пространства типа Гурвица и их супераналоги, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 1, 61–116

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm117>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 15:40:51

МОДУЛИ РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ, ПРОСТРАНСТВА ТИПА ГУРВИЦА И ИХ СУПЕРАНАЛОГИ

С. М. НАТАНЗОН

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	61
§ 1. Фуксовы группы и их последовательные образующие	63
§ 2. Геометрия фуксовых групп	66
§ 3. Свободные фуксовы группы ранга 2	71
§ 4. Пространства типа Фрике–Клейна–Тайхмюллера	77
§ 5. Модули римановых поверхностей	81
§ 6. Пространство голоморфных морфизмов римановых поверхностей ...	83
§ 7. Поднятие фуксовых групп на $SL(2, \mathbb{R})$	87
§ 8. Топологическая классификация функций Арфа и пар функций Арфа	92
§ 9. Топологическая классификация независимых систем функций Арфа на компактных поверхностях	96
§ 10. Пространство модулей спинорных расслоений ранга 1	98
§ 11. Суперфуксовы группы, суперримановы поверхности и их тополо- гические типы	101
§ 12. Модули суперримановых поверхностей	103
§ 13. $N = 2$ суперфуксовы группы. $N = 2$ суперримановы поверхности и их топологические инварианты	107
§ 14. Модули $N = 2$ суперримановых поверхностей	109
§ 15. Суперголоморфные морфизмы римановых суперповерхностей	113
Список литературы	114

Введение

На протяжении всего 20 века пространства модулей римановых поверхностей являлись объектом постоянного интереса математиков. В последние два десятилетия эти исследования получили новый стимул в связи с открытием глубоких связей пространств модулей римановых поверхностей с теорией струн – современного варианта

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов: РФФИ-98-01-00612, INTAS-96-0713 и DGICYT.

единой теории поля [1]. Теория струн приводит к рассмотрению некоммутативного аналога римановых поверхностей: римановых $N = 1$ суперповерхностей [2], [3]. Математическая часть теории при этом сводится к изучению супераналога меры Мамфорда на пространстве модулей римановых $N = 1$ суперповерхностей [4], [5]. Дальнейшее развитие теории приводит к появлению римановых $N = 2$ суперповерхностей [6]–[8].

До недавнего времени значительно меньше внимания уделялось изучению пространств голоморфных отображений римановых поверхностей. В случае тождественных отображений это пространство совпадает с пространством модулей римановых поверхностей. В случае отображений на сферу оно совпадает с пространством мероморфных функций, рассматривавшимся в работах Гурвица [9]. В последние годы выяснилось, что пространства голоморфных отображений играют центральную роль в двумерной топологической теории поля: к ним, по-видимому, сводятся полупростые фробениусовы многообразия в смысле Дубровина [10], [11].

Естественной структурой фробениусова многообразия обладают, в частности, пространства квантовых когомологий четной размерности [12], [13]. Для изучения квантовых когомологий нечетной размерности необходим супераналог фробениусова многообразия [12], [14]. Это делает актуальным исследование пространств суперголоморфных отображений римановых суперповерхностей. Другим источником возникновения суперголоморфных отображений являются суперконформные инстантоны [15]–[17].

Обзор посвящен описанию топологической структуры пространств модулей римановых поверхностей, пространств модулей римановых суперповерхностей, пространств голоморфных отображений римановых поверхностей и пространств суперголоморфных отображений римановых суперповерхностей. Мы рассматриваем только случай гиперболических поверхностей. Для негиперболических поверхностей (сфер с менее чем тремя проколами и торов) теория значительно проще, но требует других конструкций.

Топологическое описание состоит из: 1) описания компонент связности этих пространств, 2) представления каждой из компонент в виде T/Mod , где T – пространство, гомеоморфное линейному пространству или его супераналогу, а Mod – дискретная группа.

В классическом случае римановых поверхностей описание такого типа было впервые предложено Фрике и Клейном [18]. В этом случае компонента связности определяется топологическим типом поверхности. Мы доказываем, что в случае суперповерхностей надо фиксировать еще и тип индуцированной функции Арфа (при $N = 1$) или пары функций Арфа (при $N = 2$). Компоненты связности пространств голоморфных отображений определяются классами сопряженности подгрупп свободной группы. Компоненты связности пространств суперголоморфных отображений определяются классом эквивалентности пары (подгруппа свободной группы, функция Арфа).

В подходе Фрике и Клейна [18] пространство T возникает как пространство классов сопряженности специальных базисов фуксовых групп. Группа Mod возникает при этом как группа замены базисов. Значительно позже [19] Тайхмюллер предложил другое описание пространства T как пространства экстремальных квазиконформных отображений римановых поверхностей. Поэтому в нашем обзоре это пространство T называется пространством Фрике–Клейна–Тайхмюллера.

Существует много методов параметризации пространства Фрике–Клейна–Тайх-

мюллера. Большинство из них, как и в оригинальной работе Фрике и Клейна, использует параметры, связанные со стандартной метрикой постоянной кривизны римановой поверхности: длины геодезических, отвечающих образующим фуксовой группы, длины геодезических, отвечающих стандартным произведениям образующих, и углы между ними (см., например, [20]–[22]).

Мы используем параметры [23], описывающие образующие фуксовой группы через их неподвижные точки и “параметры” сдвигов. Такой подход позволяет легко перейти от описания модулей римановых поверхностей к описанию пространств голоморфных отображений и после некоторой модификации к описанию супераналогов этих пространств. Мы явно указываем область значений этих параметров для стандартных образующих фуксовых групп. Она оказывается областью линейного пространства (или его супераналога), выделенной линейными и квадратичными неравенствами. Отсюда легко доказывается ее гомеоморфность (супер)линейному пространству.

Подчеркнем, что “параметры” сдвигов и их супераналоги – это именно те параметры, которые участвуют в формулах для меры Мамфорда и ее супераналогов [2], [4]. Таким образом, наша параметризация пространства модулей может оказаться удобной для теории струн. Описанный подход оказывается удобным и при описании вещественных алгебраических кривых и их супераналогов [23]–[25]. Он позволяет, в частности, решить проблему Шоттки для вещественных алгебраических кривых и описать физически важные решения уравнений Кадомцева–Петвиашвили, построить квазипериодический двумерный оператор Шрёдингера и др. [26], [27]. Но эта тема, как нам кажется, заслуживает отдельного обзора.

§ 1. Фуксовы группы и их последовательные образующие

Напомним, что верхняя полуплоскость

$$\Lambda = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$$

обладает метрикой Лобачевского постоянной отрицательной кривизны $ds = \frac{|dz|}{\operatorname{Im} z}$. Ее геодезические – это полуокружности и полупрямые, ортогональные $\mathbb{R}$. Группа голоморфных автоморфизмов $\operatorname{Aut}(\Lambda) \cong \operatorname{PSL}(2, \mathbb{R})$ совпадает с группой сохраняющих ориентацию изометрий метрики Лобачевского.

Множество $\operatorname{Aut}(\Lambda) \setminus \operatorname{id}$ распадается на подмножества эллиптических $\operatorname{Aut}_0(\Lambda)$, параболических $\operatorname{Aut}_1(\Lambda)$ и гиперболических $\operatorname{Aut}_2(\Lambda)$ автоморфизмов, имеющих соответственно 0, 1 и 2 неподвижные точки на абсолюте $\partial\Lambda = \mathbb{R} \cup \infty$.

Параболический автоморфизм с конечной неподвижной точкой $a \in \mathbb{R}$ имеет вид

$$C(z) = \frac{(1 - a\gamma)z + a^2\gamma}{-\gamma z + (1 + a\gamma)},$$

где γ называется *параметром сдвига*. Автоморфизм C назовем *положительным*, если $\gamma > 0$. В этом случае $C(r) > r$ при $r \in \mathbb{R} \setminus a$. На верхней полуплоскости автоморфизм C удобно изображать как на рис. 1.1, где $\ell(C) = a$.

Гиперболический автоморфизм с конечной неподвижной притягивающей точкой α и конечной неподвижной отталкивающей точкой β имеет вид

$$C(z) = \frac{(\lambda\alpha - \beta)z + (1 - \lambda)\alpha\beta}{(\lambda - 1)z + (\alpha - \lambda\beta)},$$

Рис. 1.1

где $\lambda > 1$ называется *параметром сдвига*. Автоморфизм C назовем *положительным*, если $\alpha < \beta$. В этом случае $C(r) > r$ при $r \in \mathbb{R} \setminus [\alpha, \beta]$ и $C(r) < r$ при $r \in (\alpha, \beta)$. На верхней полуплоскости автоморфизм C удобно изображать как на рис. 1.1, где $\ell(C)$ — геодезическая на Λ .

Для автоморфизмов C_1, C_2 с конечными неподвижными точками на $\mathbb{R}$ положим $C_1 < C_2$, если все неподвижные точки C_1 меньше любой неподвижной точки C_2 . Набор $\{C_1, C_2, C_3\} \subset \text{Aut}_1(\Lambda) \cup \text{Aut}_2(\Lambda)$ назовем *упорядоченным*, если $C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 = 1$ и существует $D \in \text{Aut}(\Lambda)$ такой, что автоморфизмы $\tilde{C}_i = DC_iD^{-1}$ ($i = 1, 2, 3$) имеют конечные неподвижные точки, положительны и $\tilde{C}_1 < \tilde{C}_2 < \tilde{C}_3$. Упорядоченный набор $\{C_1, C_2, C_3\}$ назовем *последовательным*, если $\{C_1C_2C_1^{-1}, C_1, C_3\}$ также упорядоченный набор. Набор $\{C_1, \dots, C_n\}$ назовем *последовательным типа* $(0, k, m)$, если для любого $i = 1, \dots, n-1$ наборы $\{C_1 \cdots C_{i-1}, C_i, C_{i+1} \cdots C_n\}$ последовательные, причем $n = k + m$, $C_i \in \text{Aut}_2(\Lambda)$ при $i \leq k$ и $C_i \in \text{Aut}_1(\Lambda)$ при $i > k$.

Для геометрических рассуждений удобно перейти от верхней полуплоскости Λ к внутренности круга $H = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Группа ее голоморфных автоморфизмов $\text{Aut}(H)$ также распадается на эллиптические ($\text{Aut}_0(H)$), параболические ($\text{Aut}_1(H)$), гиперболические ($\text{Aut}_2(H)$) автоморфизмы, имеющие соответственно 0, 1, 2 неподвижные точки на абсолюте $\partial H = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Биголоморфный изоморфизм $\varphi: \Lambda \rightarrow H$ переводит метрику на Λ в инвариантную относительно $\text{Aut}(H)$ метрику на H , в которой геодезические — это дуги окружностей, ортогональные ∂H . При этом

$$\text{Aut}_i(H) = \varphi \text{Aut}_i(\Lambda) \varphi^{-1}.$$

Для $C \in \text{Aut}_1(H) \cup \text{Aut}_2(H)$ положим $\ell(C) = \varphi(\ell(\varphi^{-1}C\varphi))$. Набор $\{C_1, \dots, C_n\} \in \text{Aut}(H)$ назовем *последовательным*, если $\{\varphi^{-1}C_1\varphi, \dots, \varphi^{-1}C_n\varphi\} \in \text{Aut}(\Lambda)$ — последовательный набор. Согласно нашим определениям, ему отвечает рис. 1.2, где $\ell = C_j C_{j+1} \cdots C_{n-1} C_n(\ell(C_1))$ лежит между $\ell(C_{j-1})$ и $\ell(C_j)$.

Напомним, что дискретная подгруппа группы $\text{Aut}(H)$ или $\text{Aut}(\Lambda)$ называется *фуксовой группой*. Мы будем рассматривать только фуксовы группы без эллиптических элементов. Поэтому далее под *фуксовой группой* мы понимаем дискретные подгруппы $\text{Aut}(H)$ или $\text{Aut}(\Lambda)$ без эллиптических элементов.

ЛЕММА 1.1. *Последовательный набор $V = \{C_1, \dots, C_n\} \subset \text{Aut}(H)$ типа $(0, k, m)$ порождает фуксову группу Γ . При этом H/Γ — сфера с k дырами и m проколами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $k > 0$. Рассмотрим точку $O_1 \in \ell(C_1)$ и положим $O_i = C_i C_{i+1} \cdots C_n(O_1)$ (см. рис. 1.2). Пусть r_i — пересекающий $\ell(C_i)$ геодезический луч с началом в точке O_i и концами в точке абсолюта. Тогда $d_i = C_i^{-1}r_i$ —

Рис. 1.2

геодезический луч с концом O_{i+1} . Лучи $\{r_i, d_i (i = 1, \dots, n)\}$ ограничивают некомпактную область M . Наше определение гарантирует, что последовательность многоугольников

$$M, C_1 M, C_1 C_2 M, \dots, C_1 \dots C_{n-1} M$$

реализует однократный обход вокруг точки O_1 . Согласно [28] отсюда следует, что M – фундаментальная область для порожденной $\{C_1, \dots, C_n\}$ группы Γ . Автоморфизм C_i отождествляет r_i и d_i , образуя на поверхности H/Γ дыру при $i \leq k$ и прокол при $i > k$. Эта конструкция годится и в случае $k = 0$, если в качестве точки O_1 взять точку, достаточно близкую к неподвижной точке параболического автоморфизма C_1 .

Последовательным набором типа (g, k, m) назовем набор

$$\{A_1, B_1, \dots, A_g, B_g, C_1, \dots, C_n\}$$

такой, что $A_i, B_i (i = 1, \dots, g)$ – гиперболические автоморфизмы и

$$\{A_1, B_1 A_1^{-1} B_1^{-1}, \dots, A_g, B_g A_g^{-1} B_g^{-1}, C_1, \dots, C_n\}$$

– последовательный набор типа $(0, 2g + k, m)$.

Поверхность рода g с k дырами и m проколами назовем *поверхностью типа (g, k, m)* . Будем говорить, что *фуксова группа* $\Gamma \subset \text{Aut}(H)$ (соответственно $\Gamma \subset \text{Aut}(\Lambda)$) *имеет тип (g, k, m)* , если H/Γ (соответственно Λ/Γ) – поверхность типа (g, k, m) .

ТЕОРЕМА 1.1 [21], [29]. *Последовательный набор типа (g, k, m) порождает фуксову группу Γ типа (g, k, m) .*

Рис. 1.3

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{A_1, B_1, \dots, A_g, B_g, C_{g+1}, \dots, C_n\} \in \text{Aut}(H)$ – последовательный набор типа (g, m, k) . При $g = 0$ утверждение следует из леммы 1.1. Пусть $g > 0$. Положим $C_i = [A_i B_i]$ ($i = 1, \dots, g$). Наши определения гарантируют расположение геодезических $\ell(A_i), \ell(B_i), \ell(C_i)$, показанное на рис. 1.3. Пусть $O_1 \in \ell(C_1)$ и M – многоугольник, построенный при доказательстве леммы 1.1.

При $i \leq g$ заменим лучи r_i, d_i на геодезические сегменты с вершинами

$$O_i, A_i B_i^{-1} A_i^{-1} O_i, B_i^{-1} A_i^{-1} O_i, A_i^{-1} O_i, B_i A_i B_i^{-1} A_i^{-1} O_i = O_{i+1}.$$

В результате получим новый многоугольник $\widetilde{M}$ (см. рис. 1.3). Наши определения гарантируют, что многоугольники

$$\begin{aligned} \widetilde{M}, A_1 \widetilde{M}, A_1 B_1 \widetilde{M}, A_1 B_1 A_1^{-1} \widetilde{M}, C_1 \widetilde{M}, C_1 A_2 \widetilde{M}, C_1 A_2 B_2 \widetilde{M}, C_1 A_2 B_2 A_2^{-1} \widetilde{M}, \\ C_1 C_2 \widetilde{M}, \dots, C_1 C_2 \dots C_{n-1} M \end{aligned}$$

реализуют обход вокруг точки O_1 и, следовательно, [28] множество $\{A_1, \dots, C_n\}$ порождает фуксову группу Γ . Легко проследить, что каждая пара (A_i, B_i) порождает ручку поверхности H/Γ . Поэтому H/Γ – поверхность типа (g, k, m) .

§ 2. Геометрия фуксовых групп

Пусть P – поверхность типа (g, k, m) . Систему образующих

$$v = \{a_i, b_i \ (i = 1, \dots, g), c_i \ (i = g + 1, \dots, n)\}$$

группы $\pi_1(P, p)$ назовем *стандартной*, если v порождает $\pi_1(P, p)$ с определяющим соотношением

$$\prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \prod_{i=g+1}^n c_i = 1$$

и представляется набором простых контуров

$$\tilde{v} = \{\tilde{a}_i, \tilde{b}_i (i = 1, \dots, g), \tilde{c}_i (i = g + 1, \dots, n)\}$$

со следующими свойствами:

- 1) контур $\tilde{c}_i$ гомологичен 0 и отсекает от поверхности P одну дыру при $i \leq g + k$ и один прокол при $i > g + k$;
- 2) $\tilde{a}_i \cap \tilde{b}_j = \tilde{a}_i \cap \tilde{c}_j = \tilde{b}_i \cap \tilde{c}_j = \tilde{c}_i \cap \tilde{c}_j = p$;
- 3) в окрестности точки p контуры $\tilde{v}$ расположены как на рис. 2.1.

Рис. 2.1

В этом случае набор контуров $\tilde{v}$ расположен на P как показано на рис. 2.2.

Пусть теперь $\Gamma \subset \text{Aut}(H)$ – фуксова группа, $P = H/\Gamma$, $\Phi: H \rightarrow P$ – естественная проекция и $q \in \Phi^{-1}(p)$. Сопоставим автоморфизму $C \in \Gamma$ геодезический отрезок $\ell_q(C) \subset H$ с концами q и $C(q)$. Соответствие $C \mapsto \Phi(\ell_q(C))$ порождает изоморфизм $\Phi_q: \Gamma \rightarrow \pi_1(P, p)$.

ЛЕММА 2.1. Пусть $V = \{A_i, B_i (i = 1, \dots, g), C_i (i = g + 1, \dots, n)\}$ – последовательный набор типа (g, k, n) , Γ – фуксова группа, которую он порождает, и $P = H/\Gamma$. Тогда $v_q = \Phi_q(V)$ – стандартная система образующих группы $\pi_1(P, p)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим фундаментальную область M , построенную при доказательстве леммы 1.1 и теоремы 1.1 (см. рис. 1.3). При $i > g$ соединим точки O_i и O_{i+1} попарно непересекающимися отрезками $c_i \subset M$. (Здесь $O_{n+1} = O_1$.) Рассмотрим на H геодезические сегменты

$$a_i = [O_i, A_i B_i^{-1} A_i^{-1} O_i], \quad b_i = [A_i B_i^{-1} A_i^{-1} O_i, B_i^{-1} A_i^{-1} O_i].$$

Тогда естественная проекция $\Phi: H \rightarrow P$ порождает стандартную систему образующих

$$V_{O_1} = \{\Phi(a_i), \Phi(b_i) (i = 1, \dots, g), \Phi(c_i) (i = g + 1, \dots, n)\} \in \pi_1(P, \Phi(O_1)).$$

Непрерывный перенос точки O_1 в q переводит V_{O_1} в стандартную систему образующих V_q .

Цель этого параграфа – доказать обращение этой леммы.

Рис. 2.2

ТЕОРЕМА 2.1 [21], [29], [30]. Пусть $\Gamma \subset \text{Aut}(H)$ – фуксова группа типа (g, k, m) , $P = H/\Gamma$, $\Phi: H \rightarrow P$ – естественная проекция и

$$v = \{a_i, b_i (i = 1, \dots, g), c_i (i = g + 1, \dots, n)\}$$

– стандартная система образующих группы $\pi_1(P, \Phi(q))$. Тогда $V = \Phi_q^{-1}(v)$ – последовательный набор типа (g, k, m) .

Для доказательства, основанного на [29], нам понадобится несколько дополнительных определений и лемм.

Пусть $\tilde{a}$ – контур, представляющий $a \in \pi_1(P, \Phi(q))$. Будем обходить контур $\tilde{a}$, начиная с точки $\Phi(q)$, “поднимая” этот обход на H , начиная с точки q . После бесконечного числа обходов в обоих направлениях мы получим линию $\ell(\tilde{a}) \subset M$ с концами в неподвижных точках автоморфизма $A = \Phi_q^{-1}(a)$ (см. рис. 2.3).

ЛЕММА 2.2. Если $\tilde{a}$ не имеет самопересечений, то $h\ell(A)$ и $\ell(A)$ не пересекаются при всех $h \in \Gamma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h\ell(A)$ и $\ell(A)$ пересекаются при $h \in \Gamma$. Тогда $h\ell(\tilde{a})$ и $\ell(\tilde{a})$ также пересекаются (см. рис. 2.3).

ЛЕММА 2.3. Пусть контуры $\tilde{a}, \tilde{b}$ представляют элементы $a, b \in \pi_1(P, \Phi(q))$. Пусть существует малая деформация контуров $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$, переводящая их в непересекающиеся контуры. Тогда

$$\ell(\Phi_q^{-1}(a)) \cap \ell(\Phi_q^{-1}(b)) = \emptyset.$$

Рис. 2.3

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если

$$\ell(\Phi_q^{-1}(a)) \cap \ell(\Phi_q^{-1}(b)) \neq \emptyset,$$

то $\ell(\tilde{a})$ и $\ell(\tilde{b})$ пересекаются так, что их пересечение нельзя исключить малой деформацией (см. рис. 2.3).

ЛЕММА 2.4. Пусть контуры $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3$ не имеют самопересечений и представляют $c_1, c_2, c_3 \in \pi_1(P, \Phi(q))$ такие, что $c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 = 1$. Пусть существует малая деформация контуров $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2$ и $\tilde{c}_3$, переводящая их в попарно непересекающиеся контуры. Тогда или набор

$$\{\Phi_q^{-1}(c_1), \Phi_q^{-1}(c_2), \Phi_q^{-1}(c_3)\},$$

или набор

$$\{\Phi_q^{-1}(c_3^{-1}), \Phi_q^{-1}(c_2^{-1}), \Phi_q^{-1}(c_1^{-1})\}$$

является последовательным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $C_i = \Phi_q^{-1}(c_i)$. Согласно лемме 2.3 $\ell(C_1) \cap \ell(C_2) = \emptyset$. Предположим, что $\ell(C_1)$ и $\ell(C_2)$ расположены как на рис. 2.4.

Рассмотрим дуги $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ и $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ на ∂H . Тогда $C_1\alpha \subset \alpha$, $C_2\alpha \subset \alpha$, откуда $C_3^{-1}\alpha = C_1C_2\alpha \subset \alpha$. Аналогично $C_3^{-1}\beta \subset \beta$. Таким образом, $\ell(C_3)$ проходит так, как показано пунктиром на рис. 2.4. Но тогда согласно лемме 2.2 $C_1\ell(C_3) \subset N_1$ и, следовательно, $C_1\beta_2 \in N_1$. Это невозможно, поскольку

$$C_1\beta_2 = C_3^{-1}C_2^{-1}\beta_2 = C_3^{-1}\beta \subset N_2.$$

Таким образом, $\ell(C_1)$ и $\ell(C_2)$ расположены как на рис. 2.5 или рис. 2.6.

Рис. 2.4

Рис. 2.5

Рис. 2.6

Аналогичное утверждение верно также для пар (C_2, C_3) и (C_3, C_1) . Отсюда следует, что или набор $\{C_1, C_2, C_3\}$, или набор $\{C_3^{-1}, C_2^{-1}, C_1^{-1}\}$ является упорядоченным в смысле §1.

Аналогично, упорядоченными являются наборы $\{C_1 C_2 C_1^{-1}, C_1, C_3\}$ или наборы $\{C_3^{-1}, C_1^{-1}, C_1 C_2^{-1} C_1^{-1}\}$. Среди наборов $\{C_1, C_2, C_3\}$ и $\{C_3^{-1}, C_1^{-1}, C_1 C_2^{-1} C_1^{-1}\}$ упорядочен может быть только один. Таким образом, или наборы $\{C_1, C_2, C_3\}$, $\{C_1 C_2 C_1^{-1}, C_1, C_3\}$, или наборы $\{C_3^{-1}, C_2^{-1}, C_1^{-1}\}$, $\{C_3^{-1}, C_1^{-1}, C_1 C_2^{-1} C_1^{-1}\}$ являются упорядоченными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Положим $A_i = \Phi_q^{-1}(a_i)$, $B_i = \Phi_q^{-1}(b_i)$, $C_i =$

$\Phi_q^{-1}(c_i)$. Рассмотрим наборы

$$\{x_1, \dots, x_{g+n}\} = \{a_1, b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}, \dots, a_g, b_g a_g^{-1} b_g^{-1}, c_{g+1}, \dots, c_n\}$$

и

$$\{X_1, \dots, X_{g+n}\} = \{A_1, B_1 A_1^{-1} B_1^{-1}, \dots, A_g, B_g A_g^{-1} B_g^{-1}, C_{g+1}, \dots, C_n\}.$$

Применяя лемму 2.4 к наборам

$$\{x_1 \cdots x_{\ell-1}, x_\ell, x_{\ell+1} \cdots x_{g+n}\},$$

находим, что или все наборы вида

$$\{X_1 \cdots X_{\ell-1}, X_\ell, X_{\ell+1} \cdots X_{g+n}\},$$

или все наборы вида

$$\{X_{g+n}^{-1} \cdots X_{\ell+1}^{-1}, X_\ell^{-1}, X_{\ell-1}^{-1} \cdots X_1^{-1}\}$$

являются последовательными. То есть или набор $\{X_1, \dots, X_{g+n}\}$, или набор $\{X_{g+n}^{-1}, \dots, X_1^{-1}\}$ является последовательным. В последнем случае согласно лемме 2.1 контуры, представляющие a_i, b_i, c_i , расположены не так, как на рис. 2.1, и, следовательно, именно набор $\{X_1, \dots, X_{g+n}\}$ является последовательным набором типа $(0, 2g + k, m)$. Значит, набор

$$\{A_i, B_i (i = 1, \dots, g), C_j (j = g + 1, \dots, n)\}$$

является последовательным, типа (g, k, m) .

§ 3. Свободные фуксовы группы ранга 2

Согласно теоремам 1.1 и 2.1 всякий последовательный набор типа (g, k, m) порождает фуксову группу типа (g, k, m) и всякая фуксова группа типа (g, k, m) порождается последовательным набором. В этом параграфе мы найдем все (с точностью до сопряженности в $\text{Aut}(\Lambda)$) последовательные наборы типов $(0, 3, 0)$, $(0, 2, 1)$, $(0, 1, 2)$ и $(1, 1, 0)$, что дает описания всех фуксовых групп ранга 2.

ЛЕММА 3.1. *Всякий упорядоченный набор $\{C_1, C_2, C_3\}$ является последовательным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неподвижные точки сдвигов C_i разбивают абсолют на 6 дуг γ_i , изображенных на рис. 3.1.

Пусть α и β — неподвижные притягивающая и отталкивающая точки сдвига $C_1 C_2 C_1^{-1}$. Тогда

$$\ell(C_1 C_2 C_1^{-1}) = C_1 \ell(C_2) \quad \text{и} \quad \beta \in \gamma_4 \cup \gamma_5 \cup \gamma_6.$$

С другой стороны,

$$C_1 \ell(C_2) = C_3^{-1} C_2^{-1} \ell(C_2) = C_3^{-1} \ell(C_2) \quad \text{и} \quad \beta \in \gamma_3 \cup \gamma_2 \cup \gamma_1 \cup \gamma_6.$$

Рис. 3.1

Таким образом, $\beta \in \gamma_6$. Аналогично, $\alpha \in \gamma_6$. То есть $\{C_1 C_2 C_1^{-1}, C_1, C_3\}$ также упорядоченный набор.

ЛЕММА 3.2 [23]. Пусть

$$C_1 z = \lambda_1 z \quad (\lambda_1 > 1), \quad C_2(z) = \frac{(\lambda_2 \alpha - \beta)z + (1 - \lambda_2)\alpha\beta}{(\lambda_2 - 1)z + (\alpha - \lambda_2\beta)} \quad (\lambda_2 > 1), \quad C_3 = (C_1 C_2)^{-1}.$$

Тогда $\{C_1, C_2, C_3\}$ – последовательный набор, если и только если

$$(3.1) \quad 0 < \left(\frac{\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2}}{1 + \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \right)^2 \beta \leq \alpha < \beta < \infty.$$

При этом $C_3 \in \text{Aut}_1(\Lambda)$, если и только если

$$\left(\frac{\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2}}{1 + \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \right)^2 \beta = \alpha.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию

$$C_3^{-1}(z) = \lambda_1 \frac{(\lambda_2 \alpha - \beta)z + (1 - \lambda_2)\alpha\beta}{(\lambda_2 - 1)z + (\alpha - \lambda_2\beta)}.$$

Неподвижные точки C_3 – это корни уравнения $C_3^{-1}(x) = x$, т.е.

$$(3.2) \quad (\lambda_2 - 1)x^2 - (\lambda_2\beta - \alpha - \lambda_1\beta + \lambda_1\lambda_2\alpha)x + \lambda_1(\lambda_2 - 1)\alpha\beta = 0.$$

Следовательно: 1) $C_3 \in \text{Aut}_2(H)$, если и только если

$$(\alpha + \lambda_1\lambda_2\alpha - \lambda_1\beta - \lambda_2\beta)^2 - 4\lambda_1\lambda_2(\beta - \alpha)^2 > 0,$$

т.е.

$$\alpha > \left(\frac{\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2}}{1 + \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \right)^2 \beta \quad \text{или} \quad \alpha < \left(\frac{\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} - 1} \right)^2 \beta;$$

2) $C_3 \in \text{Aut}_1(H)$, если и только если

$$(\alpha + \lambda_1 \lambda_2 \alpha - \lambda_1 \beta - \lambda_2 \beta)^2 - 4 \lambda_1 \lambda_2 (\beta - \alpha)^2 = 0,$$

т.е.

$$\alpha = \left(\frac{\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2}}{1 + \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \right)^2 \beta \quad \text{или} \quad \alpha = \left(\frac{\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} - 1} \right)^2 \beta.$$

Пусть теперь $\{C_1, C_2, C_3\}$ – последовательный набор и $\bar{\alpha} \leq \bar{\beta}$ – корни уравнения (3.2).

Рис. 3.2

Тогда $0 < \alpha < \beta < \bar{\alpha}$ (см. рис. 3.2), откуда

$$\frac{\lambda_2 \beta - \alpha - \lambda_1 \beta + \lambda_1 \lambda_2 \alpha}{2(\lambda_2 - 1)} = \frac{\bar{\alpha} + \bar{\beta}}{2} > \beta.$$

То есть, ввиду $\lambda_1 \lambda_2 - 1 > \lambda_1 + \lambda_2 - 2$,

$$\begin{aligned} \alpha &> \frac{\lambda_1 + \lambda_2 - 2}{\lambda_1 \lambda_2 - 1} \beta > \frac{\lambda_1 + \lambda_2 - 2 + 2(1 - \sqrt{\lambda_1 \lambda_2})}{\lambda_1 \lambda_2 - 1 + 2(1 - \sqrt{\lambda_1 \lambda_2})} \beta \\ &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2 - 2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}{\lambda_1 \lambda_2 - 2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} + 1} \beta = \left(\frac{\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} - 1} \right)^2 \beta. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\alpha \geq \left(\frac{\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} + 1} \right)^2 \beta.$$

Пусть теперь

$$0 < \left(\frac{\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} + 1} \right)^2 \beta \leq \alpha < \beta < \infty$$

и $\bar{\alpha} \leq \bar{\beta}$ – корни уравнения (3.2). Соотношение $\beta < \bar{\alpha}$ эквивалентно паре соотношений

$$(3.3) \quad \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta} > \beta^2,$$

$$(3.4) \quad (\lambda_2 - 1)\beta^2 - (\lambda_2 \beta - \alpha - \lambda_1 \beta + \lambda_1 \lambda_2 \alpha)\beta + \lambda_1(\lambda_2 - 1)\alpha\beta > 0.$$

Соотношение (3.3) очевидно ввиду

$$\bar{\alpha} \cdot \bar{\beta} = \lambda_1 \alpha \beta \geq \lambda_1 \left(\frac{\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} + 1} \right)^2 \beta^2 > \beta^2.$$

Соотношение (3.4) следует из

$$\lambda_2 \beta^2 - \beta^2 - \lambda_2 \beta^2 + \alpha \beta + \lambda_1 \beta^2 - \lambda_1 \lambda_2 \alpha \beta + \lambda_1 \lambda_2 \alpha \beta - \lambda_1 \alpha \beta = (\lambda_1 - 1)(\beta^2 - \alpha \beta) > 0.$$

Таким образом, $\beta < \bar{\alpha}$. Знак C_3 совпадает со знаком $C_3(0) = C_2^{-1}C_1^{-1}(0) > 0$. Следовательно, $\{C_1, C_2, C_3\}$ – упорядоченный набор, который согласно лемме 3.1 является последовательным.

ЛЕММА 3.3. Пусть

$$C_1(z) = \lambda z \quad (\lambda > 1), \quad C_2(z) = \frac{(1 - a\gamma)z + a^2\gamma}{-\gamma z + (1 + a\gamma)} \quad (\gamma > 0), \quad C_3 = (C_1 C_2)^{-1}.$$

Тогда $\{C_1, C_2, C_3\}$ – последовательный набор, если и только если $a\gamma \leq \frac{\sqrt{\lambda} + 1}{\sqrt{\lambda} - 1}$.

При этом $C_3 \in \text{Aut}_1(H)$, если и только если $a\gamma = \frac{\sqrt{\lambda} + 1}{\sqrt{\lambda} - 1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию

$$C_3(z) = \lambda \frac{(1 - a\gamma)z + a^2\gamma}{-\gamma z + (1 + a\gamma)}.$$

Неподвижные точки C_3 – это корни уравнения

$$(3.5) \quad \gamma x^2 - (1 + a\gamma - \lambda + \lambda a\gamma)x + \lambda a^2\gamma = 0.$$

Следовательно,

1) $C_3 \in \text{Aut}_2(H)$, если и только если

$$(1 + a\gamma - \lambda + \lambda a\gamma)^2 > 4\lambda a^2\gamma^2, \quad \text{т.е.} \quad a\gamma > \frac{\sqrt{\lambda} + 1}{\sqrt{\lambda} - 1},$$

2) $C_3 \in \text{Aut}_1(H)$, если и только если

$$(1 + a\gamma - \lambda + \lambda a\gamma)^2 = 4\lambda a^2\gamma^2, \quad \text{т.е.} \quad a\gamma = \frac{\sqrt{\lambda} + 1}{\sqrt{\lambda} - 1}.$$

Пусть теперь $a\gamma \geq \frac{\sqrt{\lambda} + 1}{\sqrt{\lambda} - 1}$ и $\bar{\alpha} \leq \bar{\beta}$ – корни уравнения (3.5). Тогда $\bar{\alpha}\bar{\beta} = \lambda a^2 > a^2$ и $\gamma a^2 - (1 + a\gamma - \lambda + \lambda a\gamma)a + \lambda a^2\gamma = a(\lambda - 1) > 0$. Следовательно, $0 < a < \bar{\alpha}$ и $\{C_1, C_2, C_3\}$ – упорядоченный набор, который согласно лемме 3.1 является последовательным.

ЛЕММА 3.4 [29]. Пусть

$$A(z) = \frac{(\lambda_A \alpha_A - \beta_A)z + (1 - \lambda_A)\alpha_A \beta_A}{(\lambda_A - 1)z + (\alpha_A - \lambda_A \beta_A)},$$

$$B(z) = \frac{(\lambda_B \alpha_B - \beta_B)z + (1 - \lambda_B)\alpha_B \beta_B}{(\lambda_B - 1)z + (\alpha_B - \lambda_B \beta_B)}$$

и

$$C^{-1} = [A, B](z) = \lambda z \quad (\lambda_A, \lambda_B, \lambda > 1).$$

Тогда $\{A, B, C\}$ является последовательным набором типа $(1, 1, 0)$, если и только если

$$(3.6) \quad -\infty < \alpha_A < \beta_B < \beta_A < \alpha_B < 0,$$

$$(3.7) \quad \frac{\alpha_A}{\beta_A} < \sqrt{\lambda}, \quad \frac{\beta_B}{\alpha_B} < \sqrt{\lambda},$$

$$(3.8) \quad \lambda_A = \frac{\alpha_A \sqrt{\lambda} - \beta_A}{\beta_A \sqrt{\lambda} - \alpha_A}, \quad \lambda_B = \frac{\beta_B \sqrt{\lambda} - \alpha_B}{\alpha_B \sqrt{\lambda} - \beta_B},$$

$$(3.9) \quad \alpha_B \beta_B \lambda - [(\alpha_A + \beta_A)(\alpha_B + \beta_B) - \alpha_A \beta_A - \alpha_B \beta_B] \sqrt{\lambda} + \alpha_A \beta_A = 0,$$

причем в этом случае

$$A(z) = \frac{(\alpha_A + \beta_A)\sqrt{\lambda}z - \alpha_A \beta_A(\sqrt{\lambda} + 1)}{(\sqrt{\lambda} + 1)z - (\alpha_A + \beta_A)},$$

$$B(z) = \frac{(\alpha_B + \beta_B)z - \alpha_B \beta_B(\sqrt{\lambda} + 1)}{(\sqrt{\lambda} + 1)z - (\alpha_B + \beta_B)\sqrt{\lambda}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{A, B, C\}$ – последовательный набор типа $(1, 1, 0)$. Тогда $\{A, BA^{-1}B^{-1}, C\}$ – последовательный набор, откуда $-\infty < \alpha_A < \beta_B < \alpha_B < 0$ (см. рис. 3.3).

Рис. 3.3

Рассмотрим $\tilde{A} = ABAB^{-1}A^{-1} = AC$. Тогда

$$\frac{(\lambda_A \alpha_A - \beta_A) \frac{1}{\lambda} z + (1 - \lambda_A) \alpha_A \beta_A}{(\lambda_A - 1) \frac{1}{\lambda} z + (\alpha_A - \lambda_A \beta_A)} = \tilde{A}(z) = \frac{(\lambda_A \tilde{\alpha} - \tilde{\beta}) z + (1 - \lambda_A) \tilde{\alpha} \tilde{\beta}}{(\lambda_A - 1) z + (\tilde{\alpha} - \lambda_A \tilde{\beta})}$$

(где $\tilde{\alpha} < \tilde{\beta}$ — неподвижные точки $\tilde{A}$). Отсюда

$$\frac{(1 - \lambda_A) \alpha_A \beta_A}{\frac{1}{\lambda} (\lambda_A - 1)} = \frac{(1 - \lambda_A) \tilde{\alpha} \tilde{\beta}}{(\lambda_A - 1)}$$

и

$$\frac{(\alpha_A - \beta_A)^2}{(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta})^2} = \frac{1}{\lambda}.$$

Первое равенство влечет $\alpha_A \beta_A = \frac{1}{\lambda} \tilde{\alpha} \tilde{\beta}$ и, следовательно, $(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta})^2 = (\tilde{\alpha} - \tilde{\beta})^2 + 4\tilde{\alpha} \tilde{\beta} = \lambda(\alpha_A + \beta_A)^2$. Таким образом, равенство

$$\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} = \frac{(\lambda_A \tilde{\alpha} - \tilde{\beta}) - (\tilde{\alpha} - \lambda_A \tilde{\beta})}{\lambda_A - 1} = \frac{\frac{1}{\lambda} (\lambda_A \alpha_A - \beta_A) - (\alpha_A - \lambda_A \beta_A)}{\frac{1}{\lambda} (\lambda_A - 1)}$$

влечет

$$\frac{(\lambda_A \alpha_A - \beta_A) - \lambda(\alpha_A - \lambda_A \beta_A)}{(\lambda_A - 1)} = \sqrt{\lambda}(\alpha_A + \beta_A).$$

Ввиду $\sqrt{\lambda} \neq 1$ отсюда следует

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\beta_A - \alpha_A \lambda_A}{\alpha_A - \beta_A \lambda_A} > \frac{-\alpha_A \lambda_A}{-\beta_A \lambda_A} = \frac{\alpha_A}{\beta_A}.$$

т.е. $\lambda_A = \frac{\alpha_A \sqrt{\lambda} - \beta_A}{\beta_A \sqrt{\lambda} - \alpha_A}$. Аналогично $\lambda_B = \frac{\beta_B \sqrt{\lambda} - \alpha_B}{\alpha_B \sqrt{\lambda} - \beta_B}$ и $\frac{\beta_B}{\alpha_B} < \sqrt{\lambda}$. Таким образом,

$$A(z) = \frac{(\alpha_A + \beta_A) \sqrt{\lambda} z - \alpha_A \beta_A (\sqrt{\lambda} + 1)}{(\sqrt{\lambda} + 1) z - (\alpha_A + \beta_A)},$$

$$B(z) = \frac{(\alpha_B + \beta_B) z - \alpha_B \beta_B (\sqrt{\lambda} + 1)}{(\sqrt{\lambda} + 1) z - (\alpha_B + \beta_B) \sqrt{\lambda}}.$$

Соотношение $[A, B](z) = \lambda z$ влечет (3.9).

Пусть теперь выполняется (3.6)–(3.9). Положим

$$\tilde{A}(z) = \frac{(\alpha_A + \beta_A) \sqrt{\lambda} z - \alpha_A \beta_A (\sqrt{\lambda} + 1)}{(\sqrt{\lambda} + 1) z - (\alpha_A + \beta_A)},$$

$$\tilde{B}(z) = \frac{(\alpha_B + \beta_B) z - \alpha_B \beta_B (\sqrt{\lambda} + 1)}{(\sqrt{\lambda} + 1) z - (\alpha_B + \beta_B) \sqrt{\lambda}}.$$

Тогда $\tilde{A}(\alpha_A) = \alpha_A$, $\tilde{A}(\beta_A) = \beta_A$, $\tilde{B}(\alpha_B) = \alpha_B$, $\tilde{B}(\beta_B) = \beta_B$. Согласно (3.9) $[\tilde{A}, \tilde{B}] = C^{-1}$. Поэтому $\{\tilde{A}, \tilde{B} \tilde{A}^{-1} \tilde{B}^{-1}, C\}$ — упорядоченный набор, который согласно

лемме 3.1 является последовательным. Таким образом, $\{\tilde{A}, \tilde{B}, C\}$ – последовательный набор типа $(1, 1, 0)$. Как уже доказано,

$$\tilde{A}z = \frac{(\tilde{\lambda}_A \alpha_A - \beta_A)z + (1 - \tilde{\lambda}_A)\alpha_A \beta_A}{(\tilde{\lambda}_A - 1)z + (\alpha_A - \lambda_A \beta_A)},$$

где

$$\tilde{\lambda}_A = \frac{\alpha_A \sqrt{\lambda} - \beta_A}{\beta_A \sqrt{\lambda} - \alpha_A} = \lambda_A.$$

Следовательно, $\tilde{A} = A$. Аналогично $\tilde{B} = B$.

§ 4. Пространства типа Фрике–Клейна–Тайхмюллера

1. Пусть $\gamma_{g,n}$ – группа, порожденная образующими

$$v = v_{g,n} = \{a_i, b_i \ (i = 1, \dots, g), c_i \ (i = g+1, \dots, n)\}$$

с определяющим соотношением

$$\prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \prod_{i=g+1}^n c_i = 1.$$

Положим $c_i = [a_i, b_i]$ ($i = 1, \dots, g$).

Пусть $n = g + k + m$ и $6g + 3k + 2m > 6$. Обозначим через $\tilde{T}_{g,k,m}$ множество мономорфизмов $\psi: v \rightarrow \text{Aut}(\Lambda)$ таких, что $\psi(v)$ – последовательный набор типа (g, k, m) . Для $d \in \gamma_{g,n}$ и $D \in \text{Aut}(\Lambda)$ положим

$$T_{g,k,m}(d, D) = \{\psi \in \tilde{T}_{g,k,m} \mid \psi(d) = D\}.$$

Пусть $k + m > 1$. Рассмотрим вложение

$$\varphi: \gamma_{g,n-1} \rightarrow \gamma_{g,n},$$

определенное условиями

$$\begin{aligned} \varphi(a_i) &= a_i, \quad \varphi(b_i) = b_i \quad (i = 1, \dots, g), \\ \varphi(c_{g+1}) &= c_{n-1} c_n, \quad \varphi(c_i) = c_n^{-1} c_{n-1}^{-1} c_{i-1} c_{n-1} c_n \quad (i = g+2, \dots, n-1). \end{aligned}$$

Рассмотрим также вложение $\tilde{\varphi}: \gamma_{0,3} \rightarrow \gamma_{g,n}$, определенное условиями

$$\tilde{\varphi}(c_1) = c_n^{-1} c_{n-1}^{-1}, \quad \tilde{\varphi}(c_2) = c_{n-1}, \quad \tilde{\varphi}(c_3) = c_n.$$

Гомоморфизм $\psi \in \tilde{T}_{g,k,m}$ порождает гомоморфизмы

$$\Phi(\psi) = \psi\varphi, \quad \tilde{\Phi}(\psi) = \psi\tilde{\varphi}.$$

Для $\psi' \in \Phi(\tilde{T}_{g,k,m})$ обозначим через $\Phi_{\psi'}$ ограничение отображения $\tilde{\Phi}$ на $\Phi^{-1}(\psi')$.

Положим

$$\begin{aligned} (k', m') &= (k+1, m-2), \quad (\tilde{k}, \tilde{m}) = (1, 2) \quad \text{при } m \leq 2, \\ (k', m') &= (k, 0), \quad (\tilde{k}, \tilde{m}) = (2, 1) \quad \text{при } m = 1, \\ (k', m') &= (k-1, 0), \quad (\tilde{k}, \tilde{m}) = (3, 0) \quad \text{при } m = 0. \end{aligned}$$

ЛЕММА 4.1. $\Phi(\tilde{T}_{g,k,m}) = \tilde{T}_{g,k',m'}$. Для любого $\psi' \in \tilde{T}_{g,k',m'}$

$$\Phi_{\psi'}(\Phi^{-1}(\psi')) = \tilde{T}_{0,\tilde{k},\tilde{m}'}(c_1, \psi'(c_{g+1}^{-1})),$$

причем отображение $\Phi_{\psi'}$ – взаимно однозначно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\psi \in \tilde{T}_{g,k,m}$ и $\Gamma = \psi(\gamma_{g,n})$. Согласно теореме 1.1 Γ – фуксова группа, а $P = H/\Gamma$ – риманова поверхность рода g с k дырами и m проколами. Согласно лемме 2.1 множество $\psi(v_{g,n})$ порождает стандартную систему образующих

$$\tilde{v} = \{\tilde{a}_i, \tilde{b}_i \ (i = 1, \dots, g), \tilde{c}_i \ (i = g + 1, \dots, n)\}$$

группы $\pi_1(P)$. Отсюда (см. рис. 2.2) следует, что набор

$$\{d_1, \dots, d_r\} = \{\tilde{a}_1, \tilde{b}_1 \tilde{a}_1^{-1} \tilde{b}_1^{-1}, \dots, \tilde{a}_g, \tilde{b}_g \tilde{a}_g^{-1} \tilde{b}_g^{-1}, \tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_n\}$$

таков, что при любом $1 < i < g + n$ элементы

$$d_1 \cdots d_{i-1}, d_i, d_{i+1} \cdots d_r$$

могут быть представлены простыми контурами без попарных пересечений. В этом случае набор

$$\{d_1, \dots, d_{2g}, d_{r-1}d_r, d_r^{-1}d_{r-1}^{-1}d_{2g+1}d_{r-1}d_r, \dots, d_r^{-1}d_{r-1}^{-1}d_{r-2}d_{r-1}d_r\}$$

также обладает этим свойством. Согласно лемме 2.4 отсюда следует, что $\psi\varphi$ – последовательный набор. Таким образом,

$$\Phi(\tilde{T}_{g,k,m}) \subset \tilde{T}_{g,k',m'}.$$

Величины (k', m') легко найти из геометрии набора $\tilde{v}$ (рис. 2.2).

Аналогично доказывается, что $\Phi_{\psi'}(\Phi^{-1}(\tilde{T}_{g,k',m'})) \subset \tilde{T}_{0,\tilde{k}',\tilde{m}'}(c_1, \psi'(c_{g+1}^{-1}))$.

Осталось доказать, что

$$\Phi(\tilde{T}_{g,k,m}) \supset \tilde{T}_{g,k',m'},$$

и для каждого $\psi' \in \tilde{T}_{g,k',m'}$ построить отображение

$$T_{0,\tilde{k},\tilde{m}}(c_1^{-1}, \psi'(c_{g+1})) \rightarrow \Phi^{-1}(\psi'),$$

обратное к $\Phi_{\psi'}$. Пусть

$$\tilde{\psi} \in T_{0,\tilde{k},\tilde{m}}(c_1^{-1}, \psi'(c_{g+1})).$$

Рассмотрим набор сдвигов $\psi(v_{g,n})$, заданный условиями

$$\begin{aligned} \psi(a_i) &= \psi'(a_i), \quad \psi(b_i) = \psi'(b_i) \quad (i = 1, \dots, g), \\ \psi(c_i) &= \psi'(c_{n-1}c_n c_{i-1}c_n^{-1}c_{n-1}^{-1}) \quad (i = g + 2, \dots, n - 2), \\ \psi(c_{n-1}) &= \tilde{\psi}(c_2), \quad \psi(c_n) = \tilde{\psi}(c_3). \end{aligned}$$

Из определений следует, что это последовательный набор, порождающий $\psi \in \tilde{T}_{g,k,m}$, причем $\Phi(\psi) = \psi'$. Таким образом, $\Phi(\tilde{T}_{g,k,m}) \supset \tilde{T}_{g,k',m'}$. Нетрудно видеть, что соответствие $\tilde{\psi} \mapsto \psi$ порождает отображение, обратное к $\Phi_{\psi'}$.

2. Пусть $g > 0$. Рассмотрим вложение $\varphi^*: \gamma_{g-1,n} \rightarrow \gamma_{g,n}$, определяемое условиями $\varphi^*(a_i) = a_i$, $\varphi^*(b_i) = b_i$ ($i = 1, \dots, g - 1$), $\varphi^*(c_i) = c_i$ ($i = g, \dots, n$).

Рассмотрим также вложение $\tilde{\varphi}^*: \gamma_{1,1} \rightarrow \gamma_{g,n}$, определенное условиями

$$\tilde{\varphi}^*(a_1) = a_g, \quad \tilde{\varphi}^*(b_1) = b_g, \quad \tilde{\varphi}^*(c_1) = c_g.$$

Гомоморфизм $\psi \in \tilde{T}_{g,k,m}$ порождает гомоморфизмы

$$\Omega(\psi) = \psi\varphi^*, \quad \tilde{\Omega}(\psi) = \psi\tilde{\varphi}^*.$$

Для $\psi' \in \Omega(\tilde{T}_{g,k,m})$ обозначим через $\Omega_{\psi'}$ ограничение отображения $\tilde{\Omega}$ на $\Omega^{-1}(\psi')$.

ЛЕММА 4.2. $\Omega(\tilde{T}_{g,k,m}) = \tilde{T}_{g-1,k+1,m}$. Для любого $\psi' \in \tilde{T}_{g-1,k+1,m}$

$$\Omega_{\psi'}(\Omega^{-1}(\psi')) = \tilde{T}_{1,1,0}(c_1, \psi'(c_g)),$$

причем $\Omega_{\psi'}$ – взаимно однозначно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношение $\Omega(\tilde{T}_{g,k,m}) \subset \tilde{T}_{g-1,k+1,m}$ сразу следует из наших определений. Осталось доказать, что

$$\Omega(\tilde{T}_{g,k,m}) \supset \tilde{T}_{g-1,k+1,m},$$

и для каждого $\psi' \in \tilde{T}_{g-1,k+1,m}$ построить отображение

$$\tilde{T}_{1,1,0}(c_1, \psi'(c_g)) \rightarrow \Omega^{-1}(\psi'),$$

обратное к $\Omega_{\psi'}$. Пусть

$$\tilde{\psi} \in \tilde{T}_{1,1,0}(c_1, \psi'(c_g)).$$

Построим набор сдвигов $\psi(g, n)$, заданный условиями $\psi(a_i) = \psi'(a_i)$, $\psi(b_i) = \psi'(b_i)$ ($i = 1, \dots, g-1$), $\psi(a_g) = \psi(a_1)$, $\psi(b_g) = \tilde{\psi}(b_g)$, $\psi(c_i) = \psi'(c_i)$ ($i = g+1, \dots, n$). Из определений следует, что это последовательный набор, порождающий $\psi \in \tilde{T}_{g,k,m}$, причем $\Omega(\psi) = \psi'$. Таким образом,

$$\Omega(\tilde{T}_{g,k,m}) = \tilde{T}_{g-1,k+1,m}.$$

Нетрудно видеть, что соответствие $\tilde{\psi} \mapsto \psi$ порождает отображение, обратное к $\Omega_{\psi'}$.

3. Параметризуем теперь пространство $\tilde{T}_{g,k,m}$, следуя [23].

Пусть $\psi \in \tilde{T}_{g,k,m}$ и $n = g + k + m$.

При $m = 0$ сопоставим мономорфизму ψ набор чисел

$$\omega(\psi) = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \xi_1, \eta_1, \varepsilon_1, \dots, \xi_g, \eta_g, \varepsilon_g, \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_{g+k-1}, \beta_{g+k-1}).$$

При $m = 1$ сопоставим набор

$$\omega(\psi) = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \xi_1, \eta_1, \varepsilon_1, \dots, \xi_g, \eta_g, \varepsilon_g, \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_{g+k-1}, \beta_{g+k-1}, \alpha_{g+k}).$$

При $m > 1$ – набор

$$\omega(\psi) = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \xi_1, \eta_1, \varepsilon_1, \dots, \xi_g, \eta_g, \varepsilon_g, \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_{g+k}, \beta_{g+k}, \alpha_{g+k+1}, \dots, \alpha_{n-2}).$$

Эти числа определяются следующими условиями:

$$\begin{aligned} \psi(c_i)(z) &= \frac{(\lambda_i \alpha_i - \beta_i)z + (1 - \lambda_i)\alpha_i \beta_i}{(\lambda_i - 1)z + (\alpha_i - \lambda_i \beta_i)}, \quad \lambda_i > 1 \quad \text{при } i \leq g+k, \\ \psi(c_i)(z) &= \frac{(1 - \alpha_i \lambda_i)z + \alpha_i^2 \lambda_i}{-\lambda_i z + (1 + \alpha_i \lambda_i)}, \quad \lambda_i > 0 \quad \text{при } i > g+k, \\ \psi(a_i)(z) &= \frac{(\lambda_i^a \delta_i - \eta_i)z - (1 - \lambda_i^a)\delta_i \eta_i}{(\lambda_i^a - 1)z + (\delta_i - \lambda_i^a \eta_i)}, \\ \psi(b_i)(z) &= \frac{(\lambda_i^b \varepsilon_i - \xi_i)z - (1 - \lambda_i^b)\varepsilon_i \xi_i}{(\lambda_i^b - 1)z + (\varepsilon_i - \lambda_i^b \xi_i)}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы сопоставили мономорфизму ψ набор $\omega(\psi)$ из $6g + 3k + 2m - 3$ чисел.

ЛЕММА 4.3. Пусть $\psi_1, \psi_2 \in \tilde{T}_{g,k,m}$ и $\omega(\psi_1) = \omega(\psi_2)$. Тогда $\psi_1 = \psi_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определениям величины $\omega(\psi)$ непосредственно определяют $\psi(c_i)$. Уравнения (3.8) и (3.9) позволяют однозначно найти $\psi(a_i), \psi(b_i)$ через $\psi(c_i)$ и $\omega(\psi)$.

Таким образом, $\omega(\psi)$ дает глобальную систему координат на $\tilde{T}_{g,k,m}$.

Группа $\text{Aut}(\Lambda)$ действует на $\tilde{T}_{g,k,m}$ сопряжением по правилу $\psi \mapsto h^*\psi$, где $\psi \in \tilde{T}_{g,k,m}$, $h \in \text{Aut}(\Lambda)$, $h^*\psi(d) = h\psi(d)h^{-1}$. Положим

$$T_{g,k,m} = \tilde{T}_{g,k,m} / \text{Aut}(\Lambda).$$

Если $\omega(\psi) = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \xi_1, \eta_1, \dots, a_{n-2})$, то

$$\omega(h^*\psi) = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, h\xi_1, h\eta_1, \dots, ha_{n-2}).$$

Это позволяет отождествить

$$T_{0,0,m} = \{\psi \in \tilde{T}_{0,0,m} \mid \psi(c_1c_2)(0) = 0, \psi(c_1c_2)(\infty) = \infty, a_1 = -1\},$$

$$T_{0,1,m} = \{\psi \in \tilde{T}_{0,1,m} \mid \alpha_1 = \infty, \beta_1 = 0, a_2 = 1\},$$

$$T_{1,1,m} = \{\psi \in \tilde{T}_{1,1,m} \mid \alpha_1 = \infty, \beta_1 = 0, \xi_1 = 1\}$$

и в остальных случаях

$$T_{g,k,m} = \{\psi \in \tilde{T}_{g,k,m} \mid \alpha_1 = \infty, \beta_1 = 0, \alpha_2 = 1\}.$$

Опишем теперь отображение

$$\Psi: T_{g,k,m} \rightarrow \mathbb{R}^{6g+3k+2m-6}.$$

При $g = k = 0$ положим

$$\Psi(\psi) = \{\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4, \dots, \lambda_{m-1}, a_3, \dots, a_{m-2}\} \subset \mathbb{R}^{2m-6}.$$

При $g = 0, k = 1$ положим

$$\Psi(\psi) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, a_3, \dots, a_{m-1}\} \subset \mathbb{R}^{2m-3}.$$

При $g = k = 1$ положим

$$\Psi(\psi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{m+1}, \eta_1, \varepsilon_1, \alpha_2, \beta_2, a_3, a_4, \dots, a_m\} \subset \mathbb{R}^{2m+3}.$$

В остальных случаях:

при $m = 0$ положим

$$\Psi(\psi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{g+k-1}, \xi_1, \eta_1, \varepsilon_1, \dots, \xi_g, \eta_g, \varepsilon_g, \beta_2, \\ \alpha_3, \beta_3, \dots, \alpha_{g+k-1}, \beta_{g+k-1}\} \subset \mathbb{R}^{6g+3k-6},$$

при $m = 1$

$$\Psi(\psi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{g+k}, \xi_1, \eta_1, \varepsilon_1, \dots, \xi_g, \eta_g, \varepsilon_g, \beta_2, \\ \alpha_3, \beta_3, \dots, \alpha_{g+k-1}, \beta_{g+k-1}, \alpha_{g+k}\} \subset \mathbb{R}^{6g+3k-4},$$

а в остальных случаях

$$\Psi(\psi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{g+k+m-1}, \xi_1, \eta_1, \varepsilon_1, \dots, \xi_g, \eta_g, \varepsilon_g, \beta_2, \\ \alpha_3, \beta_3, \dots, \alpha_{g+k}, \beta_{g+k}, a_{g+k+1}, \dots, a_{g+k+m-2}\} \subset \mathbb{R}^{6g+3k+2m-6}.$$

Положим

$$\widehat{T}_{g,k,m} = \Psi(T_{g,k,m}).$$

ТЕОРЕМА 4.1 [23]. *Отображение $\Psi: T_{g,k,m} \rightarrow \widehat{T}_{g,k,m}$ является диффеоморфизмом и $\widehat{T}_{g,k,m}$ является открытой областью в $\mathbb{R}^{6g+3k+2m-6}$, гомеоморфной $\mathbb{R}^{6g+3k+2m-6}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем доказывать индукцией по $2g+k+m$. Для $T_{1,1,0}, T_{0,3,0}, T_{0,2,1}, T_{0,1,2}$ утверждение теоремы следует из лемм 3.2–3.4. Докажем утверждение для $T_{g,k,m}$ в предположении, что оно верно для всех $T_{g',k',m'}$, где $2g' + k' + m' < 2g + k + m$. Пусть $g > 0$. Тогда согласно лемме 4.2 $\widehat{T}_{g,k,m} = \{\psi\}$ представляется в виде расслоения над $\widehat{T}_{g-1,k+1,m}$ со слоем, гомеоморфным $\widehat{T}_{1,1,0}(c_1^{-1}, \psi(c_g))$. Таким образом, $T_{g,k,m}$ представляется в виде расслоения над $T_{g-1,k+1,m}$ со слоем, гомеоморфным

$$\{\psi \in \widehat{T}_{1,1,0} \mid \psi(c_1)(z) = \lambda_g z\}.$$

Согласно лемме 3.4 последнее множество гомеоморфно $\mathbb{R}^3$. По предположению индукции отсюда следует, что

$$T_{g,k,m} \cong \mathbb{R}^{6g+3k+2m-6}.$$

Пусть $g = 0$. Тогда согласно лемме 4.1 $\widehat{T}_{0,k,m} = \{\psi\}$ представляется в виде расслоения над $\widehat{T}_{0,k',m'}$ со слоем $\widehat{T}_{0,\tilde{k},\tilde{m}}(c_1^{-1}, \psi(c_1))$. Таким образом, $T_{0,k,m}$ представляется в виде расслоения над $T_{0,k',m'}$ со слоем, гомеоморфным $\widehat{T}_{0,3,0}(c_1^{-1}, \psi(c_1))$, $\widehat{T}_{0,2,1}(c_1^{-1}, \psi(c_1))$ или $\widehat{T}_{0,1,2}(c_1^{-1}, \psi(c_1))$. Согласно леммам 3.2, 3.3 последние множества гомеоморфны соответственно $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^1$. По предположению индукции отсюда следует, что

$$T_{0,k,m} \cong \mathbb{R}^{3k+2m-6}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Неравенства, ограничивающие $\widehat{T}_{g,k,m}$ в $\mathbb{R}^{6g+3k+2m-6}$, становятся линейными и квадратичными, если перейти от параметров λ_i к $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$.

§ 5. Модули римановых поверхностей

1. Пусть $\psi \in \tilde{T} = \widehat{T}_{g,k,m}$. По определению это отображение $\psi: v \rightarrow \text{Aut}(\Lambda)$ (где $v = v_{g,g+k+m}$), наделенное некоторыми специальными свойствами. Положим

$$\widetilde{\text{Mod}}^\psi = \widetilde{\text{Mod}}_{g,k,m}^\psi = \{\alpha \in \text{Aut}(\gamma) \mid \psi\alpha \in \tilde{T}\},$$

где γ – группа, порожденная v .

Отображению $\psi \in \tilde{T}$ отвечает фуксова группа $\Gamma^\psi = \psi(\gamma)$ и риманова поверхность $R^\psi = \Lambda/\Gamma^\psi$. Рассмотрим группу G_p автогомеоморфизмов R^ψ , сохраняющих точку $p \in R^\psi$, ориентацию R^ψ и переводящую дыры в дыры и проколы в проколы. Рассмотрим подгруппу $G'_p \subset G_p$, состоящую из гомеоморфизмов, получающихся из тождественного гомотопией, сохраняющей p . Положим $\widehat{\text{Mod}}_p^\psi = G_p/G'_p$.

ЛЕММА 5.1. *Группы $\widetilde{\text{Mod}}^\psi$ и $\widehat{\text{Mod}}_p^\psi$ изоморфны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим униформизацию $\Phi: \Lambda \rightarrow P^\psi$. Пусть $q \in \Phi^{-1}(p)$. Сопоставим элементу $\gamma \in \Gamma^\psi$ элемент $\Phi(\ell_\gamma) \in \pi_1(P^\psi, p)$, где $\ell_\gamma \subset \Lambda$ — отрезок, соединяющий q и $\gamma(q)$. Соответствие $\gamma \mapsto \Phi(\ell_\gamma)$ порождает изоморфизм $\Phi_q: \Gamma^\psi \rightarrow \pi_1(P^\psi, p)$. Пусть теперь $\alpha \in \widetilde{\text{Mod}}^\psi$. Согласно лемме 2.1 последовательному набору $\psi(v)$ отвечает стандартная система образующих группы $\pi_1(P^\psi, p)$. Представим ее контурами, непересекающимися вне p . Их прообраз высекает на Λ фундаментальную область M с вершиной q . Аналогичную область M^α порождает последовательный набор $\psi\alpha(v)$. Таким образом, существует гомеоморфизм $A: \Lambda \rightarrow \Lambda$ такой, что $A(M) = M^\alpha$ и $A\Gamma^\psi A^{-1} = \Gamma^\psi$. На поверхности P^ψ он порождает автогомеоморфизм $\varphi_\alpha \in \widetilde{\text{Mod}}_p^\psi$.

Соответствие $\alpha \mapsto \varphi_\alpha$ порождает гомоморфизм $\varphi_q: \widetilde{\text{Mod}}^\psi \rightarrow \widetilde{\text{Mod}}_p^\psi$. Нетрудно видеть, что это мономорфизм. Эпиморфизм следует из теоремы 2.1.

ЛЕММА 5.2. Пусть $\psi, \psi' \in \tilde{T}$. Тогда $\widetilde{\text{Mod}}^\psi = \widetilde{\text{Mod}}^{\psi'}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi_q: \widetilde{\text{Mod}}^\psi \rightarrow \widetilde{\text{Mod}}_p^\psi$ и $\varphi'_q: \widetilde{\text{Mod}}^{\psi'} \rightarrow \widetilde{\text{Mod}}_{p'}^{\psi'}$ — изоморфизмы, построенные при доказательстве леммы 5.1. Рассмотрим стандартные системы образующих v и v' групп $\pi_1(P^\psi, p)$ и $\pi_1(P^{\psi'}, p')$. Рассмотрим гомеоморфизм $\beta: P \rightarrow P'$, переводящий v в v' . Он индуцирует изоморфизм $\tilde{\beta}: \widetilde{\text{Mod}}_p^\psi \rightarrow \widetilde{\text{Mod}}_{p'}^{\psi'}$. Согласно нашим определениям и лемме 5.1 $\varphi = \varphi_q^{-1} \tilde{\beta}^{-1} \varphi'_{q'}$ порождает изоморфизм $\varphi: \widetilde{\text{Mod}}^{\psi'} \rightarrow \widetilde{\text{Mod}}^\psi$.

Следуя лемме 5.2, мы будем писать $\widetilde{\text{Mod}}$ вместо $\widetilde{\text{Mod}}^\psi$.

Всякий $h \subset \gamma$ порождает принадлежащий $\widetilde{\text{Mod}}$ автоморфизм $d \mapsto h d h^{-1}$ группы γ . Пусть $\widetilde{\text{IMod}} \subset \widetilde{\text{Mod}}$ — подгруппа всех таких автоморфизмов и $\text{Mod} = \widetilde{\text{Mod}} / \widetilde{\text{IMod}}$.

Аналогично всякий $h \in \pi(P^\psi, p)$ порождает принадлежащий $\widetilde{\text{Mod}}_p^\psi$ автоморфизм $d \mapsto h d h^{-1}$ группы $\pi_1(P^\psi, p)$. Пусть $\widetilde{\text{IMod}}_p^\psi \subset \widetilde{\text{Mod}}_p^\psi$ — подгруппа всех таких автоморфизмов и $\text{Mod}_p^\psi = \widetilde{\text{Mod}}_p^\psi / \widetilde{\text{IMod}}_p^\psi$. Движение точки p задает естественные изоморфизмы между группами Mod_p^ψ , отвечающими разным p . Таким образом, каждая из них естественно изоморфна группе $\text{Mod}_*^\psi = \widetilde{\text{Mod}}_*^\psi / \widetilde{\text{IMod}}_*^\psi$, где $\widetilde{\text{Mod}}_*^\psi$ — группа сохраняющих ориентацию автогомеоморфизмов P^ψ , переводящих дыры в дыры, а проколы в проколы, а $\widetilde{\text{IMod}}_*^\psi \subset \widetilde{\text{Mod}}_*^\psi$ — подгруппа гомотопных тождественному автогомеоморфизмов. Переводящие дыры в дыры и проколы в проколы гомеоморфизмы $P^\psi \rightarrow P^{\psi'}$ порождают естественные изоморфизмы $\widetilde{\text{Mod}}_*^\psi \rightarrow \widetilde{\text{Mod}}_*^{\psi'}$. Поэтому в дальнейшем мы будем опускать значки ψ и считать $\widetilde{\text{Mod}}_* = \widetilde{\text{Mod}}_*^\psi$, $\text{Mod}_* = \text{Mod}_*^\psi$. Из леммы 5.1 следует

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Группа $\text{Mod} = \text{Mod}_{g,k,m}$ естественно изоморфна группе $\text{Mod}_* = \text{Mod}_{g,k,m}^{g,k,m}$ гомотопических классов, сохраняющих ориентацию автогомеоморфизмов поверхности типа (g, k, m) .

2. Перейдем теперь к описанию пространства модулей (т.е. классов биголоморфной эквивалентности) римановых поверхностей.

ТЕОРЕМА 5.1. *Группа $\text{Mod}_{g,k,m}$ естественно действует на $T_{g,k,m}$ диффеоморфизмами. Это действие дискретно. Фактор-множество $T_{g,k,m}/\text{Mod}_{g,k,m}$ естественно отождествляется с пространством модулей $M_{g,k,m}$ римановых поверхностей типа (g, k, m) .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 5.2 группа $\widetilde{\text{Mod}} = \widetilde{\text{Mod}}_{g,k,m}$ естественно действует на множестве $\widetilde{T} = \widetilde{T}_{g,k,m}$. На этом же множестве действует группа $\text{Aut}(\Lambda)$. Нетрудно видеть, что $\widetilde{\text{Mod}} \cap \text{Aut}(\Lambda) = \text{I}\widetilde{\text{Mod}}$. Таким образом, группа Mod естественно действует на множестве $T = T_{g,k,m}$. Введенные в §4 координаты на $T_{g,k,m} = \{\psi\}$ явными аналитическими формулами описывают последовательный набор $\psi(v)$ как подмножество $(PSL(2, \mathbb{R}))^{2g+k+m-1}$. Поэтому аналитичность действия Mod на T следует из аналитичности операции в группе $PSL(2, \mathbb{R})$.

Рассмотрим отображение $\tilde{\Phi}: \tilde{T} \rightarrow M = M_{g,k,m}$, где $\tilde{\Phi}(\psi) = P^\psi$. Очевидно, что $\tilde{\Phi}$ принимает одинаковые значения на орбитах действия групп $\text{Aut}(\Lambda)$ и $\widetilde{\text{Mod}}$. Таким образом, $\tilde{\Phi}$ индуцирует отображение $\Phi: T/\text{Mod} \rightarrow M$. Согласно теореме униформизации всякая $P \in M$ имеет вид Λ/Γ , где Γ – фуксова группа. Таким образом, согласно теореме 2.1 $\Phi(T) = \tilde{\Phi}(\tilde{T}) = M$.

Докажем теперь, что $\Phi(x) \neq \Phi(x')$ при $x \neq x'$. Действительно, пусть $\psi \in x, \psi' \in x'$ и $\tilde{\Phi}(\psi) = \tilde{\Phi}(\psi')$. По определению это означает, что римановы поверхности P^ψ и $P^{\psi'}$ биголоморфно эквивалентны. Следовательно, ψ и ψ' можно выбрать таким образом, чтобы униформизирующие группы Γ^ψ и $\Gamma^{\psi'}$ совпадали. Таким образом, существует $\alpha \in \widetilde{\text{Mod}}^\psi$ такой, что $\psi' = \psi\alpha$. Следовательно, согласно лемме 5.2 $\alpha \in \widetilde{\text{Mod}}$ и, значит, $x = x'$.

Сопоставим каждому $\psi \in \tilde{T}$ набор длин геодезических на поверхности P^ψ . Длина геодезической, отвечающей $C \in \Gamma^\psi$, равна $\ln \frac{1}{4} \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} + \sqrt{\lambda + \frac{1}{\lambda} - 2} \right)$, где λ – параметр сдвига C [22]. Таким образом, дискретность действия Mod относительно наших координат следует из дискретности множества длин геодезических [22].

Согласно теореме 5.1 введенная в §4 аналитическая структура на T порождает аналитическую структуру на пространстве модулей M . Именно эту структуру мы будем иметь в виду, исследуя топологию M . Теоремы 4.1 и 5.1 дают

СЛЕДСТВИЕ 5.2 [18]. *Пространство модулей римановых поверхностей типа (g, k, m) диффеоморфно $\mathbb{R}^{6g+3k+2m-6}/\text{Mod}_{g,k,m}$, где $\text{Mod}_{g,k,m}$ – дискретная группа.*

§ 6. Пространство голоморфных морфизмов римановых поверхностей

1. Голоморфным морфизмом степени d мы называем тройку $(\tilde{P}, f, P)$, где $\tilde{P}$ и P – римановы поверхности, а $f: \tilde{P} \rightarrow P$ – голоморфное отображение степени d такое, что $f(\tilde{P}) = P$. Морфизмы $(\tilde{P}_1, f_1, P_1)$ и $(\tilde{P}_2, f_2, P_2)$ считаются совпадающими, если существуют биголоморфные отображения $\tilde{\varphi}: \tilde{P}_1 \rightarrow \tilde{P}_2$ и $\tilde{\varphi}: P_1 \rightarrow P_2$ такие, что $\varphi f_1 = f_2 \tilde{\varphi}$.

Морфизмы $(\tilde{P}_1, f_1, P_1)$ и $(\tilde{P}_2, f_2, P_2)$ называются топологически эквивалентными, если существуют гомеоморфизмы $\tilde{\varphi}: \tilde{P}_1 \rightarrow \tilde{P}_2$ и $\varphi: P_1 \rightarrow P_2$ такие, что $\varphi f_1 = f_2 \tilde{\varphi}$.

Класс топологической эквивалентности называется топологическим типом. Зафиксируем топологический тип t и рассмотрим множество H^t всех морфизмов этого топологического типа.

ПРИМЕР. Если P – сфера Римана, то $(\tilde{P}, f, P)$ – это мероморфная функция на $\tilde{P}$. Если $\tilde{P}$ – тоже сфера Римана, то f – рациональная функция. Если, кроме того, $f^{-1}(\infty) = \infty$, то f – полином. Критическим значением полинома называется число $f(x)$, где $df(x) = 0$. Если все эти числа различны, то говорят, что это полином общего положения. Все такие полиномы топологически эквивалентны. Однако в общем случае характер критических значений не определяет топологический тип полинома [31]. К множествам вида H^t относятся также лорановские полиномы общего положения [32] и пространства мероморфных функций с фиксированным типом полюсов [33]–[35], возникающих в топологической теории поля [10].

Топологический тип однозначно определяет топологический тип (g, k, m) поверхности P , накрываемой морфизмом $(\tilde{P}, f, P) \in H^t$. Кроме того, t определяет число b критических значений

$$B = B(\tilde{P}, f, P) = \{f(\tilde{p}) \in P \mid \tilde{p} \in \tilde{P}, df(\tilde{p}) = 0\}.$$

Далее мы считаем, что $b < \infty$. Тогда соответствие $(\tilde{P}, f, P) \mapsto P \setminus B$ задает отображение

$$\Psi: H^t \rightarrow M_{g,k,m+b}.$$

В §5 мы ввели топологию в пространстве $M_{g,k,m+b}$. Введем теперь топологию в пространстве H^t , потребовав, чтобы функция Ψ была непрерывна.

2. Пусть теперь $\psi \in \tilde{T}_{g,k,m+b}$ и $\tilde{\gamma}$ – подгруппа индекса d группы $\gamma = \gamma_{g,n}$, где $n = g + k + m + b$. Положим

$$\Gamma^\psi = \psi(\gamma), \quad \Gamma_{\tilde{\gamma}}^\psi = \psi(\tilde{\gamma}), \quad P^\psi = \Lambda/\Gamma^\psi \quad \text{и} \quad P_{\tilde{\gamma}}^\psi = \Lambda \setminus \Gamma_{\tilde{\gamma}}^\psi.$$

Тогда естественное вложение $\Gamma_{\tilde{\gamma}}^\psi \subset \Gamma^\psi$ индуцирует морфизм

$$f_{\tilde{\gamma}}^\psi: P_{\tilde{\gamma}}^\psi \rightarrow P^\psi$$

степени d . Заклеим теперь проколы на P^ψ и $P_{\tilde{\gamma}}^\psi$, порожденные параболическими сдвигами $\psi(c_{g+k+m+1}), \dots, \psi(c_n)$. В итоге получим морфизм

$$(P_{\tilde{\gamma}}^\psi, f_{\tilde{\gamma}}^\psi, P^\psi)^b.$$

ЛЕММА 6.1. *Всякий голоморфный морфизм имеет вид*

$$(P_{\tilde{\gamma}}^\psi, f_{\tilde{\gamma}}^\psi, P^\psi)^b,$$

где $\psi \in \tilde{T}_{g,k,m+b}$ и $\tilde{\gamma} \subset \gamma_{g,n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(\tilde{P}, f, P)$ – произвольный голоморфный морфизм. Положим $P^* = P \setminus B(\tilde{P}, f, P) \in M_{g,k,m+b}$ и $\tilde{P}^* = f^{-1}(P^*)$. Согласно теореме 5.1 существует $\psi \in \tilde{T}_{g,k,m+b}$ такой, что $P^\psi = P^*$. Согласно теореме 2.1 можно считать, что $\psi(c_{g+k+m+1}), \dots, \psi(c_n)$ отвечают проколам из множества $B = B(\tilde{P}, f, P) \subset P$.

Группа $\Gamma^\psi = \psi(\gamma)$ является группой монодромий универсального накрытия $\Phi: \Lambda \rightarrow P^*$. Ввиду универсальности накрытие Φ может быть “пропущено” через произвольное накрытие поверхности P^* , и, в частности, существует универсальное накрытие $\tilde{\Phi}: \Lambda \rightarrow \tilde{P}^*$ такое, что $\Phi = f\tilde{\Phi}$. Пусть $\tilde{\Gamma}^\psi \subset \Gamma^\psi$ – группа монодромий этого накрытия. Положим $\tilde{\gamma} = \psi^{-1}(\tilde{\Gamma}^\psi)$. Тогда

$$(P_{\tilde{\gamma}}^\psi, f_{\tilde{\gamma}}^\psi, P^\psi) = (\tilde{P}^*, f^*, P^*),$$

где $f^* = f|_{\tilde{P}^*}$. Заклеивание проколов B порождает

$$(P_{\tilde{\gamma}}^*, f_{\tilde{\gamma}}^\psi, P^\psi)^b = (\tilde{P}, f, P).$$

ЛЕММА 6.2. Пусть $\psi, \psi' \in \tilde{T}_{g,k,m+b}$ и $\tilde{\gamma} \subset \gamma_{g,n}$ – подгруппа. Тогда $(P_{\tilde{\gamma}}^\psi, f_{\tilde{\gamma}}^\psi, P^\psi)^b$ и $(P_{\tilde{\gamma}}^{\psi'}, f_{\tilde{\gamma}}^{\psi'}, P^{\psi'})^b$ имеют одинаковый топологический тип. Если, кроме того, существует $A \in \text{Aut}(\Lambda)$ такой, что $A\psi(w)A^{-1} = \psi'(w)$ для всех $w \in v_{g,n}$, то

$$(P_{\tilde{\gamma}}^\psi, f_{\tilde{\gamma}}^\psi, P^\psi)^b = (P_{\tilde{\gamma}}^{\psi'}, f_{\tilde{\gamma}}^{\psi'}, P^{\psi'})^b.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $v = v_{g,g+k+m+b}$. Согласно лемме 2.1 наборы $\psi(v)$ и $\psi'(v)$ при естественных накрытиях $\Phi: \Lambda \rightarrow P^\psi$, $\Phi': \Lambda \rightarrow P^{\psi'}$ переходят в стандартные системы образующих групп $\pi_1(P^\psi, p)$ и $\pi_1(P^{\psi'}, p')$. Следовательно, существует гомеоморфизм $\varphi: P^\psi \rightarrow P^{\psi'}$, переводящий одну стандартную систему в другую. Проекции Φ_q и Φ'_q “поднимают” его до гомеоморфизма $A: \Lambda \rightarrow \Lambda$ такого, что $A\psi(w)A^{-1} = \psi'(w)$ для любого $w \in v$. Отсюда следует, что $A\psi(\tilde{\gamma})A^{-1} = \psi'(\tilde{\gamma})$. Следовательно, A индуцирует гомеоморфизм $\tilde{\varphi}: \tilde{P}^\psi \rightarrow \tilde{P}^{\psi'}$ такой, что $\varphi f = f'\tilde{\varphi}$. Если, кроме того, $A \in \text{Aut}(\Lambda)$, то φ и $\tilde{\varphi}$ – голоморфные отображения и, следовательно,

$$(P_{\tilde{\gamma}}^\psi, f_{\tilde{\gamma}}^\psi, P^\psi)^b = (P_{\tilde{\gamma}}^{\psi'}, f_{\tilde{\gamma}}^{\psi'}, P^{\psi'})^b.$$

Выделим в группе $\gamma = \gamma_{g,n}$, порожденной

$$v_{g,n} = \{a_i, b_i \ (i = 1, \dots, g), c_i \ (i = g+1, \dots, n)\},$$

подмножество с элементов вида hc_ih^{-1} , где $i > g+k+m$, $h \in \gamma$.

Положим

$$\widetilde{\text{Mod}}_{g,k,m+b}^b = \{\alpha \in \widetilde{\text{Mod}}_{g,k,m+b} \mid \alpha(c) = c\}.$$

ЛЕММА 6.3. Морфизмы $(P_{\tilde{\gamma}}^\psi, f_{\tilde{\gamma}}^\psi, P^\psi)^b$ и $(P_{\tilde{\gamma}'}^{\psi'}, f_{\tilde{\gamma}'}^{\psi'}, P^{\psi'})^b$ имеют одинаковый топологический тип, если и только если $\gamma' = \alpha(\tilde{\gamma})$, где $\alpha \in \widetilde{\text{Mod}}_{g,k,m+b}^b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{\varphi}: P_{\tilde{\gamma}}^{\psi} \rightarrow P_{\gamma'}^{\psi}$ и $\varphi: P^{\psi} \rightarrow P^{\psi}$ — гомеоморфизмы, порождающие топологическую эквивалентность $(P_{\tilde{\gamma}}^{\psi}, f_{\tilde{\gamma}}^{\psi}, P^{\psi})^b$ и $(P_{\gamma'}^{\psi}, f_{\gamma'}^{\psi}, P^{\psi'})^b$. Естественные накрытия $\Phi: \Lambda \rightarrow P_{\tilde{\gamma}}^{\psi} \rightarrow P^{\psi}$ и $\Phi': \Lambda \rightarrow P_{\gamma'}^{\psi} \rightarrow P^{\psi}$ поднимают их до гомеоморфизма $A: \Lambda \rightarrow \Lambda$ такого, что $\psi(\gamma) = A\psi(\gamma)A^{-1}$ и $\psi(\gamma') = A\psi(\tilde{\gamma})A^{-1}$. Обозначим через $A^*: \psi(\gamma) \rightarrow \psi(\gamma)$ гомоморфизм $A^*(h) = AhA^{-1}$ и положим $\alpha = \psi^{-1}A^*\psi: \gamma \rightarrow \gamma$. Тогда $\alpha \in \widetilde{\text{Mod}}_{g,k,m+b}^b$ и $\alpha(\tilde{\gamma}) = \gamma'$.

Пусть теперь $\gamma' = \alpha(\tilde{\gamma})$, где $\alpha \in \widetilde{\text{Mod}}_{g,k,m+b}^b$. Положим $\psi' = \psi\alpha \in \tilde{T}_{g,k,m+b}$. Тогда

$$(P_{\tilde{\gamma}}^{\psi'}, f_{\tilde{\gamma}}^{\psi'}, P^{\psi'})^b = (P_{\gamma'}^{\psi}, f_{\gamma'}^{\psi}, P^{\psi})^b,$$

причем согласно лемме 6.2 $(P_{\tilde{\gamma}}^{\psi'}, f_{\tilde{\gamma}}^{\psi'}, P^{\psi'})^b$ и $(P_{\tilde{\gamma}}^{\psi}, f_{\tilde{\gamma}}^{\psi}, P^{\psi})^b$ имеют одинаковый топологический тип.

ЛЕММА 6.4. Пусть $(P_{\tilde{\gamma}}^{\psi}, f_{\tilde{\gamma}}^{\psi}, P^{\psi}) \in H^t$. Тогда $H^t = \{(P_{\tilde{\gamma}}^{\psi'}, f_{\tilde{\gamma}}^{\psi'}, P^{\psi'})^b \mid \psi' \in \tilde{T}_{g,k,m+b}\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 6.2

$$\{(P_{\tilde{\gamma}}^{\psi'}, f_{\tilde{\gamma}}^{\psi'}, P^{\psi'})^b \mid \psi' \in \tilde{T}_{g,k,m+b}\} \subset H^t.$$

Докажем обратное включение. Пусть $(\tilde{P}, f, P) \in H^t$. Согласно лемме 6.1

$$(\tilde{P}, f, P) = (P_{\gamma'}^{\psi'}, f_{\gamma'}^{\psi'}, P^{\psi'})^b,$$

где согласно лемме 6.3 $\gamma' = \alpha(\tilde{\gamma})$ для $\alpha \in \widetilde{\text{Mod}}_{g,k,m+b}^b$. Положим $\psi^* = \psi'\alpha$. Тогда

$$(P_{\gamma'}^{\psi'}, f_{\gamma'}^{\psi'}, P^{\psi'})^b = (P_{\tilde{\gamma}}^{\psi^*}, f_{\tilde{\gamma}}^{\psi^*}, P^{\psi^*})^b$$

и $\psi^* \in \tilde{T}_{g,k,m+b}$.

3. Для подгруппы $\tilde{\gamma} \subset \gamma = \gamma_{g,n}$ положим

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{Mod}}_{g,k,m,b}^{\tilde{\gamma}} &= \{\alpha \in \widetilde{\text{Mod}}_{g,k,m+b}^b \mid \alpha\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}\}, \\ \widetilde{\text{IMod}}_{g,k,m,b}^{\tilde{\gamma}} &= \widetilde{\text{Mod}}_{g,k,m,b}^{\tilde{\gamma}} \cap \widetilde{\text{IMod}}_{g,k,m+b}^{\tilde{\gamma}}, \\ \text{Mod}_{g,k,m,b}^{\tilde{\gamma}} &= \widetilde{\text{Mod}}_{g,k,m,b}^{\tilde{\gamma}} \setminus \widetilde{\text{IMod}}_{g,k,m,b}^{\tilde{\gamma}}. \end{aligned}$$

Автоморфизм $\alpha \in \widetilde{\text{IMod}}_{g,k,m,b}^{\tilde{\gamma}}$ переводит $\psi \in \tilde{T}_{g,k,m+b}$ в $h^*\psi \in \tilde{T}_{g,k,m+b}$, где $h^*\psi(w) = h\psi(w)h^{-1}$ и $h \in \text{Aut}(\Lambda)$. Поэтому группа $\text{Mod}_{g,k,m,b}^{\tilde{\gamma}}$ действует на $T_{g,k,m+b}$.

Пусть $N(g, n, d)$ — множество подгрупп индекса d группы $\gamma_{g,n}$. На этом множестве действует группа $\text{Mod}_{g,k,m+b}^b$. Обозначим через $n(g, k, m, b, d)$ число орбит этого действия.

Пусть $H_{g,k,m}^{b,d}$ — пространство голоморфных морфизмов $(\tilde{P}, f, P)$ таких, что $P \in H_{g,k,m}$, степень f равна d и число критических значений f равно b .

ТЕОРЕМА 6.1. *Пространство $H = H_{g,k,m}^{b,d}$ распадается на $n(g, k, m, b, d)$ компонент связности. Каждая из них является классом топологической эквивалентности голоморфных морфизмов и гомеоморфна $T_{g,k,m+b}/\widetilde{\text{Mod}}_{g,k,m,b}^{\tilde{\gamma}}$, где $\text{Mod}_{g,k,m,b}^{\tilde{\gamma}}$ действует дискретно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно леммам 6.4 и 6.3 каждая компонента связности пространства H имеет вид

$$H^t = \{(P_{\tilde{\gamma}}^{\psi}, f_{\tilde{\gamma}}^{\psi}, P^{\psi})^b \mid \psi \in \tilde{T}_{g,k,m+b}\}$$

и число таких компонент равно $n(g, k, m, b, d)$.

Рассмотрим отображение $\tilde{\Phi}: \tilde{T}_{g,k,m+b} \rightarrow H^t$, где $\tilde{\Phi}(\psi) = (P_{\tilde{\gamma}}^{\psi}, f_{\tilde{\gamma}}^{\psi}, P^{\psi})^b$. Согласно лемме 6.2 она индуцирует отображение $\Phi: T_{g,k,m+b} \rightarrow H^t$. Нетрудно видеть, что слой отображения Φ состоит из орбиты группы $\text{Mod}_{g,k,m,b}^{\tilde{\gamma}}$. Дискретность действия $\text{Mod}_{g,k,m,b}^{\tilde{\gamma}}$ следует из дискретности действия $\text{Mod}_{g,k,m,b}$ на $T_{g,k,m+b}$ (теорема 5.1).

СЛЕДСТВИЕ 6.1. *Пространство всех голоморфных морфизмов фиксированного топологического типа связано и гомеоморфно $\mathbb{R}^s \setminus \text{Mod}$, где Mod – дискретная группа.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Частные случаи этой теоремы были известны ранее: 1) для многочленов Лорана общего положения [32]; 2) для мероморфных функций общего положения (вместе с описанием группы Mod [36]; 3) для $g = 0$ [37]; 4) для компактных поверхностей [38].

§ 7. Поднятие фуксовых групп на $SL(2, \mathbb{R})$

1. Для исследования спинорных расслоений и суперримановых поверхностей нам понадобится решение следующей задачи. Пусть

$$\Gamma \subset \text{Aut}_1(\Lambda) \cup \text{Aut}_2(\Lambda) \subset \text{Aut}(\Lambda) = PSL(2, \mathbb{R})$$

– конечно порожденная фуксова группа. Как описать все ее поднятия на $SL(2, \mathbb{R})$, т.е. подгруппы $\Gamma^* \subset SL(2, \mathbb{R})$, на которых естественная проекция $J: SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ индуцирует изоморфизм $\Gamma^* \rightarrow \Gamma$.

Для начала положим

$$\text{Aut}_i^* = J^{-1}(\text{Aut}_i(\Lambda)) \subset SL(2, \mathbb{R}) \quad (i = 1, 2)$$

и свяжем с каждой матрицей $C \in \text{Aut}_i^*$ число $\sigma(C) \in \{1, -1\}$, однозначно определяемое следующим условием: матрица C сопряжена матрице

$$\sigma(C) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \quad \lambda > 0$$

(если $C \in \text{Aut}_2^*$), или матрице

$$\sigma(C) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(если $C \in \text{Aut}_1^*$). Таким образом, знак $\sigma(C)$ совпадает со знаком следа матрицы C .

ЛЕММА 7.1. *Пусть $C_1, C_2, C_3 \in SL(2, \mathbb{R})$ такие, что $\{J(C_1), J(C_2), J(C_3)\}$ – последовательный набор типа $(0, k, m)$. Тогда $C_1 C_2 C_3 = 1$, если и только если $\sigma(C_1)\sigma(C_2)\sigma(C_3) = -1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что $C_1, C_2 \in \text{Aut}_2^*$. После сопряжения пары (C_1, C_2) матрицей из $SL(2, \mathbb{R})$ можно считать, что

$$C_1 = \frac{\sigma(C_1)}{\sqrt{\lambda_1}} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и

$$C_2 = \frac{\sigma(C_2)}{\sqrt{\lambda_2}(\alpha - \beta)} \begin{pmatrix} (\lambda_2\alpha - \beta), & (1 - \lambda_2)\alpha\beta \\ (\lambda_2 - 1), & (\alpha - \lambda_2\beta) \end{pmatrix},$$

где $\lambda_1, \lambda_2 > 1, \alpha < \beta$. Следовательно,

$$C_1 C_2 = \frac{\sigma(C_1)\sigma(C_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}(\alpha - \beta)} \begin{pmatrix} \lambda_1(\lambda_2\alpha - \beta), & \lambda_1(1 - \lambda_2)\alpha\beta \\ (\lambda_2 - 1), & (\alpha - \lambda_2\beta) \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение этой матрицы имеет вид

$$x^2 - (\lambda_2\beta - \alpha - \lambda_1\beta + \lambda_1\lambda_2\alpha)x + \lambda_1\lambda_2(\alpha - \beta)^2 = 0.$$

Его корни имеют одинаковый знак, совпадающий со знаком числа

$$\lambda_2\beta - \alpha - \lambda_1\beta + \lambda_1\lambda_2\alpha.$$

Согласно лемме 3.2

$$0 < \left(\frac{\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2}}{1 + \sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \right)^2 \beta \leq \alpha < \beta < \infty.$$

Следовательно,

$$\alpha \geq \left(\frac{\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2} + 1} \right)^2 \beta \geq \left(\frac{\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2} - 1} \right)^2 \beta > \frac{\lambda_1 + \lambda_2 - 2}{\lambda_1\lambda_2 - 1} \beta,$$

откуда

$$\lambda_2\beta - \alpha - \lambda_1\beta + \lambda_1\lambda_2\alpha > 2(\lambda_2 - 1)\beta > 0.$$

Таким образом,

$$\sigma(C_1 C_2) = \sigma(C_1)\sigma(C_2) \text{sign}(\alpha - \beta) = -\sigma(C_1)\sigma(C_2)$$

и условие $C_3^{-1} = C_1 C_2$ эквивалентно

$$\sigma(C_3) = \sigma(C_3^{-1}) = \sigma(C_1 C_2) = -\sigma(C_1)\sigma(C_2).$$

Аналогично, если $C_1 \in \text{Aut}_2^*, C_2 \in \text{Aut}_1^*$, то после сопряжения элементом из $SL(2, \mathbb{R})$ можно считать, что

$$C_1 = \frac{\sigma(C_1)}{\sqrt{\lambda}} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и

$$C_2 = \sigma(C_2) \begin{pmatrix} 1 - \alpha\gamma, & a^2\gamma \\ -\gamma, & 1 + a\gamma \end{pmatrix},$$

где $\lambda > 1$, $\gamma > 0$. Следовательно,

$$C_1 C_2 = \frac{\sigma(C_1)\sigma(C_2)}{\sqrt{\lambda}} \begin{pmatrix} \lambda(1-a\gamma), & \lambda a^2 \gamma \\ -\gamma, & 1+a\gamma \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение этой матрицы имеет вид

$$x^2 - [\lambda(1-a\gamma) + (1+a\gamma)] + \lambda a^2 \gamma^2 = 0.$$

Его корни имеют одинаковый знак, совпадающий со знаком числа $\lambda(1-a\gamma) + (1+a\gamma)$.

Согласно лемме 3.3

$$a\gamma \geq \frac{\sqrt{\lambda} + 1}{\sqrt{\lambda} - 1} = \frac{(\sqrt{\lambda} + 1)^2}{\lambda - 1},$$

откуда

$$\lambda(1-a\gamma) + (1+a\gamma) = (1+\lambda) + a\gamma(1-\lambda) \leq (1+\lambda) - (\sqrt{\lambda} + 1)^2 < 0.$$

Таким образом,

$$\sigma(C_1 C_2) = -\sigma(C_1)\sigma(C_2)$$

и условие $C_3^{-1} = C_1 C_2$ эквивалентно

$$\sigma_1(C_1)\sigma(C_2)\sigma(C_3) = -1.$$

Приведенные рассуждения доказывают лемму в случае $k > 0$. Если $k = 0$, то после сопряжения можно считать, что

$$C_1 = \sigma(C_1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \sigma(C_2) \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Откуда

$$\sigma(C_1 C_2) = -\sigma(C_1)\sigma(C_2).$$

ЛЕММА 7.2. Пусть $A, B, C \in SL(2, \mathbb{R})$ такие, что $\{J(A), J(B), J(C)\}$ – последовательный набор типа $(1, 1, 0)$. Тогда $[A, B]C = 1$, если и только если $\sigma(C) = -1$. Кроме того, $\sigma(AB) = \sigma(A)\sigma(B)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению $\sigma(A) = \sigma(BA^{-1}B^{-1})$ и $\{J(A), J(BA^{-1}B^{-1}), J(C)\}$ – последовательный набор типа $(0, 3, 0)$. Поэтому первое утверждение леммы 7.2 следует из леммы 7.1. Докажем, что $\sigma(A, B) = \sigma(A)\sigma(B)$. После сопряжения элементом из $SL(2, \mathbb{R})$ можно считать, что

$$A = \frac{\sigma(A)}{\sqrt{\lambda_A}} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и

$$B = \frac{\sigma(B)}{\sqrt{\lambda_2}(\alpha - \beta)} \begin{pmatrix} \lambda_2 \alpha - \beta, & (1 - \lambda_2)\alpha\beta \\ \lambda_2 - 1, & \alpha - \lambda_2 \beta \end{pmatrix},$$

где $\lambda_1, \lambda_2 > 1$, $\beta < 0 < \alpha$ (см. рис. 7.1).

Рис. 7.1

Следовательно,

$$AB = \frac{\sigma(A)\sigma(B)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}(\alpha - \beta)} \begin{pmatrix} \lambda_1(\lambda_2\alpha - \beta), & \lambda_1(1 - \lambda_2)\alpha\beta \\ \lambda_2 - 1, & \alpha - \lambda_2\beta \end{pmatrix}.$$

Корни характеристического уравнения этой матрицы имеют одинаковый знак, совпадающий со знаком

$$\lambda_1(\lambda_2\alpha - \beta) + (\alpha - \lambda_2\beta) > 0.$$

Таким образом,

$$\sigma(AB) = \sigma(A)\sigma(B).$$

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть $\{A_i, B_i (i = 1, \dots, g), C_i (i = g + 1, \dots, n)\} \subset SL(2, \mathbb{R})$ и $\{J(A_i), J(B_i) (i = 1, \dots, g), J(C_i) (i = g + 1, \dots, n)\}$ – последовательный набор типа (g, k, m) . Тогда

$$\prod_{i=1}^g [A_i, B_i] \prod_{i=g+1}^n C_i = 1,$$

если и только если или $n = g$, или

$$\prod_{i=g+1}^n \sigma(C_i) = (-1)^{n-g}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 7.2 $\sigma([A_i, B_i]) = -1$. Поэтому утверждение теоремы достаточно доказать для $g = 0$. В этом случае воспользуемся индукцией по n . Для $n = 3$ утверждение следует из леммы 7.1. Шаг индукции также следует из леммы 7.1, если применить ее к набору $\{C_1 \cdots C_{n-2}, C_{n-1}, C_n\}$.

2. Свяжем теперь с поднятием фуксовой группы

$$\Gamma \subset \text{Aut}_2(\Lambda) \cup \text{Aut}_1(\Lambda)$$

функцию

$$H_1(\Lambda/\Gamma, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2,$$

где $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$. Итак, пусть $P = \Lambda/\Gamma$ и $\Gamma^* \subset SL(2, \mathbb{R})$ – подгруппа, на которой J индуцирует изоморфизм $\tilde{J}: \Gamma^* \rightarrow \Gamma$. При выбранной точке $q \in \Lambda$ униформизация $\Phi: \Lambda \rightarrow P$ индуцирует изоморфизм $\Phi_q: \Gamma \rightarrow \pi_1(P, p)$, где $p = \Phi(q)$ (см. §2). Построим функцию $\tilde{\omega}: \pi_1(P, p) \rightarrow \mathbb{Z}_2$, положив

$$\tilde{\omega}(c) = \begin{cases} 0, & \text{если } \sigma(\tilde{J}^{-1}(\Phi_q^{-1}(c))) = -1, \\ 1, & \text{если } \sigma(\tilde{J}^{-1}(\Phi_q^{-1}(c))) = 1. \end{cases}$$

Обозначим через $(\cdot, \cdot): H_1(P, \mathbb{Z}_2) \times H_2(P, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ билинейную форму индекса пересечения в $H_1(P, \mathbb{Z}_2)$. Естественная проекция $\pi_1(P, p) \rightarrow H_1(P, \mathbb{Z}_2)$ переносит $(\cdot, \cdot)$ на $\pi_1(P, p)$.

ЛЕММА 7.3. Пусть $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3 \subset P$ - простые контуры такие, что $\tilde{c}_i \cap \tilde{c}_j = p$, и отвечающие им $c_i \in \pi_1(P, p)$ такие, что $c_i \neq 1$ и $c_1 c_2 c_3 = 1$. Тогда $\tilde{\omega}(c_3) = \tilde{\omega}(c_1) + \tilde{\omega}(c_2) + (c_1, c_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 2.1 сдвиги $\Phi_q^{-1}(c_i)$ образуют последовательный набор типа $(0, k, m)$ или $(2, 1, 0)$. В первом случае $(c_1, c_2) = 0$ и $\tilde{\omega}(c_3) = \tilde{\omega}(c_1) + \tilde{\omega}(c_2)$ ввиду леммы 7.1. Во втором случае $(c_1, c_2) = 1$ и $\tilde{\omega}(c_3) = \tilde{\omega}(c_1) + \tilde{\omega}(c_2) + 1$ ввиду леммы 7.2.

ЛЕММА 7.4. Пусть $d_1, d_2 \in \pi_1(P, p)$ представляют один и тот же элемент группы $H_1(P, \mathbb{Z}_2)$. Тогда $\tilde{\omega}(d_1) = \tilde{\omega}(d_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим стандартную систему образующих

$$v = \{a_i, b_i \ (i = 1, \dots, g), c_i \ (i = g + 1, \dots, n)\}$$

группы $\pi_1(P, p)$. Рассмотрим функцию $\omega_v: H_1(P, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$, совпадающую с $\tilde{\omega}$ на v и удовлетворяющую условию $\omega_v(a + b) = \omega_v(a) + \omega_v(b) + (a, b)$ для любых $a, b \in H_1(P, \mathbb{Z}_2)$. Эти условия однозначно определяют ω_v . Рассмотрим скручивания Дена [39], т.е. преобразования одного из трех типов:

1. $a_1 \mapsto a_1 b_1$;
2. $a_1 \mapsto a_1 a_2 a_1 a_2^{-1} a_1^{-1}$,
 $b_1 \mapsto a_1 a_2 a_1^{-1} a_2^{-1} b_1 a_2^{-1} a_1^{-1}$,
 $a_2 \mapsto a_1 a_2 a_1^{-1}$,
 $b_2 \mapsto b_2 a_2^{-1} a_1^{-1}$;
3. $a_g \mapsto b_g^{-1} c_1 b_g^{-1} c_1^{-1} b_g$,
 $b_g \mapsto b_g^{-1} c_1 b_g c_1^{-1} b_g a_g b_g^{-2} c_g^{-1} b_g$,
 $c_1 \mapsto b_g^{-1} c_1 b_g$.

Они переводят v в другие стандартные системы образующих $\tilde{v}$. Из леммы 7.3 следует, что $\omega_{\tilde{v}} = \omega_v$. С другой стороны, при помощи последовательности скручивания Дена и перенумераций можно получить из v любую стандартную систему образующих и, в частности, такую, что a_1 - любой наперед заданный простой контур, не лежащий в ядре $(\cdot, \cdot)$, а c_{g+1} - любой наперед заданный простой контур, гомологичный дыре или проколу. Таким образом, $\tilde{\omega} = \omega_v \eta$, где $\eta: \pi_1(P, p) \rightarrow H_1(P, \mathbb{Z}_2)$ - естественная проекция.

Согласно лемме 7.4 функция $\tilde{\omega}$ индуцирует функцию $\omega: H_1(P, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$. Из леммы 7.3 сразу следует

СЛЕДСТВИЕ 7.1. $\omega(a + b) = \omega(a) + \omega(b) + (a, b)$.

Функции $\omega: H_1(P, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$, удовлетворяющие этому свойству, называются функциями Арфа [40]. Таким образом, наша конструкция сопоставляет всякому поднятию Γ^* группы Γ некоторую функцию Арфа $\omega_{\Gamma^*}: H_1(\Lambda/\Gamma, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$.

ТЕОРЕМА 7.2 [41]. Соответствие $\Gamma^* \mapsto \omega_{\Gamma^*}$ является взаимно однозначным соответствием между поднятиями группы Γ и функциями Арфа на $H_1(\Lambda/\Gamma, \mathbb{Z}_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из конструкции очевидно, что разным поднятиям отвечают разные функции Арфа. Сопоставим теперь произвольной функции Арфа ω поднятие Γ^* такое, что $\omega_{\Gamma^*} = \omega$. Для этого рассмотрим произвольный последовательный набор

$$V = \{A_i, B_i (i = 1, \dots, g), C_i (i = g + 1, \dots, n)\} = \{D_1, \dots, D_{g+n}\},$$

порождающий Γ . Рассмотрим матрицы

$$V^* = \{D_1^*, \dots, D_{g+n}^*\} \in SL(2, \mathbb{R}),$$

однозначно определенные условиями

$$J(D_i^*) = D_i \text{ и } \sigma(D_i^*) = \begin{cases} -1, & \text{если } \omega(\Phi_q(D_i)) = 0, \\ 1, & \text{если } \omega(\Phi_q(D_i)) = 1. \end{cases}$$

Согласно лемме 7.3 и теореме 7.1

$$\prod_{i=1}^g [A_i^*, B_i^*] \prod_{i=g+1}^n C_i^* = 1.$$

Ввиду того, что

$$\prod_{i=1}^g [A_i, B_i] \prod_{i=g+1}^n C_i = 1$$

— единственное определяющее соотношение в Γ , откуда следует, что ограничение гомоморфизма J на группу Γ^* , порожденную V^* , индуцирует изоморфизм $\Gamma^* \rightarrow \Gamma$. По построению $\omega_{\Gamma^*} = \omega$.

§ 8. Топологическая классификация функций Арфа и пар функций Арфа

В предыдущем параграфе мы свели описание поднятий фуксовых групп к функциям Арфа, т.е. отображениям $\omega: H_1(P, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ таким, что

$$\omega(a + b) = \omega(a) + \omega(b) + (a, b),$$

где $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ и $(a, b) \in \mathbb{Z}_2$ — индекс пересечения a и b в $H_1(P, \mathbb{Z}_2)$. Автогомеоморфизмы $\varphi: P \rightarrow P$ действуют на множестве функций Арфа. Цель этого параграфа — найти орбиты этого действия.

Итак, пусть P — поверхность типа (g, k, m) . Базис

$$v = \{a_i, b_i (i = 1, \dots, g), c_i (i = g + 1, \dots, n)\}$$

группы $H_1(P, \mathbb{Z}_2)$ назовем *стандартным*, если он является образом стандартной системы образующих

$$v' = \{a'_i, b'_i (i = 1, \dots, g), c'_i (i = g + 1, \dots, n)\} \in \pi_1(P, p)$$

при естественной проекции $\pi_1(P, p) \rightarrow H_1(P, \mathbb{Z}_2)$.

Рассмотрим группу автогомеоморфизмов $\text{Mod}(P)$ поверхности P , переводящих дыры в дыры и проколы в проколы. Она порождает группу $A(P)$, эффективно действующую на множестве функций Арфа. Элемент группы $A(P)$ однозначно определяется образом стандартного базиса v . Образующие Дена [39] группы $\text{Mod}(P)$ определяют образующие группы $A(P)$. Они разделяются на 5 типов и однозначно определяются тем, в какой стандартный базис

$$\tilde{v} = \{\tilde{a}_i, \tilde{b}_i (i = 1, \dots, g), \tilde{c}_i (i = g + 1, \dots, n)\} \subset H_1(P, \mathbb{Z}_2)$$

переходит фиксированный стандартный базис

$$v = \{a_i, b_i (i = 1, \dots, g), c_i (i = g + 1, \dots, n)\} \subset H_1(P, \mathbb{Z}_2).$$

Эти образующие имеют один из следующих 5 видов:

$$(1) \tilde{a}_i = a_i + b_i; \quad (2) \tilde{a}_i = b_i, \tilde{b}_i = a_i; \quad (3) \tilde{a}_i = a_i + a_j, \tilde{b}_j = b_j, \tilde{a}_i = a_i, \tilde{b}_i = b_i + b_j; \\ (4) \tilde{a}_i = a_i + c_r; \quad (5) \tilde{c}_i = c_j, \tilde{c}_j = c_i,$$

где $\tilde{a}_k = a_k, \tilde{b}_k = b_k, \tilde{c}_k = c_k$ при $k \neq i, j$.

Положим $\delta = \delta(P, \omega) = 0$, если существует стандартный базис v такой, что

$$\sum_{i=1}^g \omega(a_i) \omega(b_i) \equiv 0 \pmod{2}.$$

В остальных случаях положим $\delta = 1$.

Множество дыр $c_{g+1}, \dots, c_{g+k}$ делится на 2 множества

$$D_0 = \{c_i \mid \omega(c_i) = 0\}, \quad \text{и} \quad D_1 = \{c_i \mid \omega(c_i) = 1\}.$$

Обозначим через $k_\alpha = k_\alpha(P, \omega)$ мощность множества D_α . Аналогично проколы $c_{g+k+1}, \dots, c_n$ делятся на 2 множества вида

$$E_\alpha = \{c_i \mid \omega(c_i) = \alpha\}.$$

Пусть m_α ($\alpha = 0, 1$) – мощность множества E_α . *Типом функции Арфа* (P, ω) назовем набор $(g, \delta, k_0, k_1, m_0, m_1)$. Положим $n_\alpha = k_\alpha + m_\alpha$.

ЛЕММА 8.1. *Набор $(g, \delta, k_\alpha, m_\alpha)$ является типом некоторой функции Арфа, если и только если*

$$1) k_1 + m_1 \equiv 0 \pmod{2}; \quad 2) \delta = 0 \quad \text{при} \quad n_1 > 0.$$

В этом случае существует стандартный базис v такой, что $\omega(a_i) = \omega(b_i) = 0$ для $i > 1$, $\omega(a_1) = \omega(b_1) = \delta$, $\omega(c_i) = 0$ при $g + 1 \leq i \leq g + k_0$ и $g + k_0 + k_1 + 1 \leq i \leq g + k_0 + k_1 + m_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие $k_1 + m_1 \equiv 0 \pmod{2}$ следует из

$$\sum_{i=g+1}^n \omega(c_i) = \omega\left(\sum_{i=g+1}^n c_i\right) = \omega(0) = 0.$$

Докажем теперь, что существует стандартный базис v такой, что $\omega(a_i) = \omega(b_i) = 0$ при $i > 1$ и $\omega(a_1) = \omega(b_1) = 0$ при $n_1 > 0$. Нетрудно видеть, что, используя образующие (1)–(3), можно перейти от произвольного стандартного базиса v к стандартному базису v такому, что $\omega(a_i) = \omega(b_i) = 0$ при $i > 1$ и $\omega(a_1) = \omega(b_1)$. Если при этом $\omega(a_1) = \omega(b_1) = \omega(c_i) = 1$, то преобразование $\tilde{a}_1 = a_1 + c_i, \tilde{b}_1 = b_1 + c_i$ дает нужный базис. Если $n_1 = 0$, то преобразования (1)–(5) сохраняют четность суммы

$$\sum_{i=1}^g \omega(a_i)\omega(b_i)$$

и, следовательно, тип $(g, 1, k_0, 0, m_0, 0)$ существует.

Пусть теперь (P, ω_1, ω_2) – пара функций Арфа, причем $\omega_1 \neq \omega_2$. *Типом этой пары* назовем набор $(g, \delta_1, \delta_2, k_{\alpha\beta}, m_{\alpha\beta})$, где $\delta_i = \delta(P, \omega_i)$, $k_{\alpha\beta}$ – число дыр c_i таких, что $\omega_1(c_i) = \alpha, \omega_2(c_i) = \beta$, и $m_{\alpha\beta}$ – число проколов c_i таких, что $\omega_1(c_i) = \alpha, \omega_2(c_i) = \beta$, где $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$. Положим $n_{\alpha\beta} = k_{\alpha\beta} + m_{\alpha\beta}$.

ЛЕММА 8.2. *Набор $(g, \delta_1, \delta_2, k_{\alpha\beta}, m_{\alpha\beta})$ является типом некоторой пары функций Арфа, если и только если наборы $(g, \delta_1, k_{\alpha 0} + k_{\alpha 1}, m_{\alpha 0} + m_{\alpha 1})$ и $(g, \delta_2, k_{0\alpha} + k_{1\alpha}, m_{0\alpha} + m_{1\alpha})$ являются типами некоторых функций Арфа. В этом случае существует стандартный базис v такой, что:*

- 1) *если $n_{10} + n_{01} > 0$, то $\omega_j(a_1) = \omega_j(b_1) = \delta_j, \omega_j(a_i) = \omega_j(b_i) = 0$, где $j = 1, 2, i > 1$;*
- 2) *если $n_{01} = n_{10} = 0$ и $n_{11} > 0$, то $\omega_j(a_i) = \omega_j(b_i) = 0$ при $j = 1, 2, i > 1$ и $\omega_1(b_1) = \omega_2(a_1) = \omega_2(b_1) = 0, \omega_1(a_1) = 1$;*
- 3) *если $n_{01} = n_{10} = n_{11} = 0$, то $\omega_1(a_1) + \omega_2(a_1) = 1, \omega_1(a_2) = \omega_1(b_2) = \omega_2(a_2) = \omega_2(b_2) = \varepsilon, \omega_1(b_1) = \omega_2(b_1) = \delta$ (где $\varepsilon = 0$, если $\delta = 1$, и $\omega_1(a_1) = 1$, если $\delta = 0$) и $\omega_k(a_i) = \omega_k(b_i) = 0$ при $i > 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение очевидно. Пусть (P, ω_1, ω_2) – пара несовпадающих функций Арфа. Рассмотрим эпиморфизм $\omega = (\omega_1 + \omega_2): H_1(P, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$. Используя преобразования (1)–(5), нетрудно перейти от произвольного базиса к базису

$$v = \{a_i, b_i, c_j\} \subset H_1(P, \mathbb{Z}_2)$$

такому, что

$$\omega(b_1) = \omega(a_i) = \omega(b_i) = 0 \quad \text{для } i > 1$$

и

$$\omega(a_1) = 0 \quad \text{при } n_{01} + n_{10} > 0.$$

Пусть $n_{01} + n_{10} > 0$. Тогда $\omega_1(a_i) = \omega_2(a_i)$ и $\omega_1(b_i) = \omega_2(b_i)$. Перестройки (1)–(3) дают базис v такой, что

$$\omega_k(a_i) = \omega_k(b_i) = 0 \quad \text{для } i > 1$$

и

$$\omega_1(a_1) = \omega_1(b_1) = \omega_2(a_1) = \omega_2(b_1).$$

Используя, если необходимо, перестройки $\tilde{a}_1 = a_1 + c_k$ и $\tilde{b}_1 = b_1 + c_k$, получаем $\omega_k(\tilde{a}_1) = \omega_k(\tilde{b}_1) = \delta_k$. Пусть теперь $n_{01} = n_{10} = 0$ и $b \subset P$ — простой контур, представляющий b_1 . Тогда функции ω_1 и ω_2 равны на $P \setminus b$, и согласно лемме 8.1 существует базис $v \in H_1(P, \mathbb{Z}_2)$ такой, что:

- 1) $\omega_k(a_i) = \omega_k(b_i) = 0$ при $i > 2$;
- 2) $\omega_1(a_2) = \omega_1(b_2) = \omega_2(a_2) = \omega_2(b_2) = \varepsilon$, $\omega_1(b_1) = \omega_2(b_1) = \delta$, $\omega_1(a_1) + \omega_2(a_1) = 1$ и $\varepsilon = 0$, если $\delta = 1$ или $n_{11} > 0$.

Если $n_{11} > 0$, то при подходящем k перестройка $\tilde{b}_1 = b_1 + c_k$ дает $\delta = 0$. Если $\delta = 0$, перестройка $\tilde{a}_1 = a_1 + b_1$ дает $\omega_1(\tilde{a}_1) = 1$.

Два набора функций Арфа $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ и $(\omega'_1, \dots, \omega'_n)$ на P назовем *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $\alpha \in \text{Mod}(P)$ такой, что $\omega'_i = \omega_i \alpha$.

ТЕОРЕМА 8.1 [42], [43]. *Функции Арфа и пары функций Арфа топологически эквивалентны, если и только если они имеют одинаковый топологический тип.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно проверяется, что преобразования (1)–(5) сохраняют топологический тип функций Арфа и пар функций Арфа. Эти преобразования порождают группу $A(P)$. Следовательно, топологический тип не меняется под действием $\alpha \in \text{Mod}(P)$. Пусть теперь ω и ω' имеют одинаковый топологический тип. Тогда согласно лемме 8.1 существуют стандартные базисы $v = \{v_i\}$ и $v' = \{v'_i\}$ группы $\pi_1(P, p)$ такие, что $\omega(v_i) = \omega'(v'_i)$. Рассмотрим $\alpha \in \text{Mod}(P)$ такой, что $\alpha(v'_i) = v_i$. Тогда $\omega' = \omega \alpha$ и, значит, ω' и ω топологически эквивалентны. Аналогично с использованием леммы 8.2 доказывается второе утверждение теоремы 8.1.

Особенно важен случай компактных поверхностей, который мы и рассматриваем до конца этого параграфа. В этом случае согласно нашим определениям топологический тип функции Арфа описывается элементом $\delta(\omega) \in \{0, 1\}$, называемым *Арф-инвариантом* [44].

ЛЕММА 8.3. *Пусть $\{a_i, b_i (i = 1, \dots, g)\}$ — произвольный стандартный базис $H_1(P, \mathbb{Z}_2)$. Тогда*

$$\delta(\omega) \equiv \sum_{i=1}^g \omega(a_i) \omega(b_i) \pmod{2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Правая часть сравнения инвариантна относительно преобразований (1)–(5). С другой стороны, эти преобразования порождают группу, транзитивно действующую на множестве всех стандартных базисов.

Для случая компактных поверхностей теорема 8.1 и лемма 8.2 дают

СЛЕДСТВИЕ 8.1. *Функции Арфа на компактной поверхности топологически эквивалентны, если и только если их Арф-инварианты совпадают. Пары функций Арфа на компактной поверхности топологически эквивалентны, если и только если их Арф-инварианты совпадают.*

В следующем параграфе мы докажем аналог этого утверждения для произвольного числа функций Арфа.

§9. Топологическая классификация независимых систем функций Арфа на компактных поверхностях

Под функцией Арфа в этом параграфе мы понимаем функцию Арфа на фиксированной компактной поверхности P рода g . Сумма четного числа таких функций является линейной формой вида $H_1(P, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$. Сумма нечетного числа функций Арфа — снова функция Арфа.

Набор функций Арфа

$$\Omega = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n)$$

назовем *независимым*, если равенство

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i \omega_i = 0,$$

где $\alpha_i \in \{0, 1\}$, влечет $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. Цель этого параграфа — доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 9.1 [45]. *Наборы независимых функций Арфа $\Omega^1 = (\omega_0^1, \dots, \omega_n^1)$ и $\Omega^2 = (\omega_0^2, \dots, \omega_n^2)$ топологически эквивалентны, если и только если $\delta(\omega_0^1 + \omega_i^1 + \omega_j^1) = \delta(\omega_0^2 + \omega_i^2 + \omega_j^2)$ для всех $i, j = 0, 1, \dots, n$.*

Для доказательства рассмотрим $H_1(P, \mathbb{Z}_2)$ как векторное пространство H над $\mathbb{Z}_2$. Индекс пересечения индуцирует на H невырожденную симметричную билинейную форму $(\cdot, \cdot): H \times H \rightarrow \mathbb{Z}_2$ такую, что $(a, a) = 0$. Базис

$$\{a_i, b_i \ (i = 1, \dots, g)\} \subset H$$

назовем *симплектическим*, если $(a_i, a_j) = (b_i, b_j) = 0$, $(a_i, b_j) = \delta_{ij}$.

Пусть $V = (v_1, \dots, v_n) \subset H$ — набор линейно независимых векторов. Опишем процедуру “ортогонализации” V . Ее результатом будет множество $W = W(V) = \{s_i, t_i \ (i = 1, \dots, r), s_i \ (i = r + 1, \dots, r + h)\}$, которое строится рекурсивно, начиная с $V^0 = V$.

Переход от

$$V^{k-1} = \{s_i, t_i \ (i = 1, \dots, k-1), v_{j_1}^{k-1}, \dots, v_{j_{n_{k-1}}}^{k-1}\}$$

к

$$V^k = \{s_i, t_i \ (i = 1, \dots, k), v_{j_1}^k, \dots, v_{j_{n_k}}^k\}$$

дается следующими правилами.

Если все v_i^{k-1} попарно ортогональны (т.е. $(v_i^{k-1}, v_j^{k-1}) = 0$), то положим

$$W = V^{k-1}.$$

В противном случае

- 1) выберем v_m^{k-1} с наименьшим номером i , не ортогональный хотя бы одному v_m^{k-1} ;
- 2) выберем v_m^{k-1} с наименьшим номером j такой, что $(v_i^{k-1}, v_j^{k-1}) = 1$;
- 3) положим $s_k = v_i^{k-1}$, $t_k = v_j^{k-1}$;
- 4) для $m \neq i, j$ положим $v_m^k = v_m^{k-1} - (v_m^{k-1}, s_k)t_k + (v_m^{k-1}, t_k)s_k$.

ЛЕММА 9.1. Пусть наборы линейно независимых векторов $V = (v_1, \dots, v_n)$ и $V' = (v'_1, \dots, v'_n)$ таковы, что $(v_i, v_j) = (v'_i, v'_j)$ для всех i, j . Пусть ω и ω' – функции Арфа такие, что $\delta(\omega) = \delta(\omega')$ и $\omega(v_i) = \omega'(v'_i)$ для $i = 1, \dots, n$. Тогда существует изоморфизм $\varphi: H \rightarrow H$ такой, что $(a, b) = (\varphi(a), \varphi(b))$, $\omega'\varphi = \omega$ и $\varphi(v_i) = \varphi(v'_i)$ для всех $a, b \in H$, $v_i \in V$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$W(V) = \{s_i, t_i \ (i = 1, \dots, r), s_i \ (i = r + 1, \dots, r + h)\}$$

и

$$W(V') = \{s'_i, t'_i \ (i = 1, \dots, r), s'_i \ (i = r + 1, \dots, r + h)\}.$$

Тогда из $\omega(v_i) = \omega'(v'_i)$ следует $\omega(s_i) = \omega'(s'_i)$, $\omega(t_i) = \omega'(t'_i)$. Кроме того, $(s_i, s_j) = (t_i, t_j) = (s'_i, s'_j) = (t'_i, t'_j) = 0$, $(s_i, t_j) = (s'_i, t'_j) = \delta_{ij}$ и, значит, $W(V)$ и $W(V')$ можно дополнить до симплектических базисов

$$\{a_i, b_i \ (i = 1, \dots, g)\}, \quad \{a'_i, b'_i \ (i = 1, \dots, g)\}.$$

Используя условие $\delta(\omega) = \delta(\omega')$ и повторяя рассуждения леммы 8.1, нетрудно убедиться, что дополняющие векторы можно выбрать так, чтобы $\omega(a_i) = \omega'(a'_i)$ и $\omega(b_i) = \omega'(b'_i)$ для всех i . Соответствие $a_i \mapsto a'_i$, $b_i \mapsto b'_i$ порождает изоморфизм $\varphi: H \rightarrow H$ с нужными свойствами.

Символом $*$ мы будем обозначать двойственные относительно формы $(\cdot, \cdot)$ объекты. В частности, если ω' и ω'' – функции Арфа, то $\omega' + \omega'' \in H^*$ и $(\omega' + \omega'')^* \in H$.

ЛЕММА 9.2. Пусть $\{\omega_0, \omega_1, \omega_2\}$ – функции Арфа. Тогда

- 1) $\omega_0((\omega_0 + \omega_1)^*) = \delta(\omega_0) + \delta(\omega_1)$;
- 2) $\delta(\omega_0 + \omega_1 + \omega_2) = \delta(\omega_0) + \delta(\omega_1) + \delta(\omega_2) + ((\omega_0 + \omega_1)^*, (\omega_0 + \omega_2)^*)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{a_i, b_i \ (i = 1, \dots, g)\}$ – симплектический базис H такой, что $a_1 = (\omega_0 + \omega_1)^*$. Тогда $\omega_1 = \omega_0 + a_1^*$ и, следовательно,

$$\omega_1(a_i) = \omega_0(a_i) \text{ при всех } i, \quad \omega_1(b_i) = \omega_0(b_i) \text{ при } i > 1 \text{ и } \omega_1(b_1) = \omega_0(b_1) + 1.$$

Таким образом,

$$\delta(\omega_0) + \delta(\omega_1) = \omega_0(a_1)\omega_0(b_1) + \omega_1(a_1)\omega_1(b_1) = \omega_0(a_1) = \omega_0((\omega_0 + \omega_1)^*).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \delta(\omega_0 + \omega_1 + \omega_2) + \delta(\omega_0) + \delta(\omega_1) + \delta(\omega_2) \\ &= (\delta(\omega_0) + \delta(\omega_0 + \omega_1 + \omega_2)) + (\delta(\omega_0) + \delta(\omega_1)) + (\delta(\omega_0) + \delta(\omega_2)) \\ &= \omega_0((\omega_1 + \omega_2)^*) + \omega_0((\omega_0 + \omega_1)^*) + \omega_0((\omega_0 + \omega_2)^*) \\ &= \omega_0((\omega_0 + \omega_1)^* + (\omega_0 + \omega_2)^*) + \omega_0((\omega_0 + \omega_1)^*) + \omega_0((\omega_0 + \omega_2)^*) \\ &= ((\omega_0 + \omega_1)^*, (\omega_0 + \omega_2)^*). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 9.1. В одну сторону утверждение теоремы очевидно. Пусть теперь наборы Ω^1 и Ω^2 такие, что

$$\delta(\omega_0^1 + \omega_i^1 + \omega_j^1) = \delta(\omega_0^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2)$$

и, в частности, $\delta(\omega_i^1) = \delta(\omega_i^2)$ для всех $i, j = 0, 1, \dots, n$.

Положим

$$v_i^j = (\omega_0^j + \omega_i^j)^* \quad \text{и} \quad V^j = (v_1^j, \dots, v_n^j).$$

Тогда согласно лемме 9.2

$$(v_i^1, v_j^1) = (v_i^2, v_j^2) \quad \text{и} \quad \omega_0^1(v_i^1) = \omega_0^2(v_i^2).$$

Таким образом, согласно лемме 9.1 существует изоморфизм $\varphi: H \rightarrow H$, сохраняющий форму $(\cdot, \cdot)$, переводящий V^1 в V^2 и такой, что $\omega_0^2 \varphi = \omega_0^1$. Используя скручивание Дена [39], легко показать, что сохраняющий форму $(\cdot, \cdot)$ автоморфизм φ порождается гомеоморфизмом $\tilde{\varphi}: P \rightarrow P$.

§ 10. Пространство модулей спинорных расслоений ранга 1

1. Пусть $e: E \rightarrow P$ — линейное локальное тривиальное голоморфное расслоение над римановой поверхностью P . Униформизация $\Lambda \rightarrow \Lambda/\Gamma$, где $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$ — фуксова группа, переводит e в расслоение $\tilde{e}: \tilde{E} \rightarrow \Lambda$. Оно допускает тривилизацию, т.е. биголоморфное отображение $\tilde{\Phi}: \tilde{E} \rightarrow \Lambda \times \mathbb{C}$, переводящее $\tilde{e}$ в естественную проекцию $\tilde{\lambda}: (\Lambda \times \mathbb{C}) \rightarrow \Lambda$. Таким образом, расслоение e изоморфно расслоению, получающемуся факторизацией расслоения $(\Lambda \times \mathbb{C})$ по группе Γ , где элемент $\gamma \in \Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$ действует на $(\Lambda \times \mathbb{C})$ по правилу:

$$\gamma(z, x) = \left(\frac{az + b}{cz + d}, f(\gamma, z) \cdot x \right).$$

Функция $f: \Gamma \times \Lambda \rightarrow \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus 0$ называется *функцией перехода*.

В частности, если E — кокасательное расслоение, то

$$f(x, z) = \left(\frac{d\gamma}{dz} \right)^{-1} = (cz + d)^2.$$

Если функции перехода f и g отвечают расслоениям $E \rightarrow P$ и $F \rightarrow P$, то расслоению $E \otimes F \rightarrow P$ отвечает функция перехода $f \cdot g$.

Линейное расслоение $E \rightarrow P$ называется *спинорным*, если расслоение $E \otimes E \rightarrow P$ изоморфно кокасательному. Таким образом, его функция перехода имеет вид $f(\gamma, z) = \sigma(a, b, c, d)(cz + d)$, где $\sigma^2(a, b, c, d) = 1$. Сопоставим отображению $\gamma(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ из Γ матрицу

$$J_e^*(\gamma) = \sigma(a, b, c, d) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}).$$

ЛЕММА 10.1. *Отображение $J_e^*: \Gamma \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$ определено корректно и является мономорфизмом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Корректность J^* означает, что

$$\sigma(-a, -b, -c, -d) = -\sigma(a, b, c, d).$$

Это в свою очередь сразу следует из определения f . Если

$$\gamma_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}, \quad \gamma_2(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2},$$

то

$$\gamma_1 \gamma_2(z) = \frac{\tilde{a}z + \tilde{b}}{\tilde{c}z + \tilde{d}}, \quad \text{где} \quad \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\gamma_1 \gamma_2(z, x) = \left(\frac{\tilde{a}z + \tilde{b}}{\tilde{c}z + \tilde{d}}, f(\gamma_1 \gamma_2, z)x \right) = \left(\frac{\tilde{a}z + \tilde{b}}{\tilde{c}z + \tilde{d}}, \sigma(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d})(\tilde{c}z + \tilde{d}) \right).$$

Но, с другой стороны,

$$\begin{aligned} \gamma_1 \gamma_2(z, x) &= \gamma_1 \left(\frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}, f(\gamma_2, z)x \right) \\ &= \left(\frac{\tilde{a}z + \tilde{b}}{\tilde{c}z + \tilde{d}}, \sigma(a_1, b_1, c_1, d_1) \left(c_1 \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + d_1 \right) \sigma(a_2, b_2, c_2, d_2)(c_2 z + d_2)x \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sigma(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d})(\tilde{c}z + \tilde{d}) = \sigma(a_1, b_1, c_1, d_1) \sigma(a_2, b_2, c_2, d_2)(\tilde{c}z + \tilde{d})$$

и

$$\sigma(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d}) \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix} = \sigma(a_1, b_1, c_1, d_1) \sigma(a_2, b_2, c_2, d_2) \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, J_e^* – гомоморфизм. Если $J: SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ – естественная проекция, то $JJ_e^* = \text{id}$ и, следовательно, J_e^* – мономорфизм.

Согласно лемме 10.1 $J_e^*(\Gamma)$ – поднятие группы Γ . Пусть $\omega_e: H_1(\Lambda/\Gamma, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ – функция Арфа, отвечающая этому поднятию (см. § 7).

ТЕОРЕМА 10.1 [41], [43]. *Соответствие $e \mapsto \omega_e$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между спинорными расслоениями и функциями Арфа на римановой поверхности $P = \Lambda/\Gamma$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема 7.2 устанавливает взаимно однозначное соответствие между функциями Арфа на P и поднятиями группы Γ . Докажем, что отображение $e \mapsto J_e^*(\Gamma)$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между спинорными расслоениями и поднятиями группы Γ . Для этого достаточно сопоставить каждому поднятию $J^*: \Gamma \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$ спинорное расслоение e такое, что $J_e^* = J^*$. Такое расслоение определяется переходной функцией $f(\gamma, z) = cz + d$, где $J^*(\gamma) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае компактных поверхностей другое описание соответствия $e \mapsto \omega_e$ содержится в [46]–[48].

2. Рассмотрим теперь множество $S\rho$ всех пар (P, e) , где $e: E \rightarrow P$ – спинорное расслоение на P . Будем считать, что $(P', e') = (P, e)$, если существуют биголоморфные отображения $f_E: E \rightarrow E'$ и $f_P: P \rightarrow P$ такие, что $e' f_E = f_P e$. Согласно теореме 10.1 расслоение (P, e) определяется парой (P, ω) , где ω – функция Арфа на P . Таким образом, топология пространства модулей римановых поверхностей индуцирует топологию на $S\rho$. Пусть $(g, \delta, k_\alpha, m_\alpha)$ удовлетворяет условиям леммы 8.1. Обозначим через $S(g, \delta, k_\alpha, m_\alpha)$ множество всех спинорных расслоений (P, e) таких, что ω_e – функция Арфа топологического типа $t = (g, \delta, k_\alpha, m_\alpha)$.

ТЕОРЕМА 10.2 [43]. *Пространство $S(g, \delta, k_\alpha, m_\alpha)$ – гомеоморфно T_t / Mod_t , где*

$$T_t \cong T_{g, k_1+k_2, m_1+m_2} \cong \mathbb{R}^{6g+3(k_1+k_2)+2(m_1+m_2)-6}$$

и

$$\text{Mod}_t \subset \text{Mod}_{g, k_1+k_2, m_1+m_2}$$

– подгруппа конечного индекса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $k = k_1 + k_2, m = m_1 + m_2, n = k + m + g$ и $\psi \in T_{g, k, m}$. По определению это означает, что $\psi \in \text{Hom}(\gamma, \text{Aut}(\Lambda))$, где группа $\gamma = \gamma_{g, n}$ порождена образующими $v_{g, n} = \{a_i, b_i \ (i = 1, \dots, g), c_i \ (i = g + 1, \dots, n)\}$. Пусть

$$\tilde{v}_{g, n} = \{\tilde{a}_i, \tilde{b}_i \ (i = 1, \dots, g), \tilde{c}_i \ (i = g + 1, \dots, n)\}$$

– отвечающий ему базис $H_1(P, \mathbb{Z}_2)$, где $P = P_\psi = \Lambda / \psi(\gamma)$. Рассмотрим на P функцию Арфа $\omega = \omega_\psi$ такую, что $\omega(a_i) = \omega(b_i) = 0$ при $i < g$, $\omega(a_g) = \omega(b_g) = \delta$, $\omega(c_j) = 0$ при $g + 1 \leq j \leq g + k_0$, $g + k + 1 \leq j \leq g + k + m_1$ и $\omega(c_j) = 1$ в остальных случаях. Согласно теореме 10.1 функции Арфа ω_ψ отвечает спинорное расслоение $e_\psi: E_\psi \rightarrow P_\psi$. Соответствие $\psi \mapsto e_\psi$ определяет отображение

$$\Psi: T_{g, k, m} \rightarrow S(g, \delta, k_\alpha, m_\alpha).$$

Согласно лемме 8.1

$$\Psi(T_{g, k, m}) = S(g, \delta, k_\alpha, m_\alpha).$$

Прообраз каждой точки $s \in S(g, \delta, k_\alpha, m_\alpha)$ состоит из орбиты группы $\text{Aut}(P_\psi) = \text{Mod}_{g, k, m}$, сохраняющей функцию Арфа ω_ψ . Таким образом,

$$S(g, \delta, k_\alpha, m_\alpha) = T_{g, k, m} / \text{Mod}_t,$$

где Mod_t – дискретная группа.

§ 11. Суперфуксовы группы, суперримановы поверхности и их топологические типы

Пусть $L = L(\mathbb{K})$ – грасманова алгебра над полем $\mathbb{K}$ с бесконечным числом образующих $1, \ell_1, \ell_2, \dots$. Каждый элемент $a \in L(\mathbb{K})$ является конечной линейной комбинацией мономов $\ell_{i_1} \wedge \dots \wedge \ell_{i_n}$ с коэффициентами из $\mathbb{K}$, т.е.

$$a = a^\# + \sum a_i e_i + \sum_{ij} a_{ij} e_i \wedge e_j + \dots$$

Соответствие $a \mapsto a^\#$ определяет эпиморфизм $\#: L(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$.

Моном $\ell_{i_1} \wedge \dots \wedge \ell_{i_n} \neq 0$ называется *четным*, если n четно, и *нечетным*, если n – нечетно. Константы также считаются четными мономами. Линейные комбинации с коэффициентами из $\mathbb{K}$ четных (нечетных) мономов порождают линейное пространство $L_0(\mathbb{K})$ четных ($L_1(\mathbb{K})$ нечетных) элементов алгебры $L(\mathbb{K})$. Супераналог линейного пространства – это множество

$$\mathbb{K}^{(n|m)} = \{(z_1, \dots, z_n \mid \theta_1, \dots, \theta_m) : z_i \in L_0(\mathbb{K}), \theta_j \in L_1(\mathbb{K})\}.$$

В качестве поля $\mathbb{K}$ будем рассматривать поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ или вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Множество

$$\Lambda^{NS} = \{(z \mid \theta_1, \dots, \theta_N) \in C^{(1|N)} \mid \operatorname{Im} z^\# > 0\}$$

называется *верхней N -суперполуплоскостью*. В этом параграфе мы будем иметь дело с 1-суперполуплоскостями $\Lambda^S = \Lambda^{1S}$. Группа автоморфизмов $\operatorname{Aut}(\Lambda^S)$ суперобласти Λ^S состоит из преобразований $A = A[a, b, c, d, \sigma \mid \varepsilon, \delta]$ вида

$$A(z \mid \theta) = \left(\frac{az + b}{cz + d} - \frac{(ad - bc)(\varepsilon + \delta z)}{(cz + d)^2} \theta, \frac{\sigma \sqrt{ad - bc}}{cz + d} \left(\theta + \varepsilon + \delta z + \frac{1}{2} \varepsilon \delta \theta \right) \right),$$

где $a, b, c, d \in L_0(\mathbb{R})$, $\sigma = \pm 1$, $\varepsilon, \delta \in L_1(\mathbb{R})$, $(ad - bc)^\# > 0$, а символом $\sqrt{\Delta}$ обозначается элемент из $L_0(\mathbb{R})$, однозначно определяемый свойствами $(\sqrt{\Delta})^2 = \Delta$ и $(\sqrt{\Delta})^\# > 0$ [2], [4].

Соответствие

$$A \mapsto A^\#, \quad \text{где} \quad A^\#(z) = \frac{a^\# z + b^\#}{c^\# z + d^\#},$$

порождает эпиморфизм

$$\#: \operatorname{Aut}(\Lambda^S) \rightarrow \operatorname{Aut}(\Lambda).$$

Элементы множества

$$\operatorname{Aut}_1(\Lambda^S) = (\#)^{-1}(\operatorname{Aut}_1(\Lambda))$$

называются *суперпараболическими*, а элементы множества

$$\operatorname{Aut}_2(\Lambda^S) = (\#)^{-1}(\operatorname{Aut}_2(\Lambda))$$

– *супергиперболическими*.

Подгруппу $\Gamma \subset \text{Aut}(\Lambda^S)$ мы называем *суперфуксовой*, если $\Gamma^\# = \#(\Gamma)$ – фуксова группа и $\#: \Gamma \rightarrow \Gamma^\#$ – изоморфизм. В этом параграфе мы будем рассматривать (не оговаривая это специально) лишь суперфуксовы группы, состоящие из суперпараболических и супергиперболических автоморфизмов Λ^S .

Сопоставим автоморфизму $A = A[a, b, c, d, \sigma | \varepsilon, \delta]$ матрицу

$$\bar{J}(A) = \frac{\sigma}{\sqrt{a^\# d^\# - c^\# d^\#}} \begin{pmatrix} a^\# & b^\# \\ c^\# & d^\# \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}).$$

ЛЕММА 11.1. *Пусть Γ – суперфуксова группа. Тогда соответствие $\bar{J}: \Gamma \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$ является мономорфизмом и, следовательно, определяет поднятие $J^*: \Gamma^\# \rightarrow \bar{\Gamma} = \bar{J}(\Gamma)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямая выкладка показывает, что $\bar{J}$ – гомоморфизм. Кроме того, $\# = J \circ \bar{J}$ и мономорфность $\#$ влечет мономорфность $\bar{J}$.

Пусть $\Gamma \subset \text{Aut}(\Lambda^S)$ – суперфуксова группа. Фактор множества Λ^S/Γ называется *римановой суперповерхностью* (или $N = 1$ *суперримановой поверхностью*). Суперповерхности $P_1 = \Lambda^S/\Gamma_1$ и $P_2 = \Lambda^S/\Gamma_2$ считаются совпадающими, если Γ_1 и Γ_2 сопряжены в $\text{Aut}(\Lambda^S)$. Проекции $\#: \Lambda^S \rightarrow \Lambda$ и $\#: \Gamma \rightarrow \Gamma^\#$ определяют проекцию $\#: P \rightarrow P^\# = \Lambda/\Gamma^\#$.

Согласно теореме 7.2 поднятие J^* задает функцию Арфа

$$\omega_P: H_1(P^\#, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2.$$

Топологический тип $(g, \delta, k_\alpha, m_\alpha)$ этой функции Арфа назовем *топологическим типом* суперповерхности P .

ТЕОРЕМА 11.1. *Пусть Q – риманова поверхность и $\omega: H_1(Q, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ – произвольная функция Арфа. Тогда существует риманова суперповерхность P такая, что $P^\# = Q$ и $\omega_P = \omega$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Q = \Lambda/\Gamma$, где Γ – фуксова группа. Тогда согласно теореме 7.2 существует поднятие $J^*: \Gamma \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$, порождающее функцию Арфа ω . Сопоставим теперь автоморфизму $\gamma \in \Gamma \subset \text{Aut}(\Lambda)$ автоморфизм $\gamma^S \in \Gamma \subset \text{Aut}(\Lambda^S)$ вида

$$\gamma^S(z | \theta) = \left(\frac{az + b}{cz + d} \mid \frac{\theta}{cz + d} \right), \quad \text{где} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = J^*(\gamma).$$

Тогда множество

$$\Gamma^S = \{\gamma^S \mid \gamma \in \Gamma\} \subset \text{Aut}(\Lambda^S)$$

является группой. Кроме того, $(\gamma^S)^\# = \gamma$ и, следовательно, Γ^S – суперфуксова группа. Положим $P = \Lambda^S/\Gamma^S$. Тогда $P^\# = Q$ и $\omega_P = \omega$.

Согласно теореме 11.1 множество T^t римановых суперповерхностей типа

$$t = (g, \delta, k_\alpha, m_\alpha)$$

непусто для каждого t , удовлетворяющего условиям леммы 8.1. Наша ближайшая задача – описать множества T^t .

§ 12. Модули суперримановых поверхностей

1. Простейшие супергиперболические и суперпараболические автоморфизмы имеют вид

$$I_{\lambda}^{\sigma}(z | \theta) = (\lambda z | \sigma \sqrt{\lambda} \theta)$$

и

$$J_{\mu}^{\sigma}(z | \theta) = (z + \mu | \sigma \theta),$$

где $\sigma = \pm 1$, $\lambda, \mu \in L_0(\mathbb{R})$, $\lambda^{\#} > 1$, $\mu^{\#} > 0$.

Прямой выкладкой нетрудно доказать, что всякий

$$A \in \text{Aut}_2(\Lambda^S)$$

со свойством $A^{\#}(\infty) \neq \infty$ имеет вид

$$A = I(\sigma, \lambda, \alpha, \beta | \varepsilon, \delta),$$

где $\lambda, \alpha, \beta \in L_0(\mathbb{R})$, $\varepsilon, \delta \in L_1(\mathbb{R})$, $\sigma = \pm 1$, $\lambda^{\#} > 1$, $\alpha^{\#} \neq \beta^{\#}$ и

$$A(z | \theta) = \left(\frac{(\lambda \alpha - \beta)z + (1 - \lambda)\alpha\beta}{(\lambda - 1)z + (\alpha - \lambda\beta)} - \frac{\lambda(\alpha - \beta)^2(\varepsilon + \delta z)\theta}{((\lambda - 1)z + (\alpha - \lambda\beta))^2} \mid \frac{\sigma \sqrt{\lambda}(\alpha - \beta)}{(\lambda - 1)z + (\alpha - \lambda\beta)} \left(\theta + \varepsilon + \delta z + \frac{1}{2}\varepsilon\delta\theta \right) \right).$$

Положим

$$I(\sigma, \lambda, \infty, 0 | 0, 0) = I_{\lambda}^{\sigma}.$$

Аналогично, всякий

$$A \in \text{Aut}_1(\Lambda^S)$$

со свойством $A^{\#}(\infty) \neq \infty$ имеет вид

$$A = J(\sigma, \lambda, \alpha | \varepsilon, \delta),$$

где $\lambda, a \in L_0(\mathbb{R})$, $\varepsilon, \delta \in L_1(\mathbb{R})$, $\sigma = \pm 1$, $\lambda^{\#} > 0$ и

$$A(z | \theta) = \left(\frac{(1 - \alpha\lambda)z + a^2\lambda}{-\lambda z + (1 + a\lambda)} - \frac{(\varepsilon + \delta z)\theta}{(-\lambda z + (1 + a\lambda))^2} \mid \frac{\sigma(\theta + \varepsilon + \delta z + \frac{1}{2}\varepsilon\delta\theta)}{-\lambda z + (1 + a\lambda)} \right).$$

Мы используем эту параметризацию множества $\text{Aut}_1(\Lambda^S) \cup \text{Aut}_2(\Lambda^S)$ для построения супераналога пространства Фрике–Клейна–Тайхмюллера.

Пусть, как и раньше, $\gamma_{g,n}$ – группа, порожденная образующими

$$v_{g,n} = \{a_i, b_i \ (i = 1, \dots, g), c_i \ (i = g + 1, \dots, n)\}$$

с определяющими соотношениями

$$\prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \prod_{i=g+1}^n c_i = 1.$$

Положим $c_i = [a_i, b_i] \ (i = 1, \dots, g)$.

Пусть $n = g + k + m$, $6g + 3k + 2m > 6$ и $t = (g, \delta, k_{\alpha}, m_{\alpha})$ – топологический тип некоторой функции Арфа на поверхности типа (g, k, m) . Согласно лемме 8.1 это означает, что

- 1) $k = k_0 + k_1$, $m = m_0 + m_1$, $k_1 + m_1 \equiv 0 \pmod{2}$;
- 2) $\delta = 0$ при $k_1 + m_1 > 0$.

Обозначим через $\tilde{T}^t$ множество мономорфизмов $\psi: v_{g,n} \rightarrow \text{Aut}(\Lambda^S)$ таких, что

- 1) $(\psi(v_{g,n}))^\# \in \tilde{T}_{g,k,m}$;
- 2) суперриманова поверхность $P = \Lambda^S / \psi(\gamma_{g,n})$ порождает на $P^\#$ функцию Арфа $\omega = \omega_P$ типа t ;
- 3) естественная проекция $(\psi(\gamma_{g,n}))^\# \rightarrow H_1(P^\#, \mathbb{Z}_2)$ переводит $v_{g,n}$ в стандартный базис $\{a_i b_i (i = 1, \dots, g), c_i (i = g+1, \dots, n)\}$ такой, что $\omega(a_i) = \omega(b_i) = 0$ для $i > 1$, $\omega(a_1) = \omega(b_1) = \delta$ и $\omega(c_i) = 0$, если и только если $g+1 \leq i \leq g+k_0$ или $g+k+1 \leq i \leq g+k+m_0$.

Соответствие $\psi \mapsto \psi^\#$, где $\psi^\#(d) = (\psi(d))^\#$, порождает отображение $\#: \tilde{T}^t \rightarrow \tilde{T}_{g,k,m}$. Согласно теореме 11.1

$$\#(\tilde{T}^t) = \tilde{T}_{g,k,m}.$$

Группа $\text{Aut}(\Lambda^S)$ действует на $\tilde{T}^t$ сопряжениями. Положим

$$T^t = \tilde{T}^t / \text{Aut}(\Lambda^S).$$

Для любой тройки точек

$$(z_1 | \theta_1), (z_2 | \theta_2), (z_3 | \theta_3) \in \mathbb{R}^{(1|1)}$$

существует $h \in \text{Aut}(\Lambda^S)$ такой, что

$$h(z_1 | \theta_1) = (\infty | 0), \quad h(z_2 | \theta_2) = (0 | 0) \quad \text{и} \quad h(z_3 | \theta_3) = (1 | \theta).$$

Кроме того, автоморфизмы, сохраняющие точки $(\infty | 0)$, $(0 | 0)$ и переводящие точки вида $(1 | \theta)$ в точки такого же вида, совпадают с инволюцией $(z | \theta) \mapsto (z | -\theta)$. Это позволяет отождествить T^t с множеством $\tilde{T}^t / \mathbb{Z}_2$, где

- 1) при $g = k = 0$

$$\tilde{T}^t = \{\psi \in \tilde{T}^t \mid \psi(c_1 c_2) = I_\lambda^\sigma, \psi(c_1) = J(\sigma_1, \lambda_1, -1 \mid \varepsilon, \delta)\};$$

- 2) при $g = 0, k = 1$

$$\tilde{T}^t = \{\psi \in \tilde{T}^t \mid \psi(c_1) = I_{\lambda_1}^{\sigma_1}, \psi(c_2) = J(\sigma_2, \lambda_2, 1 \mid \varepsilon, \delta)\};$$

- 3) при $g = k = 1$

$$\tilde{T}^t = \{\psi \in \tilde{T}^t \mid \psi(c_1) = I_{\lambda_1}^{\sigma_1}, \psi(b_1) = I(\sigma, \lambda_2, 1, \beta \mid \varepsilon, \delta)\};$$

- 4) в остальных случаях

$$\tilde{T}^t = \{\psi \in \tilde{T}^t \mid \psi(c_1) = I_{\lambda_1}^{\sigma_1}, \psi(c_2) = I(\sigma_2, \lambda_2, 1, \beta \mid \varepsilon, \delta)\}.$$

В этих обозначениях числа $\sigma, \sigma_1, \sigma_2$ однозначно определяются типом t .

Опишем теперь отображение

$$\Psi: \check{T}^t \rightarrow \mathbb{R}^{(6g+3k+2m-6 \mid 4g+2k+2m-4)}.$$

Для этого представим элементы $\psi(v_{g,m})$, где $\psi \in \check{T}^t$, в следующем виде:

$$\begin{aligned} \psi(c_i) &= I(\sigma_i, \lambda_i, \alpha_i, \beta_i \mid x_i, y_i) \quad \text{при } i \leq g+k, \\ \psi(c_i) &= J(\sigma_i, \lambda_i, a_i \mid x_i, y_i) \quad \text{при } i > g+k, \\ \psi(a_i) &= I(\sigma_i^a, \lambda_i^a, \delta_i, \eta_i \mid x_i^a, y_i^a), \\ \psi(b_i) &= I(\sigma_i^b, \lambda_i^b, \varepsilon_i, \xi_i \mid x_i^b, y_i^b). \end{aligned}$$

При $g = k = 0$ положим

$$\begin{aligned} \Psi(\psi) &= \{\lambda_1, \lambda_3, \dots, \lambda_{m-1}, a_3, \dots, a_{m-2} \mid \\ &\quad x_1, y_1, x_3, y_3, \dots, x_{m-1}, y_{m-1}\} \subset \mathbb{R}^{(2m-6 \mid 2m-2)}. \end{aligned}$$

При $g = 0, k = 1$ положим

$$\Psi(\psi) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, a_3, \dots, a_{m-1} \mid x_2, y_2, \dots, x_m, y_m\} \subset \mathbb{R}^{(2m-3 \mid 2m-2)}.$$

При $g = k = 1$ положим

$$\begin{aligned} \Psi(\psi) &= \{\lambda_1, \dots, \lambda_{m+1}, \eta_1, \varepsilon_1, \alpha_2, \beta_2, a_3, a_4, \dots, a_m \mid \\ &\quad x_2, y_2, \dots, x_m, y_m, x_1^a, y_1^a, x_1^b, y_1^b\} \subset \mathbb{R}^{(2m+3 \mid 2m+2)}. \end{aligned}$$

В остальных случаях:

при $m = 0$ положим

$$\begin{aligned} \Psi(\psi) &= \{\lambda_1, \dots, \lambda_{g+k-1}, \xi_1, \eta_1, \varepsilon_1, \dots, \xi_g, \eta_g, \varepsilon_g, \beta_2, \alpha_3, \beta_3, \dots, \alpha_{g+k-1}, \beta_{g+k-1} \mid \\ &\quad x_2, y_2, \dots, x_{g+k-1}, y_{g+k-1}, x_1^a, y_1^a, \dots, x_g^a, y_g^a\} \subset \mathbb{R}^{(6g+3k-6 \mid 4g+2k-4)}, \end{aligned}$$

при $m = 1$

$$\begin{aligned} \Psi(\psi) &= \{\lambda_1, \dots, \lambda_{g+k}, \xi_1, \eta_1, \varepsilon_1, \dots, \xi_g, \eta_g, \varepsilon_g, \beta_2, \alpha_3, \beta_3, \dots, \alpha_{g+k-1}, \beta_{g+k-1}, \\ &\quad \alpha_{g+k} \mid x_2, y_2, \dots, x_{g+k}, y_{g+k}, x_1^a, y_1^a, \dots, x_g^a, y_g^a\} \subset \mathbb{R}^{(6g+3k-4 \mid 4g+2k-2)}, \end{aligned}$$

а в остальных случаях

$$\begin{aligned} \Psi(\psi) &= \{\lambda_1, \dots, \lambda_{g+k+m-1}, \xi_1, \eta_1, \varepsilon_1, \dots, \xi_g, \eta_g, \varepsilon_g, \beta_2, \alpha_3, \beta_3, \dots, \\ &\quad \alpha_{g+k}, \beta_{g+k}, a_{g+k+1}, \dots, a_{g+k+m-2} \mid x_2, y_2, \\ &\quad \dots, x_{g+k+m-1}, y_{g+k+m-1}, x_1^a, y_1^a, \dots, x_g^a, y_g^a\} \subset \mathbb{R}^{(6g+3k+2m-6 \mid 4g+2k+2m-4)}. \end{aligned}$$

Положим

$$\hat{T}^t = \Psi(\check{T}^t).$$

Будем говорить, что область $Q \subset \mathbb{R}^{(r \mid \ell)}$ сильно диффеоморфна $\mathbb{R}^{(r \mid \ell)}$, если $Q^\#$ — диффеоморфна $\mathbb{R}^r$ и $Q = \#^{-1}(\#(Q))$.

ТЕОРЕМА 12.1 [49]–[51]. *Отображение $\Psi: \check{T}^t \rightarrow \hat{T}^t$ — взаимно однозначно и $\hat{T}^t$ — сильно диффеоморфно*

$$\mathbb{R}^{(6g+3k+2m-6 \mid 4g+2k+2m-4)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тип t однозначно определяет величины $\sigma_i, \sigma_i^a, \sigma_i^b$. Параметры $\lambda_i, \alpha_i, \beta_i, a_i, x_i, y_i$ однозначно определяют $\psi(c_i)$ при $i < n$, а следовательно, и

$$\psi(c_n) = \left(\prod_{i=1}^{n-1} \psi(c_i) \right)^{-1}.$$

Это позволяет определить по формулам (3.6)–(3.9) параметры λ_i^a, λ_i^b и δ_i , которые вместе с параметрами x_i^a, y_i^a, x_i, y_i однозначно определяют $\psi(a_i)$ и $\psi(b_i)$. Таким образом, отображение Ψ – взаимно однозначно. Все ограничения на параметры сводятся к ограничениям на их числовые части. Таким образом,

$$\widehat{T}^t = \#^{-1}(\#(\widehat{T}^t)).$$

Кроме того, согласно теореме 4.1

$$(\widehat{T}^t)^\# = \widehat{T}_{g,k,m} \cong \mathbb{R}^{6g+3m+2k-6}.$$

Из нашей конструкции сразу следует

СЛЕДСТВИЕ 12.1 [43], [50]. Пусть t – топологический тип функции Арфа на поверхности типа (g, k, m) и M^t – множество всех суперримановых поверхностей типа t . Тогда M^t представляется в виде T^t / Mod^t , где T^t сильно диффеоморфно

$$\mathbb{R}^{(6g+3k+2m-6 \mid 4g+2k+2m-4)} / \mathbb{Z}_2,$$

а группа Mod^t дискретно действует на T^t . Если ω – функция Арфа типа t , то

$$\text{Mod}^t \cong \{\alpha \in \text{Mod}_{g,k,m} \mid \omega\alpha = \omega\}.$$

ПРИМЕР. Рассмотрим пространство M_g суперримановых поверхностей P таких, что $P^\#$ – компактная риманова поверхность рода $g > 1$. На компактных поверхностях рода $g > 0$ существуют функции Арфа ровно двух типов. Таким образом, M_g распадается на 2 компоненты связности, каждая из которых диффеоморфна

$$\mathbb{R}^{(6g-6 \mid 4g-4)} / \text{Mod},$$

где Mod – зависящая от компоненты дискретная группа.

§ 13. $N = 2$ суперфуксовы группы. $N = 2$ суперримановы поверхности и их топологические инварианты

Обозначим через $A[a, b, c, d, \ell | \varepsilon]$ отображение $A: \Lambda^{2S} \rightarrow \Lambda^{2S}$ вида

$$A(z | \theta_1, \theta_2) = \left(\frac{az + b + \delta^{11}\theta_1 + \delta^{12}\theta_2}{cz + d + \delta^{21}\theta_1 + \delta^{22}\theta_2} \mid \frac{\ell^{11}\theta_1 + \ell^{12}\theta_2 + \varepsilon^{11}z + \varepsilon^{12}}{cz + d + \delta^{21}\theta_1 + \delta^{22}\theta_2}, \frac{\ell^{21}\theta_1 + \ell^{22}\theta_2 + \varepsilon^{21}z + \varepsilon^{22}}{cz + d + \delta^{21}\theta_1 + \delta^{22}\theta_2} \right),$$

где $a, b, c, d \in L_0(\mathbb{R})$, $\ell \in GL(2, L_0(\mathbb{R}))$, $\varepsilon^{ij}, \delta^{ij} \in L_1(\mathbb{R})$.

Согласно [6] группа автоморфизмов $\text{Aut}(\Lambda^{2S})$ суперобласти Λ^{2S} состоит из $A[a, b, c, d, \ell | \varepsilon]$, где

$$\begin{pmatrix} -c & a \\ -d & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta^{11} & \delta^{12} \\ \delta^{21} & \delta^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{21} & \varepsilon^{11} \\ \varepsilon^{22} & \varepsilon^{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell^{11} & \ell^{12} \\ \ell^{21} & \ell^{22} \end{pmatrix}$$

и

$$ad - bc - \varepsilon^{11}\varepsilon^{12} - \varepsilon^{21}\varepsilon^{22} = \ell^{11}\ell^{22} + \ell^{21}\ell^{12} + \delta^{11}\delta^{22} + \delta^{12}\delta^{21} = \Delta,$$

где $\Delta^\# > 0$,

$$\ell^{11}\ell^{21} + \delta^{11}\delta^{21} = \ell^{12}\ell^{22} + \delta^{12}\delta^{22} = 0.$$

Прямой выкладкой нетрудно показать, что верны следующие леммы.

ЛЕММА 13.1. *Автоморфизм $A[a, b, c, d, \ell | \varepsilon]$ относится к одному из двух типов:*

- 1) (нескрученных) $(\ell^{12})^\# = (\ell^{21})^\# = 0$;
- 2) (скрученных) $(\ell^{11})^\# = (\ell^{22})^\# = 0$.

Нескрученный (скрученный) автоморфизм однозначно определяется параметрами $a, b, c, d, \varepsilon^{ij}, \ell^{11}$ (соответственно $a, b, c, d, \varepsilon^{ij}, \ell^{12}$). Эти параметры могут принимать произвольные значения такие, что $a, b, c, d, \ell^{ij} \in L_0(\mathbb{R})$, $\varepsilon^{ij} \in L_1(\mathbb{R})$, $(ad - bc)^\# > 0$, $(\ell^{11} + \ell^{12})^\# \neq 0$.

ЛЕММА 13.2. *Пусть $(z_i | \theta_i^1, \theta_i^2) \in \mathbb{R}^{(1|2)}$, $i = 1, 2, 3$, и $z_i^\# \neq z_j^\#$ при $i \neq j$. Тогда существует $A \in \text{Aut}(\Lambda^{2S})$ такой, что $A(z_1 | \theta_1^1, \theta_1^2) = (0 | 0, 0)$, $A(z_2 | \theta_2^1, \theta_2^2) = (\infty | 0, 0)$ и $A(z_3 | \theta_3^1, \theta_3^2) = (1 | \theta^1, \theta^2)$.*

Положим

$$\text{Aut}_0^{2t} = \{h \in \text{Aut}(\Lambda^{2S}) \mid h(0 | 0, 0) = (0 | 0, 0), h(\infty | 0, 0) = (\infty | 0, 0), h(1 | 0, 0) = (1 | \theta^1, \theta^2)\}.$$

ЛЕММА 13.3. *Группа A_0^{2S} состоит из элементов вида $h(z | \theta^1, \theta^2) = (z | \mu\theta^i, \mu^{-1}\theta^{3-i})$, где $\mu \in L_0(\mathbb{R})$, $\mu^\# \neq 0$ и i равно 1 или 2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определение A_0^{2S} влечет $h = A[1, 0, 0, 1, \ell | 0]$, откуда $\ell^{11}\ell^{21} = \ell^{12}\ell^{22} = 0$, $\ell^{11}\ell^{22} + \ell^{12}\ell^{21} = 1$. Следовательно, или $\ell^{12} = \ell^{21} = 0$, $\ell^{11}\ell^{22} = 1$, или $\ell^{11} = \ell^{22} = 0$, $\ell^{12}\ell^{21} = 1$.

Соответствие $A \mapsto A^\#$, где

$$A = A[a, b, c, d, \ell | \varepsilon], \quad A^\#(z) = \frac{a^\#z + b^\#}{c^\#z + d^\#},$$

порождает эпиморфизм $\#: \text{Aut}(\Lambda^{2S}) \rightarrow \text{Aut}(\Lambda)$. Элемент множества $\text{Aut}_1(\Lambda^{2S}) = (\#)^{-1}(\text{Aut}_1(\Lambda))$ называется *суперпараболическим*, а элемент множества $\text{Aut}_2(\Lambda^{2S}) = (\#)^{-1}(\text{Aut}_2(\Lambda))$ – *супергиперболическим*.

Подгруппа $\Gamma \subset \text{Aut}(\Lambda^{2S})$ называется $N = 2$ *суперфуксовой*, если $\Gamma^\# = \#(\Gamma)$ – фуксова группа и $\#: \Gamma \rightarrow \Gamma^\#$ – изоморфизм. В этом параграфе мы будем рассматривать (не оговаривая это специально) лишь $N = 2$ суперфуксовы группы, состоящие из суперпараболических и супергиперболических автоморфизмов Λ^{2S} .

Из соотношений на ℓ^{ij} следует, что $(\ell^{11}\ell^{22})^\# \geq 0$, $(\ell^{12}\ell^{21})^\# \geq 0$ и или $(\ell^{11})^\# = (\ell^{22})^\# = 0$, или $(\ell^{12})^\# = (\ell^{21})^\# = 0$.

Сопоставим автоморфизму $A = A[a, b, c, d, \ell | \varepsilon]$ матрицу

$$\bar{J}(A) = \frac{\sigma}{\sqrt{a^\#d^\# - b^\#c^\#}} \begin{pmatrix} a^\# & b^\# \\ c^\# & d^\# \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}),$$

где $\sigma = \text{sign}(\ell^{11} + \ell^{12} + \ell^{21} + \ell^{22})^\#$.

ЛЕММА 13.4. Пусть $\Gamma \in \text{Aut}(\Lambda^{2S})$ есть $N = 2$ суперфуксова группа. Тогда соответствие $\bar{J}: \Gamma \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$ является мономорфизмом и, следовательно, определяет поднятие $J^*: \Gamma^\# \rightarrow \bar{\Gamma} = \bar{J}(\Gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямая выкладка показывает, что $\bar{J}$ – гомоморфизм. Кроме того, $\# = J \circ \bar{J}$ и мономорфность $\#$ влечет мономорфность $\bar{J}$.

Пусть $\Gamma \subset \text{Aut}(\Lambda^{2S})$ есть $N = 2$ суперфуксова группа. Фактормножество Λ^{2S}/Γ называется *римановой $N = 2$ суперповерхностью* или *$N = 2$ суперримановой поверхностью*. Две $N = 2$ суперповерхности $P_1 = \Lambda^{2S}/\Gamma_1$ и $P_2 = \Lambda^{2S}/\Gamma_2$ считаются совпадающими, если Γ_1 и Γ_2 сопряжены в $\text{Aut}(\Lambda^{2S})$. Проекция $\#: \Lambda^{2S} \rightarrow \Lambda$ и $\#: \Gamma \rightarrow \Gamma^\#$ определяют проекцию $\#: P \rightarrow P^\# = \Lambda/\Gamma^\#$.

Согласно теореме 7.2 поднятие J^* задает функцию Арфа

$$\omega_P^1: H_1(P^\#, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2.$$

Рассмотрим теперь функцию

$$\Omega: \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\},$$

сопоставляющую автоморфизму $A[a, b, c, d, \ell | \varepsilon] \in \Gamma$ значение 0, если $(\ell^{12})^\# = (\ell^{21})^\# = 0$, и значение 1, если $(\ell^{11})^\# = (\ell^{22})^\# = 0$. Нетрудно видеть, что Ω – гомоморфизм, индуцирующий гомоморфизм $\omega_P^0: H_1(P^\#, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$. Обозначим через ω_P^2 функцию Арфа $\omega_P^1 + \omega_P^0$.

ТЕОРЕМА 13.1. Пусть Q – риманова поверхность и $\omega^1, \omega^2: H_1(Q, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ – произвольные функции Арфа. Тогда существует риманова $N = 2$ суперповерхность P такая, что $P^\# = Q$ и $\omega_P^1 = \omega^1, \omega_P^2 = \omega^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Q = \Lambda/\Gamma$, где Γ – фуксова группа. Тогда согласно теореме 7.2 существует поднятие $J^*: \Gamma \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$, порождающее функции Арфа ω^1 . Сопоставим теперь автоморфизму $\gamma \in \Gamma \subset \text{Aut}(\Lambda)$ автоморфизм $\gamma^S \in \text{Aut}(\Lambda^{2S})$ вида

$$\gamma^S(z | \theta_1, \theta_2) = \left(\frac{az + b}{cz + d} \mid \frac{\theta_i}{cz + d}, \frac{\theta_{3-i}}{cz + d} \right),$$

где $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = J^*(\gamma)$ и

$$i = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega^1(\gamma) = \omega^2(\gamma), \\ 2, & \text{если } \omega^1(\gamma) \neq \omega^2(\gamma). \end{cases}$$

Так как $\omega^1 + \omega^2$ – гомоморфизм, то $\Gamma^S = \{\gamma^S \mid \gamma \in \Gamma\}$ есть $N = 2$ суперфуксова группа и $P = \Lambda^{2S}/\Gamma^S$ есть риманова $N = 2$ суперповерхность. При этом $P^\# = Q$, $\omega_P^1 = \omega^1$ и $\omega_P^2 = \omega^2$.

Риманову $N = 2$ суперповерхность P назовем *нескрученной*, если $\omega_P^0 = 0$. Ее *топологическим типом* назовем топологический тип $(g, \delta, k_\alpha, m_\alpha)$ функции Арфа $\omega_P^1 = \omega_P^2$. Если $\omega_P^0 \neq 0$, то риманову поверхность назовем *скрученной*. Ее *топологическим типом* назовем топологический тип $(g, \delta_1, \delta_2, k_{\alpha\beta}, m_{\alpha\beta})$ пары функций Арфа (ω_P^1, ω_P^2) .

Наша ближайшая задача – описать множества M^{2t} римановых $N = 2$ суперповерхностей произвольного топологического типа t .

§ 14. Модули $N = 2$ суперримановых поверхностей

Простейшие супергиперболические и суперпараболические автоморфизмы суперобласти Λ^{2S} имеют вид

$$I_\lambda^\ell(z | \theta_1, \theta_2) = (\lambda z | \ell^{11}\theta_1 + \ell^{12}\theta_2, \ell^{21}\theta_1 + \ell^{22}\theta_2)$$

и

$$J_\mu^\ell(z | \theta_1, \theta_2) = (z + \mu | \ell^{11}\theta_1 + \ell^{12}\theta_2, \ell^{21}\theta_1 + \ell^{22}\theta_2),$$

где $\lambda, \mu \in L_0(\mathbb{R})$, $\lambda^\# > 1$, $\mu^\# > 0$, $\ell \in GL(2, L_0(\mathbb{R}))$ и $\ell^{11}\ell^{21} = \ell^{12}\ell^{22} = 0$, $\ell^{11}\ell^{22} + \ell^{12}\ell^{21}$ равна λ для I_λ^ℓ и 1 для J_μ^ℓ .

Всякий $A \in \text{Aut}_2(\Lambda^{2S})$ со свойством $A^\#(\infty) \neq \infty$ имеет вид

$$A = I(\ell, \lambda, \alpha, \beta | \varepsilon) = A[\lambda\alpha - \beta, (1 - \alpha)\alpha\beta, \lambda - 1, \alpha - \lambda\beta, \ell | \varepsilon],$$

где $\lambda, \alpha, \beta \in L_0(\mathbb{R})$, $\lambda^\# > 1$, $\alpha^\# \neq \beta^\#$, $\ell \in GL(2, L_0(\mathbb{R}))$, $\varepsilon \in GL(2, L_1(\mathbb{R}))$. Положим

$$I(\ell, \lambda, \infty, 0 | 0) = I_\lambda^\ell.$$

Всякий $A \in \text{Aut}_1(\Lambda^{2S})$ со свойством $A^\#(\infty) \neq \infty$ имеет вид

$$A = J(\ell, \lambda, a \mid \varepsilon) = A[1 - a\lambda, a^2\lambda, -\lambda, 1 + a\lambda, \ell \mid \varepsilon],$$

где $\lambda, a \in L_0(\mathbb{R})$, $\lambda^\# > 0$, $\ell \in GL(2, L_0(\mathbb{R}))$, $\varepsilon \in GL(2, L_1(\mathbb{R}))$.

Как и в случае $N = 1$ суперповерхностей, мы используем эту параметризацию множества $\text{Aut}_1(\Lambda^{2S}) \cup \text{Aut}_2(\Lambda^{2S})$ для построения $N = 2$ супераналога пространства Фрике–Клейна–Тайхмюллера.

Обозначим через $\tilde{T}^{2t}$ – множество мономорфизмов $\psi: v_{g,n} \rightarrow \text{Aut}(\Lambda^{2S})$ таких, что:

- 1) $(\psi(v_{g,n}))^\# \in \tilde{T}_{g,k,m}$;
- 2) $P = \Lambda^{2S}/\psi(\gamma_{g,n})$ – риманова $N = 2$ суперповерхность типа t ;
- 3) естественная проекция $(\psi(\gamma_{g,n}))^\# \rightarrow H_1(P^\#, \mathbb{Z}_2)$ переводит $v_{g,n}$ в стандартный базис $\{a_i, b_i (i = 1, \dots, g), c_i (i = g+1, \dots, n)\}$ такой, что $\omega_i = \omega_P^i$ удовлетворяют условиям леммы 8.1 (если суперповерхность нескручена) или условиям леммы 8.2 (если суперповерхность скручена).

Соответствие $\psi \mapsto \psi^\#$, где $\psi^\#(d) = (\psi(d))^\#$, порождает отображение $\#: \tilde{T}^{2t} \rightarrow \tilde{T}_{g,k,m}$. Согласно теореме 13.1 $\#(\tilde{T}^{2t}) = \tilde{T}_{g,k,m}$.

Соответствие $\Psi: \psi \mapsto \Lambda^{2S}/\psi(\gamma_{g,n})$ переносит топологию с пространства $\tilde{T}^{2t}$ на пространство M_{2t} $N = 2$ суперримановых поверхностей типа t .

Рассмотрим теперь пространство $\check{T}^{2t}$, определенное условиями

- 1) при $g = k = 0$

$$\check{T}^{2t} = \{\psi \in \tilde{T}^{2t} \mid \psi(c_1 c_2) = I_\lambda^\ell, \psi(c_1) = J(\ell_1, \lambda_1, -1, \mid \varepsilon)\};$$

- 2) при $g = 0, k = 1$

$$\check{T}^{2t} = \{\psi \in \tilde{T}^{2t} \mid \psi(c_1) = I_{\lambda_1}^{\ell_1}, \psi(c_2) = J(\ell_2, \lambda_2, 1, \mid \varepsilon)\};$$

- 3) при $g = k = 1$

$$\check{T}^{2t} = \{\psi \in \tilde{T}^{2t} \mid \psi(c_1) = I_{\lambda_1}^{\ell_1}, \psi(b_1) = I(\ell, \lambda_2, 1, \mid \varepsilon)\};$$

- 4) в остальных случаях

$$\check{T}^{2t} = \{\psi \in \tilde{T}^{2t} \mid \psi(c_1) = I_{\lambda_1}^{\ell_1}, \psi(c_2) = I(\ell_2, \lambda_2, 1, \beta, \mid \varepsilon)\}.$$

Опишем теперь отображение

$$\Psi^{2t}: \check{T}^{2t} \rightarrow \mathbb{R}^{(r_1 \mid r_2)}.$$

Для этого представим элементы $\psi(v_{g,m})$, где $\psi \in T^{2t}$, в следующем виде:

$$\begin{aligned} \psi(c_i) &= I(\ell_i, \lambda_i, \alpha_i, \beta_i \mid z_i) \quad \text{при } i \leq g+k, \\ \psi(c_i) &= J(\ell_i, \lambda_i, a_i \mid z_i) \quad \text{при } i > g+k, \\ \psi(a_i) &= I(\ell_i^a, \lambda_i^a, \delta_i, \eta_i \mid z_i^a), \\ \psi(b_i) &= I(\ell_i^b, \lambda_i^b, \varepsilon_i, \xi_i \mid z_i^b). \end{aligned}$$

Согласно лемме 13.1 при заданном топологическом типе t матрицы $\ell, \ell_i, \ell_i^a, \ell_i^b$ определяются величинами

$$\tilde{\ell}, \tilde{\ell}_i, \tilde{\ell}_i^a, \tilde{\ell}_i^b \in \Lambda_0(\mathbb{R}),$$

где

$$\tilde{\ell}, \tilde{\ell}_i, \tilde{\ell}_i^a, \tilde{\ell}_i^b = (\pm \ell, \pm \ell_i, \pm \ell_i^a, \pm \ell_i^b),$$

с положительной числовой частью $\tilde{\ell}^\#, \tilde{\ell}_i^\#, (\tilde{\ell}_i^a)^\#, (\tilde{\ell}_i^b)^\# > 0$.

Для нескрученного топологического типа t при $k = m = 0$ положим

$$\Psi(\psi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{g-1}, \tilde{\ell}_1^a, \tilde{\ell}_1^b, \dots, \tilde{\ell}_g^a, \tilde{\ell}_g^b, \xi_1, \eta_1, \varepsilon_1, \dots, \xi_g, \eta_g, \varepsilon_g, \\ \beta_2, \alpha_3, \beta_3, \dots, \alpha_{g-1}, \beta_{g-1} \mid z_2, \dots, z_{g-1}, z_1^a, \dots, z_g^a\} \subset \mathbb{R}^{(8g-6 \mid 8g-8)}.$$

Для скрученного топологического типа t при $k = m = 0$ положим

$$\Psi(\psi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{g-1}, \tilde{\ell}_1^b, \tilde{\ell}_2^a, \tilde{\ell}_2^b, \dots, \tilde{\ell}_g^a, \tilde{\ell}_g^b, \xi_1, \eta_1, \varepsilon_1, \dots, \xi_g, \eta_g, \varepsilon_g, \\ \beta_2, \alpha_3, \beta_3, \dots, \alpha_{g-1}, \beta_{g-1} \mid z_2, \dots, z_{g-1}, z_1^a, \dots, z_g^a\} \subset \mathbb{R}^{(8g-7 \mid 8g-8)}.$$

При $g = k = 0$ положим

$$\Psi(\psi) = \{\tilde{\ell}, \tilde{\ell}_1, \tilde{\ell}_3, \dots, \tilde{\ell}_{m-1}, \lambda_1, \lambda_3, \dots, \lambda_{m-1}, a_3, \dots, a_{m-2} \mid \\ z_1, z_3, \dots, z_{m-1}\} \subset \mathbb{R}^{(3m-7 \mid 4m-8)}.$$

При $g = 0, k = 1$ положим

$$\Psi(\psi) = \{\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell}_2, \dots, \tilde{\ell}_m, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, a_3, \dots, a_{m-1} \mid \\ z_2, \dots, z_m\} \subset \mathbb{R}^{(3m-3 \mid 4m-4)}.$$

При $g = k = 1$ положим

$$\Psi(\psi) = \{\tilde{\ell}_2, \dots, \tilde{\ell}_{m+1}, \lambda_1, \dots, \lambda_{m+1}, \tilde{\ell}_1^a, \tilde{\ell}_1^b, \eta_1, \varepsilon_1, \alpha_2, \beta_2, a_3, \dots, a_m \mid \\ z_2, \dots, z_m, z_1^a, z_1^b\} \subset \mathbb{R}^{(3m+5 \mid 4m+4)}.$$

В остальных случаях:

при $m = 0$ положим

$$\Psi(\psi) = \{\tilde{\ell}_{g+1}, \dots, \tilde{\ell}_{g+k-1}, \lambda_1, \dots, \lambda_{g+k-1}, \tilde{\ell}_1^a, \tilde{\ell}_1^b, \dots, \tilde{\ell}_g^a, \tilde{\ell}_g^b, \\ \xi_1, \eta_1, \varepsilon_1, \dots, \xi_g, \eta_g, \varepsilon_g, \beta_2, \alpha_3, \beta_3, \dots, \alpha_{g+k-1}, \beta_{g+k-1} \mid \\ z_2, \dots, z_{g+k-1}, z_1^a, \dots, z_g^a\} \subset \mathbb{R}^{(8g+4k-7 \mid 8g+4k-8)},$$

при $m = 1$ положим

$$\Psi(\psi) = \{\tilde{\ell}_{g+1}, \dots, \tilde{\ell}_{g+k}, \lambda_1, \dots, \lambda_{g+k}, \tilde{\ell}_1^a, \tilde{\ell}_1^b, \dots, \tilde{\ell}_g^a, \tilde{\ell}_g^b, \\ \xi_1, \eta_1, \varepsilon_1, \dots, \xi_g, \eta_g, \varepsilon_g, \beta_2, \alpha_3, \beta_3, \dots, \alpha_{g+k-1}, \beta_{g+k-1}, \alpha_{g+k} \mid \\ z_2, \dots, z_{g+k}, z_1^a, \dots, z_g^a\} \subset \mathbb{R}^{(8g+4k-4 \mid 8g+4k-4)},$$

а в остальных случаях

$$\begin{aligned} \Psi(\psi) = \{ & \tilde{\ell}_{g+1}, \dots, \tilde{\ell}_{g+k+m-1}, \lambda_1, \dots, \lambda_{g+k+m-1}, \tilde{\ell}_1^a, \tilde{\ell}_1^b, \dots, \tilde{\ell}_g^a, \tilde{\ell}_g^b, \\ & \xi_1, \eta_1, \varepsilon_1, \dots, \xi_g, \eta_g, \varepsilon_g, \beta_2, \alpha_3, \beta_3, \dots, \alpha_{g+k}, \beta_{g+k}, a_{g+k+1}, \dots, a_{g+k+m-2} \mid \\ & z_2, \dots, z_{g+k+m-1}, z_1^a, \dots, z_g^a \} \subset \mathbb{R}^{(8g+4k+3m-7 \mid 8g+4k+4m-8)}. \end{aligned}$$

Положим

$$\widehat{T}^{2t} = \Psi(\check{T}^{2t}).$$

ТЕОРЕМА 14.1. *Отображение $\Psi: \check{T}^{2t} \rightarrow \widehat{T}^{2t}$ — взаимно однозначно и $\widehat{T}^{2t}$ — сильно диффеоморфно*

$$\mathbb{R}^{(8g+4k+3m-b \mid 8g+4k+4m-8)},$$

где

- 1) $b = 6$, если $k = m = 0$ и t — нескрученный топологический тип;
- 2) $b = 7$ в остальных случаях.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 12.1.

Группа $\text{Aut}(\Lambda^{2S})$ действует на $\check{T}^{2t}$ сопряжениями. Положим

$$T^{2t} = \check{T}^{2t} / \text{Aut}(\Lambda^{2S}).$$

Для любой тройки

$$(z_1 \mid \theta_1^1, \theta_1^2), (z_2 \mid \theta_2^1, \theta_2^2), (z_3 \mid \theta_3^1, \theta_3^2) \in \mathbb{R}^{(1 \mid 2)}$$

существует $h \in \text{Aut}(\Lambda^{2S})$ такой, что

$$h(z_1 \mid \theta_1^1, \theta_1^2) = (\infty \mid 0, 0), \quad h(z_2 \mid \theta_2^1, \theta_2^2) = (0 \mid 0, 0), \quad h(z_3 \mid \theta_3^1, \theta_3^2) = (1 \mid \theta^1, \theta^2).$$

Таким образом, всякой точке из T^{2t} отвечает хотя бы одна точка из $\check{T}^{2t}$. Кроме того, группа

$$\check{\text{Aut}}(\Lambda^{2S}) = \{h \in \text{Aut}(\Lambda^{2S}) \mid h(\check{T}^{2t}) = \check{T}^{2t}\}$$

состоит из отображений, переводящих точки $(\infty \mid 0, 0)$, $(0 \mid 0, 0)$, $(1 \mid \theta^1, \theta^2)$ в точки того же вида, и, следовательно, порождается отображениями

$$\begin{aligned} h_\lambda: (z \mid \theta^1, \theta^2) &\mapsto (z \mid \lambda\theta^1, \lambda^{-1}\theta^2), \\ h^1: (z \mid \theta^1, \theta^2) &\mapsto (z \mid \theta^2, \theta^1), \\ h^2: (z \mid \theta^1, \theta^2) &\mapsto (z \mid -\theta^1, -\theta^2). \end{aligned}$$

Группа отображений вида h_λ эффективно действует на $\check{T}^{2t}$, если t — тип скрученных пар функций Арфа, и действует тождественно на $\check{T}^{2t}$, если t — тип нескрученных функций Арфа.

Согласно теореме 14.1 отсюда следует

ТЕОРЕМА 14.2 [43], [52]. Множество T^{2t} сильно диффеоморфно

$$\mathbb{R}^{(8g+4k+3m-b(t) \mid 8g+4k+4m-8)} / (\mathbb{Z}_2)^2,$$

где

- 1) $b(t) = 6$, если $k = m = 0$ и t – тип нескрученной пары функций Арфа;
- 2) $b(t) = 8$, если t – тип скрученной пары функций Арфа;
- 3) $b(t) = 7$ в остальных случаях.

Таким образом, справедливо

СЛЕДСТВИЕ 14.1. Пусть t – топологический тип функции Арфа на поверхности типа (g, k, m) и M^{2t} – множество всех $N = 2$ суперримановых поверхностей типа t . Тогда M^t представляется в виде T^{2t} / Mod^{2t} , где T^{2t} сильно диффеоморфно

$$\mathbb{R}^{(8g+4k+3m-b(t) \mid 8g+4k+4m-8)} / (\mathbb{Z}_2)^2,$$

а группа Mod^{2t} дискретно действует на T^{2t} . Если (ω_1, ω_2) – пара функций Арфа типа t , то

$$\text{Mod}^{2t} \cong \{\alpha \in \text{Mod}_{g,k,m} \mid \omega_1 \alpha = \omega_1, \omega_2 \alpha = \omega_2\}.$$

§ 15. Суперголоморфные морфизмы римановых суперповерхностей

1. Пусть $\tilde{U} = \{(\tilde{z}, \tilde{\theta})\}$ и $U = \{(z, \theta)\}$ – две суперобласти в $\mathbb{C}^{(1|1)}$. Рассмотрим отображение $f: U \rightarrow \tilde{U}$. Оно называется суперконформным, если

$$\begin{aligned} \tilde{z} &= u(z) - u'(z)\varepsilon(z)\theta, \\ \tilde{\theta} &= \sqrt{u'(z)} \left(\theta + \varepsilon(z) + \frac{1}{2}\varepsilon(z)\varepsilon'(z)\theta \right), \end{aligned}$$

где $u(z) \in L_0(\mathbb{C})$, $\varepsilon(z) \in L_1(\mathbb{C})$ [5].

Согласно [6] группа суперконформных автоморфизмов Λ^s совпадает с $\text{Aut}(\Lambda^s)$.

Пусть теперь $\Gamma \subset \text{Aut}(\Lambda^s)$ – суперфуксова группа, $P = \Lambda^s / \Gamma$ – риманова суперповерхность, $\varphi: \Lambda^s \rightarrow P$ – естественная проекция и $\varphi^\#: \Lambda \rightarrow P^\#$ – ее числовая часть. Рассмотрим $U \subset P$, компоненту связности V прообраза $(\varphi^\#)^{-1}(U^\#)$ и $\tilde{U} = (\#)^{-1}(V)$. Множество U назовем *окрестностью точки* $p \in U$, если $U = \varphi(\tilde{U})$. В этом случае отображение $\varepsilon: U \rightarrow \mathbb{C}^{(1|1)}$ называется *локальной картой*, если $\varepsilon\varphi: \tilde{U} \rightarrow \mathbb{C}^{(1|1)}$ суперконформно и $\varepsilon^\#(p_1^\#) \neq \varepsilon^\#(p_2^\#)$ при $p_1^\# \neq p_2^\#$. Покрывающую P систему локальных карт $\{\varepsilon_i\}$ назовем *атласом* на P .

Пусть теперь $\tilde{P}$ – другая риманова суперповерхность и $\{\tilde{\varepsilon}_i\}$ – атлас на ней. Отображение $f: \tilde{P} \rightarrow P$ назовем *суперголоморфным морфизмом*, если $f(\tilde{P}) = P$ и f суперконформно в картах атласов $\{\varepsilon_i\}$ и $\{\tilde{\varepsilon}_i\}$. Обратимый суперголоморфный морфизм назовем *суперголоморфным изоморфизмом*.

Два суперголоморфных морфизма $f_1: P_1 \rightarrow P_2$ и $f_2: \tilde{P}_2 \rightarrow P_2$ считаются одинаковыми, если существуют суперголоморфные изоморфизмы $\tilde{\omega}: \tilde{P}_1 \rightarrow \tilde{P}_2$ и $\omega: P_1 \rightarrow P_2$ такие, что $f_2 \tilde{\omega} = \omega f_1$. Будем говорить, что f_1 и f_2 имеют одинаковый топологический тип, если существуют гомеоморфизмы $\tilde{\psi}^\#: \tilde{P}_1^\# \rightarrow \tilde{P}_2^\#$ и $\psi^\#: P_1^\# \rightarrow P_2^\#$ такие, что $f_2^\# \tilde{\psi}^\# = \psi^\# f_1^\#$ и $\omega_1 = \omega_2 \psi^\#$, где ω_i – функция Арфа, отвечающая P_i .

Суперголоморфный морфизм f назовем *супернакрытием* [53], если $f^\#$ не имеет критических точек. Всякому суперголоморфному морфизму f отвечает супернакрытие $f_0: P \setminus B \rightarrow P' \setminus B'$, где $B' = (\#)^{-1}(\{\text{множество критических значений морфизма } f^\#\})$ и $B = f^{-1}(B')$. Как и в классическом случае (см. § 6), суперголоморфный морфизм полностью определяется соответствующим супернакрытием и указанием, какие из проколов накрытия $f^\#$ надо заклеить. Поэтому в дальнейшем мы рассматриваем только супернакрытия.

ЗАМЕЧАНИЕ. В отличие от классического случая в суперслучае не каждый прокол $p \in P^\#$ супернакрытия $f: \tilde{P} \rightarrow P$ можно заклеить. Для этого необходимо и достаточно, чтобы значение функции Арфа $\omega: H_1(P^\#, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ на проколе p и значение функций Арфа $\tilde{\omega}: H_1(\tilde{P}^\#, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ на проколе $(f^\#)^{-1}(p)$ равнялись 0. При выполнении первого условия последнее условие эквивалентно нечетности степеней ветвлений в точках $(f^\#)^{-1}(p)$.

2. Перейдем теперь к описанию классов топологической эквивалентности супернакрытий.

Пусть t — топологический тип функции Арфа на поверхности типа (g, k, m) . Рассмотрим подгруппу $\gamma \subset \gamma_{g,k+m} = \gamma_{g,n}$, $\psi \in T^t$ и $P = \Lambda^s / \psi(\gamma_{g,n})$. Функция Арфа, отвечающая P , порождает функцию $\omega: \gamma_{g,n} \rightarrow \mathbb{Z}_2$. Положим

$$\widetilde{\text{Mod}}^{(\gamma, \omega)} = \{\alpha \in \text{Mod}_{g,k,m} \mid \omega\alpha = \omega, \alpha\gamma = \gamma\}$$

и

$$\text{Mod}^{(\gamma, \omega)} = \widetilde{\text{Mod}}^{(\gamma, \omega)} / (\widetilde{\text{Mod}}^{(\gamma, \omega)} \cap \text{IMod}_{g,k,m}).$$

Повторяя рассуждение § 6, находим

ТЕОРЕМА 15.1. *Множество супернакрытий одинакового топологического типа образуют связное супермногообразие вида $T^t / \text{Mod}^{(\gamma, \omega)}$. Каждой паре (γ, ω) отвечает компонента связности пространства суперголоморфных накрытий. Компоненты, отвечающие парам (γ, ω) и (γ', ω') , совпадают, если и только если они переходят друг в друга под действием группы $\text{Mod}_{g,k,m}$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Polykov A. M. Quantum geometry of bosonic string // Phys. Lett. B. 1981. V. 103. P. 207.
- [2] Баранов А. М., Шварц А. С. О многопетлевом вкладе в теорию струны // Письма в ЖЭТФ. 1986. Т. 42. № 8. С. 340–342.
- [3] Fridan D. Notes on string theory and two dimensional conformal field theory // Proceeding of the Workshop on Unified String Theories. Santa Barbara: Institute for Theoretical Physics, 1985.
- [4] Baranov A. M., Manin Yu. I., Frolov I. V., Schwarz A. S. A superanalog of the Selberg trace formula and multiloop contributions for fermionic strings // Comm. Math. Phys. 1987. V. 111. P. 373–392.
- [5] Rosly A. A., Schwarz A. S., Voronov A. A. Geometry of superconformal manifolds // Comm. Math. Phys. 1988. V. 119. P. 129–152.
- [6] Манин Ю. И. Супералгебраические кривые и квантовые струны // Труды МИАН. 1990. Т. 183. С. 126–138.
- [7] Falqui G., Reina C. $N = 2$ super Riemann surfaces and algebraic geometry // J. Math. Phys. 1990. V. 31. № 4. P. 948–952.

- [8] Grepner D. Space-time supersymmetry in compactified string theory and superconformal models // Nuclear Phys. 1988. V. 296. P. 757–779.
- [9] Hurwitz A. Über Riemannsche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten // Math. Ann. 1891. V. 39. P. 1–61.
- [10] Dubrovin B. Geometry of 2D topological field theories // Integrable Systems and Quantum Groups / ed. M. Francaviglia, S. Greco. Lecture Notes in Math. V. 1620. Berlin: Springer-Verlag, 1996. P. 120–348.
- [11] Dubrovin B. Painleve transcendents in two-dimensional topological field theory // Preprint SISSA, 1998. 24/98/FM.
- [12] Kontsevich M., Manin Yu. Gromov–Witten classes, quantum cohomology and enumerative geometry // Comm. Math. Phys. 1994. V. 164. №3. P. 525–562.
- [13] Ruan Y., Tian G. A mathematical theory of quantum cohomology // J. Differential Geom. 1995. V. 42. №2. P. 259–367.
- [14] Manin Yu., Merkulov S. Semisimple Frobenius (super) manifolds and quantum cohomology of P^r // Topol. Methods Nonlinear Anal. 1997. V. 9. №1. P. 107–161.
- [15] Monastyrsky M. I., Natanzon S. M. The moduli space of superconformal instantons in sigma models // Modern Phys. Lett. A. 1991. V. 6. №19. P. 1787–1796; №31. P. 2919.
- [16] Monastyrsky M. I., Natanzon S. M. The moduli space of instantons in $N = 2$ supersymmetrical σ -models // Classical Quantum Gravity. 1995. V. 12. №9. P. 2149–2156; 1996. V. 13. P. 1277.
- [17] Monastyrsky M. I., Natanzon S. M. The moduli space of instantons in $N = 2$ supersymmetrical σ -models // Topics in statistical and theoretical physics. F.A. Berezin Memorial Volume. Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. V. 177. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1996. P. 195–202.
- [18] Fricke F., Klein F. Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen. V. 1, 2. Leipzig: Teubner, 1897, 1912 (Reprinted by Johnson Reprint Corp., New York and Teubner Verlagsgesellschaft. Stuttgart, 1965).
- [19] Bers L. Quasiconformal mappings and Teichmüller's theorem // Analytic Functions. Princeton Math. Ser. 1960. V. 24. P. 89–119.
- [20] Keen L. Intrinsic moduli on Riemann surfaces // Ann. of Math. 1966. V. 84. №3. P. 404–420.
- [21] Keen L. On Fricke moduli // Ann. of Math. Stud. 1971. V. 66. P. 205–224; A correction to “On Fricke moduli” // Proc. Amer. Math. Soc. 1973. V. 40. P. 60–64.
- [22] Wolpert S. The length spectra as moduli for compact Riemann surface // Ann. of Math. 1979. V. 109. P. 323–351.
- [23] Натанзон С. М. Пространство модулей вещественных кривых // Труды ММО. 1978. Т. 37. С. 219–252.
- [24] Натанзон С. М. Клейновы поверхности // УМН. 1990. Т. 45. №6. С. 47–89.
- [25] Натанзон С. М. Пространство модулей вещественных алгебраических $N = 1$ и $N = 2$ суперкривых // Функц. анализ и его прил. 1996. Т. 30. №4. С. 19–30.
- [26] Бобенко А. И. Униформизация Шоттки и конечнозонное интегрирование // Докл. АН СССР. 1987. Т. 295. №2. С. 268–272.
- [27] Натанзон С. М. Примианы вещественных кривых и их приложения к эффективизации операторов Шрёдингера // Функц. анализ и его прил. 1989. Т. 23. №1. С. 41–55.
- [28] Zieschang H., Vogt E., Coldewey H.-D. Surfaces and planar discontinuous groups // Lect. Notes in Math. V. 835. Berlin: Springer-Verlag, 1980.
- [29] Натанзон С. М. Инварианты прямые фуксовых групп // УМН. 1972. Т. 27. №4. С. 145–164.
- [30] Keen L. Canonical polygons for finitely generated Fuchsian groups // Acta Math. 1966. V. 115. P. 1–16.
- [31] Здравковска С. Топологическая классификация полиномиальных отображений // УМН. 1970. Т. 25. №4. С. 179–180.
- [32] Арнольд В. И. Топологическая классификация комплексных тригонометрических многочленов и комбинаторика графов с одинаковым числом вершин и ребер // Функц. анализ и его прил. 1996. Т. 30. №1. С. 1–17.

- [33] Натанзон С. М. Пространство вещественных мероморфных функций на вещественных алгебраических кривых // Докл. АН СССР. 1984. Т. 279. № 4. С. 803–805.
- [34] Натанзон С. М. Топология двумерных накрытий и мероморфные функции на вещественных и комплексных алгебраических кривых. I // Труды семинара по векторному и тензорному анализу с их приложениями к геометрии, механике и физике. Т. 23. М.: МГУ, 1988. С. 79–103.
- [35] Natanzon S. Topology of 2-dimensional coverings and meromorphic functions on real and complex algebraic curves // Selecta Math. Soviet. 1993. V. 12. № 3. P. 251–291.
- [36] Натанзон С. М. Униформизация пространств мероморфных функций // Докл. АН СССР. 1986. Т. 287. № 5. С. 1058–1061.
- [37] Natanzon S. M. Spaces of meromorphic functions on Riemann surfaces // Topics in Singularity Theory. V. I. Arnold's 60th Anniversary Collection. Amer. Math. Soc. Transl. (2). V. 180. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1997. P. 175–180.
- [38] Натанзон С. М. Топологическая структура пространства голоморфных морфизмов римановых поверхностей // УМН. 1998. Т. 53. № 2. С. 155–156.
- [39] Dehn M. Über Abbildungen // Mat. Tidsskr. B. 1939. P. 25–48.
- [40] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1982.
- [41] Натанзон С. М. Дискретные подгруппы $GL(2, C)$ и спинорные расслоения на римановых и клейновых поверхностях // Функц. анализ и его прил. 1991. Т. 25. № 4. С. 76–78.
- [42] Натанзон С. М. Классификация пар функций Арфа на ориентируемых и неориентируемых поверхностях // Функц. анализ и его прил. 1994. Т. 28. № 3. С. 35–46.
- [43] Natanzon S. Moduli spaces of Riemann $N = 1$ and $N = 2$ supersurfaces // J. Geom. Phys. 1993. V. 12. № 1. P. 35–54.
- [44] Arf C. Untersuchungen über quadratische formen in Körpern der Charakteristik 2 // J. Reine Angew. Math. 1941. V. 183. P. 148–167.
- [45] Натанзон С. М. О квадратичных формах над полем Z_2 // УМН. 1995. Т. 50. № 5. С. 243–244.
- [46] Atiyah M. Riemann surfaces and spin structures // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 1971. V. 4. P. 47–62.
- [47] Johnson D. Spin structures and quadratic forms on surfaces // J. London Math. Soc. (2). 1980. V. 22. P. 365–373.
- [48] Mumford D. Theta characteristics of an algebraic curve // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 1971. V. 4. P. 181–192.
- [49] Натанзон С. М. Пространство Фрике суперфуксовых групп // Функц. анализ и его прил. 1987. Т. 21. № 2. С. 80–81.
- [50] Натанзон С. М. Пространство модулей римановых суперповерхностей // Матем. заметки. 1989. Т. 45. № 4. С. 111–116.
- [51] Natanzon S. Moduli spaces of Riemann and Klein supersurfaces // Developments in Mathematics: The Moscow School / ed. V. Arnold, M. Monastyrsky. London: Chapman & Hall, 1993. P. 100–130.
- [52] Натанзон С. М. Топологические инварианты и модули гиперболических $N = 2$ римановых поверхностей // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 5. С. 19–38.
- [53] Натанзон С. М. Супернакрытия, SNEC-группы и внутренние группы римановых и клейновых поверхностей // УМН. 1990. Т. 45. № 2. С. 217–218.