Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Пажитнов, Простой гомотопический тип комплекса Новикова и ζ -функция Лефшеца градиентного потока, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 1, 117–170

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm118>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 17:36:07

ПРОСТОЙ ГОМОТОПИЧЕСКИЙ ТИП КОМПЛЕКСА НОВИКОВА И ζ -ФУНКЦИЯ ЛЕФШЕЦА ГРАДИЕНТНОГО ПОТОКА

А.В. Пажитнов

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение и сводка основных результатов	117
§ 2. Теория Морса–Новикова	121
§ 3. Краткий обзор результатов работы [2]	127
§ 4. Условие $(\mathfrak{C})$ и оператор гомологического градиентного спуска	134
§ 5. Морсовские фильтрации кобордизмов	142
§ 6. Алгебраические леммы	154
§ 7. Условие $(\mathfrak{C}\mathcal{C})$, фильтрации морсовского типа для морсовских отображений $M \rightarrow S^1$ и рациональность новиковских коэффициентов инцидентности в случае C^0 -общего положения	155
§ 8. Доказательство основной теоремы	167
Список литературы	170

§ 1. Введение и сводка основных результатов

Основные идеи работы представлены в п. 1.1. Следующие три пункта содержат минимальный набор определений, необходимый для формулировки основной теоремы, приведенной в п. 1.6. В п. 1.7 дается комментарий к содержанию оставшейся части статьи.

1.1. Введение. В настоящей работе мы продолжаем исследование свойств комплексов Новикова для случая C^0 -общего положения, которое было начато в работах [1], [2]. Пусть M — замкнутое многообразие. Напомним, что для морсовского отображения $f: M \rightarrow S^1$ и f -градиента v , удовлетворяющего условию трансверсальности, можно построить комплекс Новикова $\mathcal{C}_*(v)$ — аналог классического морсовского комплекса. Этот комплекс $\mathcal{C}_*(v)$ является свободным конечно-порожденным цепным комплексом над кольцом $\mathbb{Z}[[t]][t^{-1}]$ формальных степенных рядов с конечной отрицательной частью. В цитированных выше работах для данного морсовского отображения $f: M \rightarrow S^1$ строится специальный класс f -градиентов, образующий открытое и плотное в C^0 -топологии подмножество в множестве всех f -градиентов, удовлетворяющих условию трансверсальности. Для каждого f -градиента v в этом классе гра-

ничные операторы новиковского комплекса, ассоциированные с v , являются не просто степенными рядами, но рациональными функциями.

Основной конструкцией в доказательстве является гомоморфизм $h(v)$, введенный в [2; § 4], который мы будем здесь называть *оператором гомологического градиентного спуска*. (Для того чтобы объяснить смысл этого названия, рассмотрим регулярное значение $\lambda \in S^1$ отображения f и рассмотрим интегральную кривую γ для $(-v)$, начинающуюся в $x \in V = f^{-1}(\lambda)$. Если эта кривая не сходится к критической точке отображения f , то тогда в некоторой точке — обозначим ее $\rho(x)$ — она снова пересечется с V . Определенное таким образом отображение ρ является гладким отображением из V в V . Это отображение ρ определено, быть может, не всюду, поэтому, вообще говоря, не существует индуцированного им гомоморфизма в гомологиях $H_*(V)$. Однако можно построить некоторый гомоморфизм групп, который для наших целей является вполне эффективным заменителем ρ_* . Этот оператор определяется для f -градиента, удовлетворяющего условию трансверсальности и находящегося в C^0 -общем положении.) В настоящей работе продолжается исследование свойств оператора гомологического градиентного спуска. Мы показываем, что этот гомоморфизм несет достаточно информации для вычисления ζ -функции Лефшеца градиентного потока. Это приводит нас к основной теореме — ее формулировка дана в п. 1.6. Чтобы объяснить вкратце идею основной теоремы, напомним [3], что между комплексом Новикова и пополненным комплексом симплициальных цепей соответствующего циклического накрытия существует цепная гомотопическая эквивалентность. Основная теорема утверждает, что для f -градиента v , находящегося в C^0 -общем положении, эта цепная гомотопическая эквивалентность может быть выбрана таким образом, что ее кручение равно ζ -функции Лефшеца потока, порожденного $(-v)$.

1.2. Алгебраические понятия: K_1 , кольца Новикова и т. д. Пусть R — коммутативное кольцо с единицей. Напомним определение группы K_1 из [4]: $\overline{K}_1 R = K_1 R / \{0, [-1]\}$, где $[-1]$ обозначает элемент порядка 2, соответствующий единице $(-1) \in GL(R, 1) \subset GL(R)$. Далее, $K_1 R = R^\bullet \oplus SK_1(R)$, где $R^\bullet$ — полная группа единиц кольца R . Пусть U — подгруппа в $R^\bullet$. Положим $K_1(R|U) = \overline{K}_1 R / U = R^\bullet / (\pm U) \oplus SK_1(R)$ (здесь $\pm U = \{\pm u | u \in U\}$ и мы отождествляем единицы в $R^\bullet$ с их образами в $\overline{K}_1 R$). Для $S \in GL(R)$ образ S в $\overline{K}_1 R$ или в $K_1(R|U)$ будет обозначаться посредством $[S]$.

Свободно конечно-порожденный цепной комплекс C_* правых R -модулей (см. [5; определение 1.3]) называется *R -комплексом*.

Напомним [4; § 3], что для ациклического R -комплекса C_* можно определить кручение $\tau(C_*) \in \overline{K}_1 R$.

Если $\phi: F_* \rightarrow D_*$ — гомотопическая эквивалентность R -комплексов, то ее *кручение* $\tau(\phi) \in \overline{K}_1 R$ определяется как кручение цепного конуса $C_*(\phi)$. Образ $\tau(\phi)$ в группе $K_1(R|U)$ будет обозначаться посредством $\tau(\phi|U)$.

Перейдем к определениям, касающимся новиковских пополнений. Пусть G — абелева группа и $\xi: G \rightarrow \mathbb{R}$ — гомоморфизм. Положим $\Lambda = \mathbb{Z}G$ и обозначим символом $\widehat{\Lambda}$ абелеву группу всех функций $G \rightarrow \mathbb{Z}$. Группу $\widehat{\Lambda}$ можно также определить как множество всех формальных линейных комбинаций $\sum_{g \in G} n_g g$ (не обязательно конечных) элементов из G с целыми коэффициентами. Для $\lambda \in \widehat{\Lambda}$ положим $\text{supp } \lambda = \{g \in G | n_g \neq 0\}$.

Пусть $\widehat{\Lambda}_\xi$ обозначает подгруппу в группе $\widehat{\Lambda}$, состоящую из всех λ таких, что для каждого $C > 0$ множество $\xi^{-1}([C, \infty]) \cap \text{supp } \lambda$ конечно. Тогда $\widehat{\Lambda}_\xi$ имеет естественную структуру кольца. Пусть, далее, $\widehat{\Lambda}_\mathbb{Q}$ – множество всех функций $G \rightarrow \mathbb{Q}$. Рассмотрим кольцо

$$\widehat{\Lambda}_{\xi, \mathbb{Q}} = \{\lambda \in \widehat{\Lambda}_\mathbb{Q} \mid \forall C \in \mathbb{R} \text{ множество } \text{supp } \lambda \cap \xi^{-1}([C, \infty]) \text{ конечно}\}.$$

В дальнейшем мы будем иметь дело с двумя подгруппами единиц кольца $\widehat{\Lambda}_\xi$. Первая такая подгруппа – сама группа G , вторая вводится в следующей формуле:

$$U_\xi = \{\lambda \in \widehat{\Lambda}_\xi \mid \lambda = \pm g(1 + \mu), \text{ где } g \in G \text{ и } \text{supp } \mu \subset \xi^{-1}(-\infty, 0])\}.$$

В [3] группа $K_1(\widehat{\Lambda}_\xi \mid U_\xi)$ обозначалась символом $Wh(G, \xi)$.

Нам понадобится еще одно кольцо. Пусть $S_\xi = \{\lambda \in \mathbb{Z}G \mid \lambda = 1 + \mu, \text{supp } \mu \subset \xi^{-1}(-\infty, 0])\}$. Обозначим $S_\xi^{-1}\Lambda$ также символом $\Lambda_{(\xi)}$ и отметим, что имеется естественное вложение $\Lambda \hookrightarrow \Lambda_{(\xi)} \hookrightarrow \widehat{\Lambda}_\xi$.

1.3. Комплекс Новикова. Здесь мы скажем лишь, что это такое; определения и мотивировки см. в п. 2.4.

Пусть $f: M \rightarrow S^1$ – морсовское отображение. Мы предполагаем, что $f_*: H_1(M) \rightarrow H_1(S^1) = \mathbb{Z}$ – эпиморфизм. Пусть $\mathcal{P}: \widetilde{M} \rightarrow M$ – регулярное связное накрытие со структурной группой G такое, что $f \circ \mathcal{P}$ гомотопно нулю.¹ В этой работе мы рассматриваем только случай, когда группа G абелева. В этом случае имеется естественный эпиморфизм $\pi: H_1(M) \twoheadrightarrow G$ и $f_*: H_1(M) \rightarrow \mathbb{Z}$ пропускается через гомоморфизм $\xi: G \rightarrow \mathbb{Z}$. Положим $\Lambda = \mathbb{Z}G$, тогда определено соответствующее кольцо Новикова $\widehat{\Lambda}_\xi$. Пусть v есть f -градиент, удовлетворяющий условию трансверсальности (определение см. в п. 2.1). В каждой критической точке p отображения f выберем ориентацию устойчивого многообразия точки p и поднятие p в $\widetilde{M}$.

По этим данным и строится новиковский комплекс $\widetilde{\mathcal{C}}_*(v)$: это свободный $\widehat{\Lambda}_\xi$ -комплекс, у которого число свободных образующих модуля $\widetilde{\mathcal{C}}_k(v)$ равно числу критических точек индекса k отображения f .

1.4. Потоки и орбиты. Пусть w есть C^∞ -векторное поле на замкнутом многообразии M . *Замкнутая орбита поля w* – это траектория $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ поля w , не являющаяся постоянным отображением и удовлетворяющая условию $\gamma(a) = \gamma(b)$. Мы будем отождествлять две такие траектории $\gamma: [a, b] \rightarrow M$, $\gamma': [a', b'] \rightarrow M$, если найдется такое C , что $a' = a + C$, $b' = b + C$ и $\gamma(t) = \gamma'(t + C)$.

Множество всех замкнутых орбит обозначается $\text{Cl}(w)$. Пусть $\gamma \in \text{Cl}(w)$, $\gamma: [a, b] \rightarrow M$; пусть $m \in \mathbb{N}$. Результат последовательного m -кратного прохождения траектории γ есть замкнутая орбита, которую мы будем обозначать γ^m . *Кратность орбиты $\gamma \in \text{Cl}(w)$* – это наибольшее число $k \in \mathbb{N}$ такое, что $\gamma = \theta^m$ для некоторой орбиты $\theta \in \text{Cl}(w)$. Для любой орбиты $\gamma \in \text{Cl}(w)$ определен ее класс гомологий $[\gamma] \in H_1(M)$. Векторное поле w называется *полем Купки–Смейла*, если любой нуль и любая замкнутая орбита поля w являются гиперболическими и если w удовлетворяет условию

¹Таким образом, символ $\sim$, обычно используемый для обозначения универсального накрытия, мы используем для других целей.

трансверсальности. Если w есть поле Купки–Смейла, то для любой орбиты $\gamma \in \text{Cl}(w)$ определен ее индекс $\varepsilon(\gamma) \in \{-1, 1\}$ (это индекс соответствующего отображения Пуанкаре).

1.5. ζ -функция Лефшеца. Мы будем рассматривать ζ -функции только для очень специального класса потоков, а именно, для потоков на замкнутых многообразиях, порожденных градиентами морсовских отображений $f: M \rightarrow S^1$.

Множество всех градиентов Купки–Смейла данного морсовского отображения $f: M \rightarrow S^1$ обозначается символом $\mathcal{GKS}(f)$. Пусть $v \in \mathcal{GKS}(f)$. Для каждой замкнутой орбиты $\gamma \in \text{Cl}(-v)$ рассмотрим элемент $\pi([\gamma])$ как элемент группового кольца $\Lambda = \mathbb{Q}G$, умножим этот элемент на $\frac{\varepsilon(\gamma)}{m(\gamma)}$ и рассмотрим бесконечный ряд

$$\eta_L(-v) = \sum_{\gamma \in \text{Cl}(-v)} \frac{\varepsilon(\gamma)}{m(\gamma)} \pi([\gamma]).$$

Из свойства Купки–Смейла вытекает, что для каждого $n \in \mathbb{Z}$ число орбит γ , удовлетворяющих $f_*([\gamma]) = n$, конечно. Таким образом, этот ряд действительно принадлежит $\widehat{\Lambda}_{\mathbb{Q}}$. Несложно показать, что $\eta_L(-v)$ принадлежит кольцу Новикова $\widehat{\Lambda}_{\xi, \mathbb{Q}}$. Заметим также, что $\text{supp } \eta_L(-v) \subset \xi^{-1}([-\infty, -1])$. Поэтому $\text{supp}(\eta_L(-v))^k \subset \xi^{-1}([-\infty, -k])$ и бесконечный ряд

$$\zeta_L(-v) = \exp(\eta_L(-v))$$

корректно определен и снова принадлежит $\widehat{\Lambda}_{\xi, \mathbb{Q}}$. Этот элемент и называется ζ -функцией Лефшеца.

1.6. Формулировка основной теоремы. Пусть M – замкнутое связное многообразие, $f: M \rightarrow S^1$ – морсовское отображение. Мы будем использовать обозначения из п. 1.3. Пусть λ – единица кольца $\Lambda_{(\xi)}$, ее образ в $\overline{K}_1(\Lambda_{(\xi)} \mid G)$ будем обозначать $\bar{\lambda}$. Символом $C_*^{\Delta}(\widetilde{M})$ мы обозначаем комплекс симплициальных цепей пространства $\widetilde{M}$, ассоциированный с гладкой триангуляцией M (так что $C_*^{\Delta}(\widetilde{M})$ – $\mathbb{Z}G$ -комплекс).

ТЕОРЕМА. *Существует подмножество $\mathcal{GKS}\mathfrak{C}(f) \subset \mathcal{GKS}(f)$ со следующими свойствами.*

1. $\mathcal{GKS}\mathfrak{C}(f)$ – открытое и плотное подмножество $\mathcal{GKS}(f)$ в смысле C^0 -топологии.
2. Для каждого $v \in \mathcal{GKS}\mathfrak{C}(f)$ комплекс Новикова $\widetilde{\mathcal{C}}_*(v)$ определен над $\Lambda_{(\xi)}$, и $\zeta_L(-v) \in \Lambda_{(\xi)}$.
3. Для каждого $v \in \mathcal{GKS}\mathfrak{C}(f)$ существует гомотопическая эквивалентность

$$\phi: \widetilde{\mathcal{C}}_*(v) \xrightarrow{\sim} C_*^{\Delta}(\widetilde{M}) \otimes_{\Lambda} \Lambda_{(\xi)}$$

такая, что $\tau(\phi \mid G) = \overline{\zeta_L(-v)}$.

1.7. Замечания и комментарии. Впервые результаты работы появились в электронном препринте [6]. Настоящая работа содержит детальное изложение результатов [6] (за недостатком времени мы не включили результаты [6], касающиеся иррациональных морсовых форм и связи с инвариантами Зайберга–Виттена трехмерных многообразий).

В пп. 2.1–2.3 § 2 мы даем необходимые для дальнейшего определения. В пп. 2.4 и 2.5 дается введение в теорию Морса–Новикова и описание результатов автора, касающихся гипотезы Новикова об экспоненциальном росте ([1], [2]); причем представлены скорее идеи, нежели технические подробности.

Параграф 3 содержит краткий обзор, касающийся технических деталей и результатов работы [2], которые потребуются нам в дальнейшем. Эта часть включена в работу, чтобы сделать ее максимально независимой от других источников (доказательства могут быть найдены, например, в [2]). Содержание § 4 параллельно содержанию § 4 в [2]; условие (C) (п. 4.2) аналогично условию (RP) в § 4 работы [2].

Одним из центральных разделов работы является § 5; основные идеи представлены в его начале.

В § 6 содержатся несложные алгебраические вычисления. Параграф 7 содержит наиболее важные шаги доказательства основной теоремы: в терминах морсовых фильтратий кобордизмов вычисляется простой гомотопический тип комплекса Новикова (введенный в § 5) и связанные с ним инварианты. В § 8 завершается доказательство основной теоремы.

Мы закончим вводную часть замечанием по поводу истоков данной работы. Используя методы работы [2], несложно показать, что ζ -функция Лефшеца для градиента, находящегося в C^0 -общем положении, является рациональной, однако не ясно, как ее вычислить в терминах обычных инвариантов многообразий. Первым примером такого вычисления была формула Хатчингса–Ли ([7; теорема 1.1]). Эта формула дала основания предполагать, что в общем случае должна быть формула, связывающая простой гомотопический тип комплекса Новикова с простым гомотопическим типом многообразия и ζ -функцией градиентного потока.

Автор признателен С. П. Новикову, Б. Л. Вану и В. Г. Тураеву за ценные обсуждения.

Первоначальный вариант настоящего текста был написан по-английски. Перевод на русский язык выполнен А. Алимовым.

§ 2. Теория Морса–Новикова

2.1. Функции Морса и их градиенты: основные понятия. Прежде чем углубляться в детали теории Морса–Новикова и гипотезы Новикова об экспоненциальном росте, мы дадим основные определения из теории Морса, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем.

Пусть v есть C^1 -гладкое векторное поле на многообразии M . Значение интегральной кривой поля v , проходящей через x при $t = 0$, будет обозначаться символом $\gamma(x, t; v)$.

Кобордизмом мы называем компактное многообразие W вместе с представлением $\partial W = \partial_0 W \sqcup \partial_1 W$, где $\partial_1 W$ и $\partial_0 W$ – компактные многообразия без границы, размерности $\dim W - 1$ (оба или одно из них могут быть пустыми). Многообразие $W \setminus \partial W$

будет обозначаться символом W° .

Функцией Морса $f: W \rightarrow [a, b]$ на кобордизме W называется C^∞ -гладкое отображение $f: W \rightarrow \mathbb{R}$ такое, что $f(W) \subset [a, b]$, $f^{-1}(b) = \partial_1 W$, $f^{-1}(a) = \partial_0 W$, все критические точки f являются невырожденными и принадлежат W° .

Множество всех критических точек функции Морса f будет обозначаться символом $S(f)$; а множество всех критических точек индекса k для f – символом $S_k(f)$.

Пусть $f: W \rightarrow \mathbb{R}$ – функция Морса на кобордизме W , $\dim W = n$. Векторное поле v называется *градиентом* функции f или *f -градиентом*, если для каждой критической точки p функции f найдется карта $\phi: U \rightarrow V$, содержащая p , такая, что $\phi_*(v)$ является стандартным векторным полем $(-x_1, \dots, -x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$ на $\mathbb{R}^n$ (где $k = \text{ind } p$) и $f \circ \phi^{-1}$ – квадратичная форма $\sum_i \alpha_i x_i^2$ с $\alpha_i > 0$ при $i > k$ и $\alpha_i < 0$ при $i \leq k$.

Множество всех f -градиентов мы обозначаем $\mathcal{G}(f)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1.

1. Нетрудно проверить, что если в данном определении мы потребуем $\|\alpha_i\| = 1$, то получится эквивалентное определение.
2. Риманов градиент функции f (по отношению к некоторой римановой метрике) не является, вообще говоря, f -градиентом в смысле нашего определения. Можно, однако, расширить определение, чтобы устранить этот недостаток и обобщить соответствующим образом результаты настоящей работы (см. [8]).

Пусть $f: W \rightarrow [a, b]$ есть функция Морса на кобордизме W размерности n , а v есть f -градиент.

Символом K_1 обозначим множество всех $x \in \partial_1 W$ таких, что $(-v)$ -траектория, начинающаяся в x , сходится к критической точке функции f . Аналогично, K_0 обозначает множество всех $x \in \partial_0 W$ таких, что $\gamma(x, t; v)$ сходится к критической точке f . Заметим, что K_0, K_1 компактны. Сдвиг вдоль траекторий $(-v)$ определяет диффеоморфизм $\partial_1 W \setminus K_1 \rightarrow \partial_0 W \setminus K_0$, который мы будем обозначать символом $(-v)^{\sim\sim}$.

Пусть $A \subset K_1$. Вместо символа $(-v)^{\sim\sim}(A \setminus K_1)$ мы будем употреблять для краткости символ $(-v)^{\sim\sim}(A)$.

Пусть $\lambda, \mu, \lambda < \mu$, – регулярные значения f . Положим $W' = f^{-1}([\lambda, \mu])$ и $w = v|_{W'}$. Диффеоморфизм $(-w)^{\sim\sim}$ будет обозначаться $(-v)^{\sim\sim}_{[\mu, \lambda]}$.

Нам потребуется одна стандартная конструкция из теории Морса (см. [9; с. 62]). Пусть $\Psi: \partial_0 W \times [0, l] \rightarrow W$ – отображение, задаваемое формулой $\Psi(x, t) = \gamma(x, t; v)$. Выберем l достаточно малым, так, что Ψ – диффеоморфизм на свой образ. Пусть h – C^∞ -гладкая положительная функция на $[0, l]$, $\text{supp } h \subset]0, l[$. Положим $T = \int_0^l h(\tau) d\tau$. Пусть u – векторное поле на $\partial_0 W$. Определим векторное поле w на $\partial_0 W \times [0, l]$, положив $w(x, t) = h(t)u(x)$. Определим векторное поле w' на W , положив $w' = \Psi_*(w)$ в $\text{Im } \Psi$ и $w' = 0$ в $W \setminus \text{Im } \Psi$. Пусть, далее, $v' = v + w'$. Если h и u достаточно малы, то $\|v - v'\|$ мало, и v' остается f -градиентом. Заметим, что $(-v')^{\sim\sim} = \Phi(-u, T) \circ (-v)^{\sim\sim}$. Мы будем называть эту конструкцию “операцией прибавления горизонтальной компоненты u около $\partial_0 W$ ”.

Скажем, что v удовлетворяет *условию трансверсальности*, если

$$(x, y \in S(f)) \Rightarrow (D(x, v) \cap W^\circ \pitchfork D(y, -v) \cap W^\circ).$$

Скажем, что v удовлетворяет *условию почти-трансверсальности*, если

$$(x, y \in S(f) \& \operatorname{ind} x \leq \operatorname{ind} y) \Rightarrow (D(x, v) \cap W^\circ \pitchfork D(y, -v) \cap W^\circ).$$

Множество всех f -градиентов, удовлетворяющих условию трансверсальности (соответственно, условию почти-трансверсальности), будет обозначаться посредством $\mathcal{G}\mathcal{T}(f)$ (соответственно $\mathcal{G}\mathcal{A}(f)$).

Функция Морса $\phi: W \rightarrow [\alpha, \beta]$ называется *согласованной с (f, v)* , если:

- 1) $S(\phi) = S(f)$ и v — также ϕ -градиент;
- 2) функция $f - \phi$ постоянна в окрестности $\partial_0 W$, в окрестности $\partial_1 W$ и в окрестности каждой точки из $S(f)$.

Мы называем f *упорядоченной* функцией Морса с *упорядочивающей последовательностью* $(a_0, \dots, a_{n+1})$, если $a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n+1} = b$ являются регулярными значениями функции f такими, что $S_i(f) \subset f^{-1}([a_i, a_{i+1}])$.

2.2. Еще о терминологии. Мы придерживаемся соглашения, что структурная группа регулярного накрытия действует на накрытии *справа*. Все рассматриваемые в работе регулярные накрытия будут иметь коммутативную структурную группу (однако существенная часть наших результатов может быть перенесена без проблем и на неабелев случай).

2.3. Морсовские комплексы функций. Прежде чем перейти к изложению теории Морса–Новикова, напомним вкратце классическую конструкцию комплекса Морса. Пусть $g: M \rightarrow \mathbb{R}$ — функция Морса на замкнутом многообразии M . В классической теории Морса [10] доказывается, что $t_p(g) \geq b_p(M)$, где $t_p(g)$ — число критических точек индекса p и $b_p(M)$ — p -е число Бетти многообразия M . Это неравенство можно вывести из существования цепного комплекса C_* свободных абелевых групп такого, что число $\mu(C_p)$ свободных образующих C_p равно $t_p(g)$ и $H_*(C_*) \approx H_*(M)$. Этот комплекс, называемый *комплексом Морса*, был построен позже работы [10]. Его построение есть результат исследований нескольких авторов. Основной шаг был сделан в работах Р. Тома [11] и С. Смейла [12]. В книге Дж. Милнора [9] дается систематическое изложение этого шага. (Фактически, однако, в указанной книге нет определения самого комплекса, но это определение может быть получено из §6 книги.) Позже эта конструкция была рассмотрена Виттеном [13] с принципиально новой точки зрения, включающей когомологии Де Рама.

Вот основная идея конструкции. Выберем g -градиент v , удовлетворяющий условию трансверсальности. Пусть C_s — свободная абелева группа, порожденная критическими точками функции g индекса s . Пусть p, q — критические точки функции g индексов k и $k-1$ соответственно. Так как v удовлетворяет условию трансверсальности, множество $L(p, q)$ всех орбит, соединяющих p с q , конечно. В каждой критической точке g выберем ориентацию устойчивого многообразия (по отношению к векторному полю v). Тогда каждой орбите $\gamma \in L(p, q)$ может быть некоторым естественным образом приписан знак $\varepsilon(\gamma)$. Положим $n(p, q) = \sum_{\gamma \in L(p, q)} \varepsilon(\gamma)$. Граница $\partial_k: C_k \rightarrow C_{k-1}$ определяется формулой $\partial_k p = \sum_q n(p, q) q$ (где q пробегает множество всех критических точек функции g индекса $k-1$).

Оказывается, что $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$ для каждого k и что гомологии комплекса C_* по отношению к ∂_* изоморфны $H_*(M)$ (детали можно найти в [3; приложение]). Этот комплекс называется *комплексом Морса*.

2.4. Краткое введение в теорию Морса–Новикова. В работе [14] С. П. Новиков заложил основы теории Морса для замкнутых 1-форм. Одним из основных понятий в этой теории является понятие *комплекса Новикова*. Здесь мы дадим лишь краткое описание конструкции (подробное изложение дано в [3]).

Рассмотрим морсовское отображение $f: M \rightarrow S^1$. Конструкция из п. 2.3 не может быть перенесена на этот случай, так как для двух критических точек x, y соседних индексов число орбит градиента v , соединяющих x с y , может быть бесконечным. Вот как можно обойти эту трудность: разобьем множество всех орбит, соединяющих x с y , на некоторое семейство непересекающихся конечных подмножеств (перенумерованное индексами некоторого множества I), посчитаем отдельно орбиты в каждом классе и таким образом получим коэффициент инцидентности как функцию $I \rightarrow \mathbb{Z}$. Таким образом, кольцо, над которым определен получающийся комплекс, будет бóльшим, нежели $\mathbb{Z}$. Мы опишем наиболее естественный способ такого разбиения (он введен в [14]); он приводит к основному кольцу $\mathbb{Z}((t))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Кольцо $\mathbb{Z}((t))$ состоит из степенных рядов по t с целыми коэффициентами и конечной отрицательной частью. То есть $\lambda = \sum_{-\infty}^{\infty} a_i t^i$ лежит в $\mathbb{Z}((t))$, если $a_i \in \mathbb{Z}$ для всех i и найдется $N = N(\lambda)$ такое, что $a_i = 0$ при $i < N(\lambda)$.

Мы будем предполагать, что морсовское отображение f не гомотопно нулю. В противном случае v является градиентом обычной вещественнозначной функции Морса и применима конструкция из п. 2.3. Пусть $\mathcal{C}_p(f)$ – свободный $\mathbb{Z}((t))$ -модуль, порожденный критическими точками отображения f индекса p . Рассмотрим бесконечное циклическое накрытие $\mathcal{C}: \overline{M} \rightarrow M$ такое, что $f \circ \mathcal{C}$ гомотопна нулю. Поднимем функцию $f: M \rightarrow S^1$ до функции $F: \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть t – образующая структурной группы накрытия $\mathcal{C}$ такая, что $F(xt) < F(x)$. Выберем градиент $v \in \mathcal{GT}(f)$ и поднимем его в $\overline{M}$ (мы сохраняем для этого поднятия прежнее обозначение v). Как и выше, для каждой критической точки $x \in S(f)$ выберем ориентацию устойчивого многообразия точки x по отношению к v . Более того, для каждой критической точки x отображения $f: M \rightarrow S^1$ выберем поднятие $\tilde{x}$ точки x в $\overline{M}$. Пусть x, y – две критические точки функции f и $\text{ind } x = \text{ind } y + 1$. Несложно показать, что для любого $k \in \mathbb{Z}$ множество всех соединяющих $\tilde{x}$ и $\tilde{y}t^k$ v -орбит конечно. Просуммируем их с соответствующими знаками (как и выше) и получим целое число $n_k(x, y)$. Положим $n(x, y) = \sum_k n_k(x, y)t^k \in \mathbb{Z}((t))$ и $\partial_k x = \sum_y y \cdot n(x, y)$. (Степенные ряды $n(x, y)$ называются *коэффициентами инцидентности Новикова*. Заметим, что $n(x, y)$ и $n_k(x, y)$ зависят от v и иногда мы будем писать $n(x, y; v)$ и, соответственно, $n_k(x, y; v)$, чтобы подчеркнуть эту зависимость.) Заметим, что комплекс Новикова для нас является комплексом *правых модулей* (см. п. 2.2).

Можно показать, что $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$. Итак, мы получили цепной комплекс свободных конечно-порожденных $\mathbb{Z}((t))$ -модулей. Мы обозначим его $\mathcal{C}_*(v)$, чтобы подчеркнуть его зависимость от v , которая существенна для наших дальнейших целей.² (В действительности этот комплекс зависит также и от выбора ориентаций на устойчивых многообразиях критических точек f , и от поднятия критических точек в $\overline{M}$, но влияние этого выбора на результат менее значительно: неопределенность сводится к умножению строк и столбцов матриц граничных операторов ∂_k на некоторые единицы

²Мы выбрали рукописное написание $\mathcal{C}$, чтобы различать комплексы Новикова и Морса.

вида $\pm t^m$ основного кольца. С другой стороны, ясно, что этот комплекс не зависит от конкретного выбора функции f , для которой v является градиентом.) Чтобы описать гомологии комплекса, напомним, что $H_*(\overline{M})$ является $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -модулем, так что тензорное произведение $\hat{H}_*(\overline{M}) = H_*(\overline{M}) \otimes_{\mathbb{Z}[t, t^{-1}]} \mathbb{Z}((t))$ имеет смысл. Можно показать, что $H_*(\mathcal{C}_*(v)) \approx \hat{H}_*(\overline{M})$.

Все упомянутые результаты о комплексе Новикова сформулированы в [14]. Подробные доказательства содержатся в [3].

2.5. Гипотеза Новикова об экспоненциальном росте и оператор гомологического градиентного спуска. Пусть $f: M \rightarrow S^1$ — морсовское отображение, и пусть v есть f -градиент, удовлетворяющий условию трансверсальности. В предыдущем пункте мы видели, что в этом случае определен комплекс Новикова $\mathcal{C}_*(v)$. Он является свободным цепным комплексом над $\mathbb{Z}((t))$ с фиксированным базисом. Следовательно, каждый граничный оператор ∂_k представляется матрицей $D^{(k)}$ с элементами $D_{ij}^{(k)}$ из $\mathbb{Z}((t))$ (ее элементы суть не что иное, как новиковские коэффициенты инцидентности). Каждый элемент $D_{ij}^{(k)}$ является степенным рядом $a(t) = \sum_k a_k t^k$ с конечной отрицательной частью. Гипотеза Новикова об экспоненциальном росте утверждает, что коэффициенты a_k растут не более чем с экспоненциальной скоростью при $k \rightarrow \infty$ (возможно, при некоторых ограничениях на v ; например, типа аналитичности или общности положения). Более подробно об этой гипотезе см. введение к работе [2]. Эта гипотеза была доказана в [2] для произвольного морсовского отображения $f: M \rightarrow S^1$ и множества $\mathcal{GT}_0(f)$ f -градиентов, которое открыто и плотно в смысле C^0 -топологии в $\mathcal{GT}(f)$. Для градиентов, принадлежащих $\mathcal{GT}_0(f)$, новиковские коэффициенты инцидентности являются рядами Тейлора некоторых рациональных функций. Доказательство рациональности коэффициентов инцидентности для $v \in \mathcal{GT}_0(f)$ основано на конструкции, которую мы называем *оператором гомологического градиентного спуска*. Эта конструкция очень важна для настоящей работы, так что остальную часть п. 2.5 мы посвятим объяснению основной идеи этой конструкции. Подробное изложение см. в пп. 3.5, 4.3.

Предположим, что гомотопический класс отображения f в $[M, S^1] \approx H^1(M, \mathbb{Z})$ неделем. Пусть p, q — критические точки функции f , $\text{ind } p = \text{ind } q + 1$. Мы будем рассматривать новиковские коэффициенты инцидентности $n(p, q; v)$. Для удобства обозначений предположим, что $1 \in S^1$ — регулярное значение f , первый критический уровень после $f(q)$ в направлении против часовой стрелки есть $f(p)$ и 1 содержится между $f(q)$ и $f(p)$.

Разрежем M вдоль $f^{-1}(1)$ и получим кобордизм W с двумя частями границы: $\partial_1 W$ и $\partial_0 W$. Имеется диффеоморфизм отождествления $\Phi: \partial_0 W \rightarrow \partial_1 W$. Имеется также функция Морса $f_0: W \rightarrow [0, 1]$ и ее градиент, который будет обозначаться той же буквой v . Заметим, что p — низшая критическая точка f_0 , а q — наивысшая. Нисходящий диск точки p пересекает $\partial_0 W$ по вложенной сфере $S(p)$. Восходящий диск точки q пересекает $\partial_1 W$ по вложенной сфере $S(q)$. Тогда новиковский коэффициент инцидентности $n_k = n_k(p, q; v)$ — это алгебраический индекс пересечения $((-v)^{\rightsquigarrow} \circ \Phi)^k(S(p))$ с $\Phi^{-1}(S(q))$.³ Положим $\phi = (-v)^{\rightsquigarrow} \circ \Phi$. Если бы ϕ был везде определенным диффеоморфизмом, тогда, обозначая классы гомологий $S(p)$ и $\Phi^{-1}(S(q))$ через $[p]$ и $[q]$

³См. с. 122 по поводу определения $(-v)^{\rightsquigarrow}$.

соответственно, мы бы получили формулу

$$(1) \quad n_k(p, q; v) = (\phi_*)^k([p]) \# [q]$$

(где $\#$ обозначает алгебраический индекс пересечения классов гомологий; мы предполагаем здесь, что $\partial_0 W$ ориентировано, хотя в действительности ориентируемость не существенна). В этом случае рациональность степенного ряда $\sum_k n_k t^k$ была бы простым утверждением из линейной алгебры. Для полноты картины приведем здесь это рассуждение. Пусть L – свободная конечно-порожденная абелева группа, $A: L \rightarrow L$ – гомоморфизм. отождествим A с его матрицей. Тогда степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} A^k t^k$ представляет матрицу $(1 - At)^{-1}$. Из этого легко вывести, что

для каждого $x \in L$ и каждого $\xi \in \text{Hom}(L, \mathbb{Z})$ степенной ряд

$$(2) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \xi(A^k x) t^k \text{ является рациональной функцией со знаменателем } 1 - t \det A.$$

Кстати, аналогичными рассуждениями доказывается, что гомологическая ζ -функция диффеоморфизма всегда рациональна (см. [15; с. 767–768]). К сожалению, ϕ не везде определена (подолы восходящих дисков в точности составляют множество, где ϕ не определена).⁴ Итерации ϕ только накапливают эту неопределенность. Однако, в случае общего положения возможно построить некоторые объекты, которые можно подставить вместо $[p]$, $[q]$ и ϕ_* в формулу (1).

В этом месте я считаю уместным предостеречь читателя, что вплоть до конца § 2 изложение материала будет очень неформальным. Предлагаемый вниманию читателя текст можно рассматривать как *программу*, реализацией которой является работа [2]. Тем не менее я думаю, что понимание последующего абзаца весьма полезно для понимания [2] и настоящей статьи.

Начнем с “хорошего” клеточного разбиения $\partial_1 W$. От “хорошего” разбиения мы потребуем, в частности, чтобы каждая клетка e была представлена C^∞ -гладким вложением $\rho: D^k \rightarrow \partial_1 W$ (где k – размерность клетки). Естественно ожидать, что такое разбиение можно построить исходя из стратификации многообразия $\partial_1 W$ устойчивыми многообразиями градиента некоторой функции Морса. Применив диффеоморфизм Φ^{-1} , перенесем это разбиение на $\partial_0 W$. Отображение $(-v)^{\rightsquigarrow}$ из $\partial_1 W$ в $\partial_0 W$ не является непрерывным, но, тем не менее, можно попытаться так изменить v посредством малого возмущения, чтобы отображение $(-w)^{\rightsquigarrow}$, соответствующее новому градиенту w , сохраняло клеточную структуру. Чтобы объяснить, почему это должно получаться, рассмотрим критическую точку p функции f ; пусть $\text{ind } p = k$. Положим $S_-(p, v) = D(p, v) \cap \partial_0 W$, $S_+(p, v) = D(p, -v) \cap \partial_1 W$. Изменяя в случае надобности v посредством малого возмущения, можно предполагать, что все многообразия $S_+(p, v)$ трансверсальны ко всем клеткам разбиения $\partial_1 W$. В частности, клетки $\partial_1 W$ размерности k будут пересекаться только с многообразиями $S_+(p, v)$, соответствующими критическим точкам p индекса не более k . Пусть e – клетка $\partial_1 W$ размерности k .

⁴В [16] Новиков пишет: “В нашем случае мы имеем не отображение, а кобордизм с двумя равными границами, порождающий $\mathbb{Z}$ -покрытие над компактным многообразием”.

Та часть e , где $(-v)^{\sim\sim}$ не определено, является объединением множеств $S_+(p, v) \cap e$, где p пробегает все критические точки f индекса $\leq k$. Геометрическая картина поведения нисходящих траекторий такова. Градиентный спуск стягивает множество $S_+(p, v) \cap e$ вниз к точке p (за бесконечное время). Если мы попытаемся опуститься еще ниже к $\partial_0 W$, то получим отображение, многозначное в том смысле, что каждой точке множества $S_+(p, v) \cap e$ соответствует множество $S_-(p, v)$. Заметим, однако, что $\dim S_-(p, v) \leq k - 1$. Предположим теперь, что для любого s все множества $S_-(p, v)$ при $\text{ind } p \leq s + 1$ содержатся в s -остове $\partial_0 W^{[s]}$ (что правдоподобно ввиду процедуры клеточной аппроксимации). В этом случае наше “отображение” $(-v)^{\sim\sim}$ определит непрерывное отображение

$$W_k: C_k^{(1)} = \partial_1 W^{[k]} / \partial_1 W^{[k-1]} \rightarrow C_k^{(0)} = \partial_0 W^{[k]} / \partial_0 W^{[k-1]},$$

а также отображение $C_k^{(0)}$ в себя, поскольку Φ отождествляет $\partial_0 W$ с $\partial_1 W$. Конечно, пространство $C_k^{(1)}$ является букетом k -мерных сфер. Обозначим его гомологии H_k ; это свободная абелева группа, и отображение W_k индуцирует ее эндоморфизм. Пусть r, q – критические точки f , соответственно, индексов $k + 1, k$. С помощью тех же рассуждений, что и выше, можно показать, что многообразие $S_-(r, v)$ определяет цикл пары $(\partial_0 W^{[k]}, \partial_0 W^{[k-1]})$, т.е. элемент $[r] \in H_k(\partial_0 W^{[k]}, \partial_0 W^{[k-1]})$. Индекс пересечения со сферой $S_-(q, v)$ определяет гомоморфизм $\lambda(q): H_k \rightarrow \mathbb{Z}$, и мы получаем: $n_k(r, q; v) = \lambda(q)(\xi^k([r]))$. Теперь достаточно применить утверждение (2), и мы видим, что новиковский коэффициент инцидентности $n(r, q; v)$ является рациональной функцией.

Теперь я сделаю два замечания об изложенной программе.

- 1) Возмущения векторного поля v , о которых говорилось выше, могут быть выбраны C^0 -малыми, но, вообще говоря, не C^∞ -малыми.
- 2) Мы сознательно упростили изложение, работая с клеточными разбиениями многообразий $\partial_1 W$ и $\partial_0 W$. На самом деле это не приводит к цели; вместо клеточных разбиений нужно рассматривать разложения на ручки этих многообразий (множества $D_\delta(\text{ind} \leq k; v)$ в обозначениях работы [2]).

§ 3. Краткий обзор результатов работы [2]

Ниже мы будем использовать технику и результаты из [2], поэтому в этом параграфе мы приводим некоторые основные идеи и результаты работы [2].

3.1. δ -тонкие разложения на ручки. В этом пункте W – риманов кобордизм размерности n , $f: W \rightarrow [a, b]$ – функция Морса на W и v – f -градиент.

Пусть $x \in W$ и $\delta > 0$. Предположим, что для некоторого $\delta_0 > \delta$ ограничение экспоненциального отображения $\exp_q: T_q W \rightarrow W$ на диск $B^n(0, \delta_0)$ есть диффеоморфизм на свой образ. Пусть $B_\delta(p)$ (соответственно, $D_\delta(p)$) обозначает риманов открытый шар (соответственно, замкнутый шар) радиуса δ с центром p . Мы будем использовать обозначения $B_\delta(p)$, $D_\delta(p)$ только в случае, если δ удовлетворяет вышеуказанным ограничениям.

Положим

$$\begin{aligned} B_\delta(p, v) &= \{x \in W \mid \exists t \geq 0: \gamma(x, t; v) \subset B_\delta(p)\}, \\ D_\delta(p, v) &= \{x \in W \mid \exists t \geq 0: \gamma(x, t; v) \subset D_\delta(p)\}, \\ D(p, v) &= \left\{x \in W \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(x, t; v) = p\right\}. \end{aligned}$$

Обозначим символом $D(\text{ind} \leq s; v)$ объединение множеств $D(p, v)$, где p пробегает критические точки f индекса $\leq s$. Символом $B_\delta(\text{ind} \leq s; v)$ и $D_\delta(\text{ind} \leq s; v)$ обозначим объединение множеств $B_\delta(p, v)$ и, соответственно, множеств $D_\delta(p, v)$, где p пробегает критические точки f индекса $\leq s$. Обозначения $D_\delta(\text{ind} = s; v)$ или $B_\delta(\text{ind} \geq s; v)$ ясны теперь без дополнительных объяснений. Объединение всех $D(p, v)$ обозначается символом $D(v)$, объединение всех $D_\delta(p, v)$ – символом $D_\delta(v)$. Примем также следующее соглашение: $D_0(p, v) = D(p, v)$, $D_0(v) = D(v)$ и т. д.

Пусть $\phi: W \rightarrow [a, b]$ – упорядоченная функция Морса с упорядочивающей последовательностью $(a_0 < a_1 < \dots < a_{n+1})$. Пусть w есть ϕ -градиент. Положим $W_i = \phi^{-1}([a_i, a_{i+1}])$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Скажем, что v является δ -разделенным по отношению к ϕ (и упорядочивающей последовательности $(a_0, \dots, a_{n+1})$), если

- i) для каждого i и каждого $p \in S_i(f)$ имеем $D_\delta(p) \subset W_i^\circ$;
- ii) для каждого i и каждого $p \in S_i(f)$ найдется функция Морса $\psi: W_i \rightarrow [a_i, a_{i+1}]$, согласованная с $(\phi|_{W_i}, w)$, и регулярное значение λ функции ψ такие, что

$$D_\delta(p) \subset \psi^{-1}([a_i, \lambda])$$

и для каждого $q \in S_i(f)$, $q \neq p$, имеем

$$D_\delta(q) \subset \psi^{-1}([\lambda, a_{i+1}]).$$

Мы говорим, что v является δ -разделенным, если он δ -разделен по отношению к некоторой упорядоченной функции Морса $\phi: W \rightarrow [a, b]$, согласованной с (f, v) .

Ясно, что каждый f -градиент, удовлетворяющий условию почти-трансверсальности, является δ -разделенным при некотором $\delta > 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть v есть δ_0 -разделенный f -градиент. Тогда $\forall \delta \in [0, \delta_0]$ и $\forall s$, $0 \leq s \leq n$:

- 1. $D_\delta(\text{ind} \leq s; v)$ компактно;
- 2. $\bigcap_{\theta > \delta} B_\theta(\text{ind} \leq s; v) = D_\delta(\text{ind} \leq s; v)$;
- 3. если $\delta > 0$, то $\overline{B_\delta(\text{ind} \leq s; v)} = D_\delta(\text{ind} \leq s; v)$.

Итак, набор нисходящих дисков $D(p, v)$ образует стратифицированное многообразие, а δ -утолщенные нисходящие диски $B_\delta(v)$ – окрестность этого многообразия. В предыдущем утверждении мы перечислили некоторые естественные свойства этих объектов. Для того чтобы изучить подробнее эти свойства, мы введем в следующем пункте новые понятия: s -подмногообразие и ts -подмногообразие.

3.2. s -подмногообразия и ts -подмногообразия. Пусть $\mathbb{A} = \{A_0, \dots, A_k\}$ – конечная последовательность подмножеств топологического пространства X . Положим $\mathbb{A}_{(\leq s)} = A_0 \cup \dots \cup A_s$, $\mathbb{A}_{(s)} = A_s$. Будем говорить, что $\mathbb{A}$ – компактное семейство, если $\mathbb{A}_{(\leq s)}$ компактно для каждого s .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Пусть M – многообразие без края. Конечная последовательность $\mathbb{X} = \{X_0, \dots, X_k\}$ подмножеств M называется s -подмногообразием многообразия M , если

1. каждое X_i является подмногообразием многообразия M размерности i с тривиальным нормальным расслоением;
2. $\mathbb{X}$ является компактным семейством;
3. для $i \neq j$ выполнено $X_i \cap X_j = \emptyset$.

Пусть $\Phi: M \rightarrow N$ – диффеоморфизм и $\mathbb{X}$ – s -подмногообразие в M . Символом $\Phi(\mathbb{X})$ мы обозначаем s -подмногообразие N , определенное формулой $\Phi(\mathbb{X})_{(i)} = \Phi(\mathbb{X}_{(i)})$.

Пусть $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ – два s -подмногообразия M . Мы говорим, что $\mathbb{X}$ *трансверсально* κ $\mathbb{Y}$ (пишем: $\mathbb{X} \pitchfork \mathbb{Y}$), если $\mathbb{X}_{(i)} \pitchfork \mathbb{Y}_{(j)}$ для всех i, j ; мы говорим, что $\mathbb{X}$ *почти трансверсально* κ $\mathbb{Y}$ (пишем: $\mathbb{X} \dagger \mathbb{Y}$), если $\mathbb{X}_{(i)} \pitchfork \mathbb{Y}_{(j)}$ для $i + j < \dim M$. Заметим, что условие $\mathbb{X} \dagger \mathbb{Y}$ эквивалентно следующему: $\mathbb{X}_{(\leq i)} \cap \mathbb{Y}_{(\leq j)} = \emptyset$ при $i + j < \dim M$.

Для s -подмногообразий выполнено следующее утверждение, являющееся аналогом теоремы Тома о трансверсальности: если $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ – s -подмногообразия M , то найдется достаточно малая изотопия Φ_t многообразия M такая, что $\Phi_1(\mathbb{X}) \dagger \mathbb{Y}$ (см. [2; теорема 2.3]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Пусть X – топологическое пространство, $\mathbb{A} = \{A_0, \dots, A_k\}$ – компактное семейство подмножеств X , I – открытый интервал $]0, \delta_0[$. *Хорошей фундаментальной системой окрестностей* семейства $\mathbb{A}$ (сокращение: *gfn-системой* для $\mathbb{A}$) называется семейство $\mathbf{A} = \{A_s(\delta)\}_{\delta \in I, 0 \leq s \leq k}$ открытых подмножеств X , удовлетворяющее следующим условиям:

1. $A_s \subset A_s(\delta_1) \subset A_s(\delta_2)$ для произвольных s и для $\delta_1 < \delta_2$;
2. $A_{\leq j}(\delta) = \bigcap_{\theta > \delta} (A_{\leq j}(\theta))$ для произвольных δ и j ;
3. $A_{(\leq j)} = \bigcap_{\theta > 0} (\mathbf{A}_{(\leq j)}(\theta))$ для произвольного j .

I называется *интервалом определения* системы. $\mathbb{A}$ называется *ядром* $\mathbf{A}$, и $\mathbf{A}$ называется *утолщением* $\mathbb{A}$. Мы будем обозначать $A_s(\delta)$ также символом $\mathbf{A}_{(s)}(\delta)$ и $A_{\leq i}(\delta)$ – символом $\mathbf{A}_{(\leq i)}(\delta)$. Иногда мы будем писать $\mathbf{A}_s(0)$ вместо A_s .

Мы выбрали название “хорошая фундаментальная система” по следующей причине: если X компактно, то для произвольных $\delta \geq 0$ и s семейство $\{A_{\leq s}(\theta)\}_{\theta > \delta}$ является фундаментальной системой окрестностей $\mathbf{A}_{(\leq s)}(\delta)$ (это легко следует из условий 1–3).

Если M – многообразие без края, $\mathbb{X}$ – s -подмногообразие M и $\mathbf{X}$ – *gfn-система* для $\mathbb{X}$, то $\mathbf{X}$ называется *ts-подмногообразием с ядром* $\mathbb{X}$. Также мы говорим, что $\mathbf{X}$ является *утолщением* $\mathbb{X}$. Пусть $\mathbf{X} = \{X_s(\delta)\}_{\delta \in I, 0 \leq s \leq k}$ – *ts-подмногообразие*. Мы будем обозначать $X_i(\delta)$ символом $\mathbf{X}_{(i)}(\delta)$ и $X_{\leq i}(\delta)$ – символом $\mathbf{X}_{(\leq i)}(\delta)$.

Приведем важный пример *gfn-системы*. Пусть $f: W \rightarrow [a, b]$ – функция Морса на кобордизме W , и пусть v – f -градиент. Предположим, что v является ε -разделенным. Тогда семейство $\{B_\delta(\text{ind}=s; v)\}_{\delta \in]0, \epsilon[, 0 \leq s \leq n}$ является *gfn-системой* для $\mathbb{D}(v)$. Если W – замкнутое многообразие, то это семейство является *ts-подмногообразием с ядром* $\mathbb{D}(v)$. Эта *gfn-система* будет обозначаться $\mathbf{D}(v)$. (Если $\partial W \neq \emptyset$, то $\mathbb{D}(v)$ – семейство многообразий с краем, но ни использовать, ни формулировать соответствующее обобщение понятия *ts-подмногообразия* мы не будем.)

Пусть $f: W \rightarrow [a, b]$ – функция Морса на кобордизме W и v – f -градиент. Пусть $X \subset \partial_1 W$. Множество $T(X, v)$, образованное всеми $(-v)$ -траекториями, начинающимися в X , будет называться *следом* X . Множество $T(X, v)$ не обязано быть компактным, даже если X компактно. Однако можно показать, что если X компактно, то $T(X, v) \cup D_\delta(v)$ компактно при каждом δ (см. [2; лемма 2.7]).

Теперь мы определим понятие следа для s -подмногообразий. Пусть $\mathbb{A}$ есть s -подмногообразие в $\partial_1 W$. Компонента размерности k семейства $\mathbb{T}(\mathbb{A}, v)$ должна состоять из следа $\mathbb{T}(A_{k-1}, v)$ и нисходящих дисков $D(p, v)$ критических точек p с $\text{ind } p \leq k$.

Перейдем к точным определениям. С этого места и до конца параграфа мы предполагаем, что v удовлетворяет условию почти-трансверсальности и что $\mathbb{A} \nmid \mathbb{D}_b(-v)$. (Условие $\mathbb{A} \nmid \mathbb{D}_b(-v)$ не очень ограничительно, поскольку для данных $\mathbb{A}$ и v всегда можно выбрать C^∞ -малое возмущение v такое, что это условие будет выполнено, см. [2; лемма 4.2].)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.5. Положим $TA_i(v) = T(A_{i-1}, v) \cup D(\text{ind}=i; v)$ ($A_{-1} = \emptyset$ по определению). Символом $\mathbb{T}(\mathbb{A}, v)$ обозначим семейство $\{TA_i(v)\}_{0 \leq i \leq k+1}$ подмножеств W и символом $(-v)_{[b, \lambda]}^{\rightsquigarrow}(\mathbb{A})$ – семейство $\{TA_{i+1}(v) \cap f^{-1}(\lambda)\}_{0 \leq i \leq k}$ подмножеств $f^{-1}(\lambda)$. Если значения b, λ ясны из контекста, то мы будем писать $(-v)^{\rightsquigarrow}(\mathbb{A})$ вместо $(-v)_{[b, \lambda]}^{\rightsquigarrow}(\mathbb{A})$. Семейство $\mathbb{T}(\mathbb{A}, v)$ будет называться *следом* $\mathbb{A}$, а семейство $(-v)_{[b, \lambda]}^{\rightsquigarrow}(\mathbb{A})$ – $(-v)^{\rightsquigarrow}$ -образом $\mathbb{A}$.

Можно показать, что $\mathbb{T}(\mathbb{A}, v)$ и $(-v)_{[b, \lambda]}^{\rightsquigarrow}(\mathbb{A})$ являются компактными семействами. Далее, если λ – регулярное значение f , то $(-v)_{[b, \lambda]}^{\rightsquigarrow}(\mathbb{A})$ есть s -подмногообразие $f^{-1}(\lambda)$ (см. [2; лемма 2.9]).

Теперь мы можем определить понятие следа для ts -подмногообразий. Пусть $\mathbf{A}$ – ts -подмногообразие $\partial_0 W$ с ядром $\mathbb{A}$. Нижеследующие определение и предложение позволяют ввести gfn -систему с ядром $\mathbb{T}(\mathbb{A}, v)$, которая и будет называться *следом* $\mathbf{A}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.6. Пусть $\mathbf{A} = \{A_s(\delta)\}_{\delta \in]0, \delta_0[, 0 \leq s \leq k}$ – ts -подмногообразие $\partial_1 W$ с ядром $\mathbb{A}$. Предположим, что v – δ_1 -разделен. Для $0 < \delta < \min(\delta_0, \delta_1)$ положим $TA_s(\delta, v) = T(A_{s-1}(\delta), v) \cup B_\delta(\text{ind}=s; v)$ ($A_{-1}(\delta) = \emptyset$ по определению).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.7 ([2; предложение 2.12]). *Существует $\epsilon \in]0, \min(\delta_0, \delta_1)[$ такое, что $\{TA_s(\delta, v)\}_{\delta \in]0, \epsilon[, 0 \leq s \leq k+1}$ является gfn -системой для $\mathbb{T}(\mathbb{A}, v)$.*

gfn -система, введенная в предложении 3.7, будет обозначаться $\mathbf{T}(\mathbf{A}, v)$ и называться следом $\mathbf{A}$.

3.3. Быстрые потоки. Пусть M – замкнутое многообразие размерности m , f – функция Морса на M и v – f -градиент, удовлетворяющий условию почти-трансверсальности. Пусть k – целое число, U – открытая окрестность множества $D(\text{ind} \leq k; -v)$ и V – открытая окрестность множества $D(\text{ind} \leq m-k-1; v)$. Ясно, что порожденный полем v поток Φ_t снесет $M \setminus V$ на U через достаточно большое время. (А именно, обозначим диффеоморфизм $t \mapsto \gamma(x, t; v)$ многообразия M посредством $\Phi(v, t)$. Тогда для достаточно большого T мы имеем: $\Phi(v, T)(M \setminus V) \subset U$.) Если поток Φ_t выполняет эту операцию за малое время и, более того, если v имеет малую норму, то мы говорим, что Φ_t *быстрый*. Ниже дано точное определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.8. Пусть v — f -градиент, удовлетворяющий условию почти-трансверсальности, и пусть $\epsilon > 0$, $t \geq 0$. Мы говорим, что поток, порожденный векторным полем v , является (t, ϵ) -быстрым, если для каждого s , $0 \leq s \leq t$, выполнено:

$$(3) \quad \Phi(v, t)(M \setminus B_\epsilon(\text{ind} \leq s; v)) \subset B_\epsilon(\text{ind} \leq t-1-s; -v),$$

$$(4) \quad \Phi(-v, t)(M \setminus B_\epsilon(\text{ind} \leq s; -v)) \subset B_\epsilon(\text{ind} \leq t-1-s; v).$$

(Для краткости мы иногда будем говорить, что сам градиент v является (t, ϵ) -быстрым.)

Несложно проверить, что каждый поток v , удовлетворяющий условию почти-трансверсальности, является (t, ϵ) -быстрым при *некоторых* t, ϵ .

Замечание о терминологии. Определение быстрого потока, принятое в настоящей работе, отличается от определения быстрого потока из работы [2]: это разные понятия! Мы не будем использовать в настоящей работе понятие быстрого потока в смысле [2], так что не может возникнуть никаких недоразумений. Термин “быстрый поток” в смысле определения 3.8 мы переводим на английский язык термином “rapid flow”, а термин “быстрый поток” в смысле работы [2] — термином “quick flow”. С быстрыми потоками в смысле настоящей работы удобнее работать, но теорему об их существовании удобней доказывать, используя быстрые потоки в смысле [2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.9. Пусть $f: W \rightarrow [a, b]$ — функция Морса на кобордизме, и пусть u, v — f -градиенты. Мы говорим, что u и v эквивалентны, если $u(x) = \phi(x)v(x)$, где $\phi: W \rightarrow \mathbb{R} - C^\infty$ -гладкая функция такая, что $\phi(x) > 0$ для всех x и $\phi(x) = 1$ для x из окрестности множества $S(f)$.

ТЕОРЕМА 3.10. Пусть M — замкнутое риманово многообразие и пусть $C > 0$, $t > 0$.

Существуют функция Морса $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ и f -градиент v , удовлетворяющий условию почти-трансверсальности, такие, что для каждого $\epsilon > 0$ найдется (t, ϵ) -быстрый f -градиент u , эквивалентный v и удовлетворяющий $\|u\| \leq C$.

Эта теорема была доказана в [2; следствие 1.14].

3.4. Условие (RP). В этом пункте W — риманов кобордизм, $f: W \rightarrow [a, b]$ — функция Морса, v — f -градиент, удовлетворяющий условию почти-трансверсальности, $n = \dim W$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.11. Мы говорим, что v имеет R -пару (или, эквивалентно, что v удовлетворяет условию (RP)), если найдутся функции $\phi_0: \partial_0 W \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi_1: \partial_1 W \rightarrow \mathbb{R}$, и их градиенты u_0 и, соответственно, u_1 , удовлетворяющие условию почти-трансверсальности, и число $\delta > 0$ такие, что для каждого s выполняется следующее условие:

$$(RP1) \quad \delta - \text{интервал определения семейств } \mathbf{T}(\mathbf{D}(u_1), v) \text{ и } \mathbf{T}(\mathbf{D}(-u_0), -v),$$

$$(RP2) \quad \text{градиенты } v, u_0 \text{ и } u_1 \text{ являются } \delta\text{-разделенными,}$$

$$(RP3) \quad \overline{\mathbf{T}(\mathbf{D}(u_1), v)_{(\leq s+1)}(\delta)} \cap \partial_0 W \subset \mathbf{D}(u_0)_{(\leq s)}(\delta),$$

$$(RP4) \quad \overline{\mathbf{T}(\mathbf{D}(-u_0), -v)_{(\leq s+1)}(\delta)} \cap \partial_1 W \subset \mathbf{D}(-u_1)_{(\leq s)}(\delta).$$

Множество f -градиентов v , удовлетворяющих (RP), будет обозначаться символом $\mathcal{GRP}(f)$.

ТЕОРЕМА 3.12. *Множество $\mathcal{GRP}(f)$ является C^0 -плотным в $\mathcal{G}(f)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v \in \mathcal{GA}(f)$, и пусть $\phi_1: \partial_1 W \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi_0: \partial_0 W \rightarrow \mathbb{R}$ – функции Морса, u_1, u_0 – их градиенты, удовлетворяющие условию почти-трансверсальности. План доказательства состоит в следующем. Чтобы получить f -градиент $w \in \mathcal{GRP}(f)$, мы изменим v , добавив горизонтальные компоненты: ξ_1 около $\partial_1 W$ и ξ_0 около $\partial_0 W$. Сначала мы проведем это построение, не налагая никаких условий на u_1, u_0 , и получим новый f -градиент w , удовлетворяющий (RP). Далее мы покажем, как выбрать u_1, u_0 , чтобы w был C^0 -близок к v .

Перейдем к доказательству. При необходимости возмущая v , можно предположить, что $(-v)^{\rightsquigarrow}(\mathbb{D}(u_1))$ почти трансверсален к $\mathbb{D}(-u_0)$, т.е. $(-v)^{\rightsquigarrow}(\mathbb{D}_{(\leq k)}(u_1))$ не пересекает $\mathbb{D}_{(\leq m)}(-u_0)$, если $k + m < n - 1$. Поэтому для достаточно малого δ выполнено

$$(-v)^{\rightsquigarrow}(D_\delta(\text{ind} \leq k; u_1)) \cap D_\delta(\text{ind} \leq m; -u_0) = \emptyset, \quad \text{если } k + m < n - 1,$$

(это вытекает из свойств gfn -систем).

Для краткости обозначений положим

$$\begin{aligned} A_k^-(\delta) &= D_\delta(\text{ind} \leq k; u_1), & A_k^+(\delta) &= D_\delta(\text{ind} \leq k; -u_1), \\ B_k^-(\delta) &= D_\delta(\text{ind} \leq k; u_0), & B_k^+(\delta) &= D_\delta(\text{ind} \leq k; -u_0). \end{aligned}$$

(Итак, $A_k^-(\delta)$ – “ δ -утолщение k -остова $\partial_1 W$ ”, и $A_k^+(\delta)$ – “ δ -утолщение k -остова дуального клеточного разбиения $\partial_1 W$ ”. Аналогичным образом можно интерпретировать и множества $B_k(\delta)^\pm$.)

Пусть ξ_0 – ϕ_0 -градиент, эквивалентный u_0 , и пусть ξ_1 – ϕ_1 -градиент, эквивалентный u_1 . При достаточно большом $T > 0$ и произвольном k имеем:

$$(5) \quad \Phi(\pm \xi_0, T)(\partial_0 W \setminus B_k^\mp(\delta)) \subset B_{n-k-2}^\pm(\delta),$$

$$(6) \quad \Phi(\pm \xi_1, T)(\partial_1 W \setminus A_k^\mp(\delta)) \subset A_{n-2-k}^\pm(\delta).$$

Положим $\Phi_0 = \Phi(\xi_0, T)$, $\Phi_1 = \Phi(\xi_1, T)$ и добавим к v две горизонтальные компоненты: ξ_0 около $\partial_0 W$ и ξ_1 около $\partial_1 W$ (см. п. 2.1). Если мы выберем вспомогательную функцию h , удовлетворяющую $\int_0^l h(\tau) d\tau = T$, то тогда для результирующего векторного поля v' получим:

$$(7) \quad (-v')^{\rightsquigarrow} = \Phi_0 \circ (-v)^{\rightsquigarrow} \circ \Phi_1^{-1}.$$

Теперь ясно, что для v' выполнены условия (RP3) и (RP4). В самом деле, множество $A_m^-(\delta)$ переводится в себя отображением Φ_1^{-1} , результат переводится в $\partial_0 W \setminus B_{n-2-m}^+(\delta)$ посредством $(-v)^{\rightsquigarrow}$, и Φ_0 переводит $\partial_0 W \setminus B_{n-2-m}^+(\delta)$ в $B_m^-(\delta)$. Это доказывает (RP3); условие (RP4) доказывается аналогично. (Конечно, нужно выбирать δ достаточно малым, чтобы удовлетворить (RP1) и (RP2). Нужно также позаботиться о том, чтобы v' был f -градиентом. Детали см. в [2; § 4].) Теперь мы объясним, как сделать норму $\|v' - v\|$ малой. Если мы выберем u_0, u_1 так, чтобы удовлетворить

заключениям теоремы о быстрых потоках, мы получим векторные поля ξ_0, ξ_1 с малой нормой, для которых свойства (5), (6) уже выполнены для достаточно малого T . Следовательно, измененное векторное поле v' будет C^0 -близко к v .

3.5. R -системы и гомологический градиентный спуск (первый вариант). Как мы уже отмечали, отображение $(-v)^\sim$ определено не везде. Тем не менее, иногда возможно определить аналог “гомоморфизма, индуцированного $(-v)^\sim$ в гомологиях”. Более точно, в некоторых случаях (например, когда v удовлетворяет (RP)) можно определить гомоморфизм $H(v): H_*(\partial_1 W \setminus B_1, A_1) \rightarrow H_*(\partial_0 W \setminus B_0, A_0)$, где A_i, B_i – некоторые непересекающиеся подмножества $\partial_i W$. Построение такого гомоморфизма $H(v)$ осуществлено в [2; § 4]. Сейчас мы вкратце опишем его. При этом мы хотели бы подчеркнуть, что этот гомоморфизм *не* индуцирован непрерывным отображением пар.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.13. Пусть $\Lambda = \{\lambda_0, \dots, \lambda_k\}$ – конечное множество регулярных значений f такое, что $\lambda_0 = a, \lambda_k = b$, для каждого i мы имеем $\lambda_i < \lambda_{i+1}$ и на отрезке $[\lambda_i, \lambda_{i+1}]$ есть в точности одно критическое значение f . Значения λ_i, λ_{i+1} называются *смежными*. Множество пар $\{(A_\lambda, B_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ называется *R -системой для (f, v)* , если выполнены следующие условия.

- (RS1) Для каждого $\lambda \in \Lambda$ множества A_λ и B_λ суть непересекающиеся компактные подмножества в $f^{-1}(\lambda)$.
- (RS2) Пусть $\lambda, \mu \in \Lambda$ – смежные. Тогда для каждого $p \in S(f) \cap f^{-1}([\lambda, \mu])$ выполнено или
 - i) $D(p, v) \cap f^{-1}(\lambda) \subset \text{Int } A_\lambda$,
 - или
 - ii) $D(p, -v) \cap f^{-1}(\mu) \subset \text{Int } B_\mu$.
- (RS3) Пусть $\lambda, \mu \in \Lambda$ – смежные. Тогда $(-v)_{[\mu, \lambda]}^\sim(A_\mu) \subset \text{Int } A_\lambda$ и $v_{[\lambda, \mu]}^\sim(B_\lambda) \subset \text{Int } B_\mu$.

R -системы обладают следующими свойствами (см. [2; § 4.3]).

- (1) Если $\{(A_\lambda, B_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ – R -система для (f, v) , то для каждого f -градиента w , достаточно C^0 -близкого к v , $\{(A_\lambda, B_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ является R -системой для (f, w) .
- (2) Пусть N – подмногообразие $\partial_1 W \setminus B_b$ такое, что $N \setminus \text{Int } A_b$ компактно. Тогда $N' = v_{[b, a]}^\sim(N)$ – подмногообразие $\partial_0 W \setminus B_a$ такое, что $N' \setminus \text{Int } A_a$ компактно.
- (3) Существует гомоморфизм $H(v): H_*(\partial_1 W \setminus B_b, A_b) \rightarrow H_*(\partial_0 W \setminus B_a, A_a)$ такой, что
 - (а) если N – ориентированное подмногообразие $\partial_1 W$, удовлетворяющее условию из п. (2), то $H(v)([N]) = [v_{[b, a]}^\sim(N)]$;
 - (б) существует $\epsilon > 0$ такое, что для каждого f -градиента w , удовлетворяющего $\|w - v\| < \epsilon$, выполнено $H(v) = H(w)$.

Здесь мы объясним основную идею конструкции $H(v)$ в следующем простом случае: мы предположим, что f обладает единственной критической точкой p и $D(p, v) \cap \partial_0 W \subset \text{Int } A_a$. Более того, мы предположим, что $B_a = \emptyset, B_b = \emptyset$. Пусть U – достаточно малая компактная окрестность $D(p, -v) \cap \partial_1 W$ такая, что $(-v)^\sim(U) \subset \text{Int } A_a$. Пусть $x \in H_*(\partial_1 W \setminus B_b, A_b)$. Рассмотрим образ элемента x в группе $H_*(\partial_1 W, A_1)$. Приведя его по модулю $A_b \cup U$, получим элемент $x' \in H_*(\partial_1 W, A_b \cup U)$. С помощью аксиомы вырезания получим элемент $\bar{x} \in H_*(\partial_1 W \setminus D(p, -v), A_b \cup U \setminus D(p, -v))$.

Любая сингулярная цепь, представляющая $\bar{x}$, лежит в области определения $(-v)^{\sim\sim}$. Применим $(-v)^{\sim\sim}_*$ и получим элемент в $H_*(\partial_0 W, A_0)$, который, по определению, и есть $H(v)(x)$. (В приведенном выше определении читателю будет нетрудно узнать основную идею конструкции гомологического градиентного спуска, см. п. 2.5.)

§ 4. Условие $(\mathfrak{C})$ и оператор гомологического градиентного спуска

Нам потребуется еще несколько определений, их мы введем в п. 4.1. Во второй части этого пункта мы напомним классическую комплекса Морса. Содержание этого пункта не является, строго говоря, необходимым для понимания остальной части § 4, но с точки зрения логики изложения естественно начать именно с понятий, обсуждаемых в п. 4.1.

В п. 4.2 мы вводим условие $(\mathfrak{C})$. Это условие аналогично условию (RP), но обладает некоторыми техническими преимуществами по сравнению с (RP). В частности, множество всех f -градиентов, удовлетворяющих $(\mathfrak{C})$, является C^0 -открытым в множестве всех градиентов. В п. 4.3 содержится еще один вариант конструкции оператора гомологического градиентного спуска.

Обозначения: в оставшейся части § 4 W – риманов кобордизм размерности n .

4.1. H -фильтрации кобордизмов и морсовские комплексы. В этом пункте $\phi: W \rightarrow [a, b]$ – упорядоченная функция Морса с упорядочивающей последовательностью $a_0 = a < \dots < a_{n+1} = b$ и v – ϕ -градиент. Предположим, что v является δ -разделенным. Пусть $\nu \in]0, \delta]$ и s – целое число между 0 и $n + 1$. Положим

$$\begin{aligned} W^{\{\leq s\}} &= \phi^{-1}([a_0, a_{s+1}]), & W^{\{\geq s\}} &= \phi^{-1}([a_s, a_{n+1}]), \\ W^{[\leq s]}(\nu) &= D_\nu(\text{ind} \leq s; v) \cup \partial_0 W, \\ W^{[s]}(\nu) &= \phi^{-1}([a_0, a_s]) \cup D_\nu(\text{ind} = s; v). \end{aligned}$$

Мы будем называть все эти фильтрации “ H -фильтрациями”.

Приведенные выше определения имеют смысл, разумеется, и в большей общности, но только наложенные выше ограничения на ϕ и v обеспечивают хорошие гомологические свойства фильтраций. Эти свойства представлены в следующем предложении. Для критической точки $p \in S_k(\phi)$ символом $d(p)$ мы обозначаем вложенный диск $D(p, v) \cap \phi^{-1}([a_k, a_{k+1}])$. В каждой критической точке $p \in S(\phi)$ выберем ориентацию нисходящего диска $D(p, v)$. Пусть $[p]$ обозначает образ в группе $H_k(W^{\{\leq k\}}, W^{\{\leq k-1\}})$ фундаментального класса пары $(d(p), \partial d(p))$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть $s \in \mathbb{N}$ и $\nu \in]0, \delta]$.

1. Включения $W^{[\leq s]}(\nu) \subset W^{[s]}(\nu) \subset W^{\{\leq s\}}$ являются гомотопическими эквивалентностями.
2. Включения пар

$$(W^{[\leq s]}(\nu), W^{[\leq s-1]}(\nu)) \subset (W^{[s]}, W^{\{\leq s-1\}}) \subset (W^{\{\leq s\}}, W^{\{\leq s-1\}})$$

являются гомотопическими эквивалентностями.

3. $H_*(W^{\{\leq s\}}, W^{\{\leq s-1\}}) = 0$, если $s \neq s$. Группа $H_s(W^{\{\leq s\}}, W^{\{\leq s-1\}})$ – свободная абелева группа, порожденная элементами $[p]$, $p \in S_s(\phi)$.

Обозначим $H_s(W^{\{\leq s\}}, W^{\{\leq s-1\}})$ символом C_s . Граничный оператор точной последовательности тройки $(W^{\{\leq s\}}, W^{\{\leq s-1\}}, W^{\{\leq s-2\}})$ определяет гомоморфизм $\partial_s: C_s \rightarrow C_{s-1}$; очевидно, мы имеем $\partial_s \circ \partial_{s+1} = 0$ для всех s . Таким образом, градуированная группа C_* , вместе с граничным оператором ∂_* , образуют свободный цепной комплекс. В том случае, когда v удовлетворяет условию трансверсальности, можно дать другую конструкцию этого комплекса, которую обычно и называют *комплексом Морса*.

Пусть k – натуральное число, $p \in S_k(\phi)$, $q \in S_{k-1}(\phi)$. Символом $\Gamma(p, q; v)$ обозначим множество интегральных кривых поля $(-v)$, соединяющих p с q , причем каждая интегральная кривая рассматривается с точностью до замены параметра. Из условия трансверсальности несложно вывести, что $\Gamma(p, q; v)$ – конечное множество. Выбранные ориентации нисходящих дисков позволяют приписать каждому $\gamma \in \Gamma(p, q; v)$ знак $\varepsilon(\gamma) \in \{-1, 1\}$.

Теперь определим $C_k(v)$ как свободную абелеву группу, свободно порожденную критическими точками ϕ индекса k . Положим $n(p, q; v) = \sum_{\gamma \in \Gamma(p, q; v)} \varepsilon(\gamma)$ и определим гомоморфизм $\partial'_k(v): C_k(v) \rightarrow C_{k-1}(v)$ формулой

$$\partial'_k(v)(p) = \sum_{q \in S_{k-1}(\phi)} n(p, q; v)q.$$

Оказывается, что гомоморфизм $J_k: C_k(v) \rightarrow C_k$, переводящий p в $[p]$, удовлетворяет $J_k \circ \partial'_{k+1}(v) = \partial_{k+1} \circ J_{k+1}$; итак, $(C_*(v), \partial_k(v))$ – цепной комплекс, изоморфный C_* .

Чтобы определить “эквивариантный комплекс Морса”, рассмотрим регулярное накрытие $\mathcal{P}: \widetilde{W} \rightarrow W$ со структурной группой G . Прообраз подмножества $A \subset W$ в $\widetilde{W}$ будет обозначаться посредством $\widetilde{A}$. В дополнение к ориентациям нисходящих дисков, для каждой точки $p \in S(\phi)$ выберем ее поднятие в $\widetilde{W}$, т.е. точку $\tilde{p}$ такую, что $\mathcal{P}(\tilde{p}) = p$. Тогда определено поднятие диска $d(p)$ в $\widetilde{W}$. Символом $[\tilde{p}]$ обозначим образ в группе $H_k(\widetilde{W}^{\{\leq k\}}, \widetilde{W}^{\{\leq k-1\}})$ фундаментального класса пары $(d(\tilde{p}), \partial d(\tilde{p}))$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. $H_*(\widetilde{W}^{\{\leq s\}}, \widetilde{W}^{\{\leq s-1\}}) = 0$, если $* \neq s$.

Группа $H_s(\widetilde{W}^{\{\leq s\}}, \widetilde{W}^{\{\leq s-1\}})$ – свободный $\mathbb{Z}G$ -модуль, свободно порожденный элементами $[\tilde{p}]$, $p \in S_s(\phi)$.

Аналогично указанному выше способу, можно построить цепной комплекс $(\tilde{C}_*(v), \tilde{\partial}_*(v))$ свободных $\mathbb{Z}G$ -модулей, свободно порожденный в размерности p критическими точками ϕ индекса p ; и тогда граничный оператор определяется путем подсчета v -траекторий, соединяющих критические точки. Читатель может ознакомиться с деталями и доказательствами этих утверждений в [3; приложение].

4.2. Условие (C). Обозначения. Пусть $g: W \rightarrow [a, b]$ – функция Морса на кобордизме W размерности n , v – g -градиент.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. Пусть $\lambda \in [a, b]$ – регулярное значение f , и пусть $A \subset \partial_1 W$. Мы говорим, что v спускает A до $f^{-1}(\lambda)$, если каждая $(-v)$ -траектория, начинающаяся в A , достигает $f^{-1}(\lambda)$. Пусть $X \subset W$. Мы говорим, что v спускает A до $f^{-1}(\lambda)$ без пересечения с X , если v спускает A до $f^{-1}(\lambda)$ и $T(A, v) \cap X = \emptyset$.

Понятия “ v поднимает B до $f^{-1}(\lambda)$ ” и “ v поднимает B до $f^{-1}(\lambda)$ без пересечения с Y ” (где $B \subset \partial_0 W$, $Y \subset W$) определяются аналогично.

Напомним, что в п. 3.1 мы определили множества $B_\delta(\text{ind} \leq s; v)$ и $D_\delta(\text{ind} \leq s; v)$. Введем еще одно множество со сходными свойствами: положим $C_\delta(\text{ind} \leq s; v) = W \setminus B_\delta(\text{ind} \geq n - s - 1; v)$. Следующая лемма доказывается стандартными рассуждениями из теории Морса.

ЛЕММА 4.4. *Предположим, что v является δ -разделенным по отношению к ϕ и упорядочивающей последовательности $(a_0, \dots, a_{n+1})$. Тогда для каждого s имеем:*

$$\partial_0 W \cup B_\delta(\text{ind} \leq s; v) \subset \phi^{-1}([a_0, a_{s+1}]) \subset C_\delta(\text{ind} \leq s; v) \cup \partial_0 W,$$

и эти включения являются гомотопическими эквивалентностями.

Теперь мы можем сформулировать условие $(\mathfrak{C})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.5. Скажем, что v удовлетворяет условию $(\mathfrak{C})$, если найдутся объекты 1)–4), перечисленные ниже, со свойствами (A), (B), указанными ниже.

Объекты:

- 1) Упорядоченная функция Морса ϕ_1 на $\partial_1 W$ с упорядочивающей последовательностью $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ и ϕ_1 -градиентом u_1 .
- 2) Упорядоченная функция Морса ϕ_0 на $\partial_0 W$ с упорядочивающей последовательностью $(\beta_0, \dots, \beta_n)$ и ϕ_0 -градиентом u_0 .
- 3) Упорядоченная функция Морса ϕ на W с упорядочивающей последовательностью $(a_0, \dots, a_{n+1})$, согласованная с (f, v) .
- 4) Число $\delta > 0$.

Свойства:

- (A) u_0 является δ -разделенным по отношению к ϕ_0 , u_1 является δ -разделенным по отношению к ϕ_1 , и v является δ -разделенным по отношению к ϕ .
- (B1) $(-v)^\rightsquigarrow (C_\delta(\text{ind} \leq j; u_1)) \cup (D_\delta(\text{ind} \leq j+1; v) \cap \partial_0 W) \subset B_\delta(\text{ind} \leq j; u_0)$
для каждого j .
- (B0) $\rightsquigarrow v (C_\delta(\text{ind} \leq j; -u_0)) \cup (D_\delta(\text{ind} \leq j+1; -v) \cap \partial_1 W) \subset B_\delta(\text{ind} \leq j; -u_1)$
для каждого j .

Множество всех f -градиентов, удовлетворяющих $(\mathfrak{C})$, будет обозначаться посредством $\mathcal{GC}(f)$. Напомним, что множество всех f -градиентов, удовлетворяющих условию трансверсальности, обозначается $\mathcal{GT}(f)$. Пересечение $\mathcal{GC}(f) \cap \mathcal{GT}(f)$ будет обозначаться $\mathcal{GCT}(f)$.

Комментарии:

1. Как мы уже отметили во введении, условие (B) является аналогом условия клеточной аппроксимации. В самом деле, множества $C_\delta(\text{ind} \leq j; u_1)$ и $B_\delta(\text{ind} \leq j; u_0)$ суть “утолщения” множеств $D(\text{ind} \leq j; u_1)$ и, соответственно, $D(\text{ind} \leq j; u_0)$; причем первое из них — “толще”, нежели второе. Стало быть если градиент v удовлетворяет (B1), то $(-v)^\rightsquigarrow$ переводит некоторое утолщение j -остова $\partial_1 W$ в некоторое утолщение j -остова $\partial_0 W$. Предупреждение: условие (B1) требует не только этого, а несколько больше: для каждого j подошвы δ -ручек W индекса $\leq j + 1$ должны принадлежать множеству $B_\delta(\text{ind} \leq j; u_0)$.

2. Условие $(\mathfrak{C})$ сильнее, нежели условие $(\mathcal{C})$ из [6; §1.2]. Это ясно, поскольку $(\mathfrak{C})$ формулируется точно так же, как $(\mathcal{C})$, с той лишь разницей, что в условии $(\mathcal{C})$ требуется $(-v) \rightsquigarrow (\phi_1^{-1}([a_0, a_{j+1}])) \subset B_\delta(\text{ind} \leq j; u_0)$. Условие $(\mathcal{C})$ оказывается, в свою очередь, сильнее, чем условие (RP) (см. определение 3.11); это немного менее очевидно, и мы не приводим здесь доказательство этого факта.
3. Если даны ϕ_0 -градиент u_0 , ϕ_1 -градиент u_1 и ϕ -градиент v , удовлетворяющий условию почти-трансверсальности, то условие (A) всегда выполнено при достаточно малом δ .

ТЕОРЕМА 4.6. $\mathcal{GC}(f)$ открыто и плотно в $\mathcal{G}(f)$ по отношению к C^0 -топологии. Более того, если v_0 – произвольный f -градиент, то можно выбрать C^0 -малое возмущение v градиента v_0 таким образом, что $v \in \mathcal{GC}(f)$ и $v = v_0$ в окрестности ∂W .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы занимает оставшуюся часть параграфа и содержит две части: доказательства открытости и плотности.

C^0 -открытость $\mathcal{GC}(f)$.

Пусть v – f -градиент, удовлетворяющий $(\mathfrak{C})$. Выберем соответствующие функции ϕ_0, ϕ_1, ϕ , их градиенты u_0, u_1 , и число $\delta > 0$, удовлетворяющие (A) , $(B0)$ и $(B1)$. Теперь зафиксируем последовательность $\mathcal{S} = (\delta, u_0, u_1, \phi_0, \phi_1, \phi)$. Пусть w есть ϕ -градиент. Обозначим условие (A) по отношению к w и $\mathcal{S}$ посредством $(A)(w)$. Аналогично, обозначим условия $(B1)$, $(B0)$ по отношению к w и $\mathcal{S}$ посредством $(B1)(w)$, $(B0)(w)$. Мы знаем, что выполняется $(A)(v) \& (B1)(v) \& (B0)(v)$; теперь мы докажем, что $(A)(w) \& (B1)(w) \& (B0)(w)$ выполнено для каждого w , достаточно C^0 -близкого к v .

Пусть w – другой f -градиент. Из леммы 1.6 и следствия 1.7 работы [2] вытекает, что если $\|w - v\|$ достаточно мало, то w является δ -разделенным ϕ -градиентом, так что условие $A(w)$ выполнено.

Нам будет удобнее работать с другой формулировкой условия $(B1)(w) \& (B0)(w)$.

Введем еще три условия:

$\beta_1(w)$ Для каждого j имеем: w спускает $C_\delta(\text{ind} \leq j; u_1)$ до $\phi^{-1}(a_{j+1})$ без пересечения с $\bigcup_{\text{ind } p \geq j+1} D_\delta(p)$.

$\beta_2(w)$ Для каждого j имеем: w поднимает $C_\delta(\text{ind} \leq n-j-2; -u_0)$ до $\phi^{-1}(a_{j+2})$ без пересечения с $\bigcup_{\text{ind } p \leq j+1} D_\delta(p)$.

$\beta_3(w)$ Для каждого j множества

$$R_j^+(w) = (-v)_{[b, a_{j+2}]}^{\rightsquigarrow} (C_\delta(\text{ind} \leq j; u_1))$$

и

$$R_j^-(w) = v_{[a, a_{j+2}]}^{\rightsquigarrow} (C_\delta(\text{ind} \leq n-j-2; -u_0))$$

не пересекаются.

Отметим, что $\beta_1(w)$ и $\beta_2(w)$ в некотором смысле двойственны друг к другу, т.е. $\beta_2(w) = \beta_1(-w)$.

ЛЕММА 4.7. Предположим, что выполнено $A(w)$. Тогда $(B1)(w) \& (B0)(w) \Leftrightarrow \beta_1(w) \& \beta_1(w) \& \beta_3(w)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\Rightarrow$. Условие β_1 следует из (B0), β_2 следует из (B1). Чтобы доказать β_3 , заметим, что если $R_j^+(w) \cap R_j^-(w) \neq \emptyset$, то найдется $(-v)$ -траектория, соединяющая $x \in C_\delta(\text{ind} \leq j; u_1)$ с $y \in C_\delta(\text{ind} \leq n-j-2; -u_0) = \partial_0 W \setminus B_\delta(\text{ind} \leq j; u_0)$. А это противоречит (B1).

$\Leftarrow$. Условие β_1 утверждает, что для каждого j выполнено

$$\left(\bigcup_{\text{ind } p \geq j+1} D_\delta(p, -v) \right) \cap \partial_1 W \subset \partial_1 W \setminus C_\delta(\text{ind} \leq j; u_1) = B_\delta(\text{ind} \leq n-2-j; -u_1),$$

т.е. $D_\delta(\text{ind} \leq n-1-j; -v) \cap \partial_1 W \subset B_\delta(\text{ind} \leq n-2-j; -u_1)$. Далее, из β_3 следует, что для каждого j каждая v -траектория, начинающаяся в $C_\delta(\text{ind} \leq n-j-2; -u_0)$ и достигающая $\partial_1 W$, не может пересечь $\partial_1 W$ в точке множества $C_\delta(\text{ind} \leq j; u_1)$. Следовательно, она пересекает $\partial_1 W$ в точке множества $B_\delta(\text{ind} \leq n-2-j; -u_1)$. Значит, выполнено (B0)(w). Доказательство (B1)(w) аналогично.

Возвращаясь в доказательству C^0 -открытости (C), заметим, что, как несложно проверить, условия $\beta_1(w)$ и $\beta_2(w)$ открыты. Поскольку выполнены $\beta_1(v)$ и $\beta_2(v)$, то для каждого j множества $R_j^+(v)$, $R_j^-(v)$ компактны. Так как они не пересекаются (что следует из $\beta_3(v)$), то можно выбрать два непересекающихся открытых подмножества U_j, V_j множества $\phi^{-1}(a_{j+2})$ таких, что $R_j^+(v) \subset U_j$, $R_j^-(v) \subset V_j$. Тогда для каждого w , достаточно C^0 -близкого к v , и для каждого j мы имеем (см. следствие 5.6 из [2]):

$$(-w)_{[b, a_{j+2}]}^{\sim} (C_\delta(\text{ind} \leq j; u_1)) \subset U_j, \quad w_{[a, a_{j+2}]}^{\sim} (C_\delta(\text{ind} \leq n-2-j; -u_0)) \subset V_j,$$

и $\beta_3(w)$ доказано. Следовательно, $\beta_1(w) \& \beta_2(w) \& \beta_3(w)$ является C^0 -открытым условием и, таким образом, мы доказали C^0 -открытость условия (C).

C^0 -плотность.

Доказательство очень близко к доказательству C^0 -плотности условия (RP). Мы не проводим его во всех подробностях. Заметим только, что, доказывая C^0 -плотность условия (RP), мы построили возмущение v' данного градиента v , которое на самом деле удовлетворяет условию (C). (В самом деле, вернемся к абзацу, следующему за формулой (7). Диффеоморфизм Φ_1^{-1} переводит $\partial_1 W \setminus A_{n-2-m}^+(\delta)$ в множество $A_m^-(\delta)$. Поскольку u_0 и u_1 являются δ -разделенными, множество $(\partial_1 W)^{\{\leq m\}}$ лежит в $\partial_1 W \setminus A_{n-2-m}^+(\delta)$, и, таким образом, мы проверили условие (B1).)

4.3. Гомологический градиентный спуск (второй вариант). В этом пункте мы приведем еще один вариант построения оператора гомологического градиентного спуска (см. п. 3.5). Этот вариант является более подходящим для изучения морсовских фильтраций кобордизмов (§5).

Предположим, что v удовлетворяет условию (C) по отношению к $\delta, \phi_0, \phi_1, u_0, u_1$. У нас имеются соответствующие фильтрации $(\partial_1 W)^{\{\leq s\}}, (\partial_0 W)^{\{\leq s\}}$. Положим $V_\alpha = \phi^{-1}(\alpha)$.

ТЕОРЕМА 4.8. Для каждого s существует гомоморфизм

$$\mathcal{H}_s(-v): H_*(V_b^{\{\leq s\}}, V_b^{\{\leq s-1\}}) \rightarrow H_*(V_a^{\{\leq s\}}, V_a^{\{\leq s-1\}}),$$

обладающий следующими свойствами.

- 1) Пусть N – ориентированное подмногообразие V_b такое, что $N \subset V_b^{\{\leq s\}}$ и $N \setminus \text{Int } V_b^{\{\leq s-1\}}$ компактно. Тогда многообразие $N' = (-v)_{[b,a]}^{\rightsquigarrow}(N)$ лежит в $V_a^{\{\leq s\}}$ и $N' \setminus \text{Int } V_a^{\{\leq s-1\}}$ компактно, фундаментальный класс N' по модулю $V_a^{\{\leq s-1\}}$ равен $\mathcal{H}_s(-v)([N])$.
- 2) Существует $\epsilon > 0$ такое, что для каждого f -градиента w , удовлетворяющего $\|w - v\| \leq \epsilon$, и каждого s выполнено: $\mathcal{H}_s(-v) = \mathcal{H}_s(-w)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Построение гомоморфизма $\mathcal{H}_s(-v)$.

Гомоморфизм $\mathcal{H}_s(-v)$ будет определен как композиция двух гомоморфизмов: $\mathcal{H}1_s(-v)$ и $\mathcal{H}0_s(-v)$. (Интуитивно, $\mathcal{H}1$ соответствует спуску с уровня b на уровень a_{s+1} и $\mathcal{H}0$ соответствует спуску с a_{s+1} в a .) Отображения $(-v)_{[b,a_{s+1}]}^{\rightsquigarrow}$ и $(-v)_{[a_{s+1},a]}^{\rightsquigarrow}$ мы обозначим как $(-v1)^{\rightsquigarrow}$, и, соответственно, $(-v0)^{\rightsquigarrow}$. Каждая $(-v)$ -траектория, начинающаяся в $V_b^{\{\leq s\}}$, достигает $V_{a_{s+1}}$. Поэтому $V_b^{\{\leq s\}}$ лежит в области определения $(-v1)^{\rightsquigarrow}$, и $(-v1)^{\rightsquigarrow}$ определяет гомеоморфизм пары $(V_b^{\{\leq s\}}, V_b^{\{\leq s-1\}})$ на свой образ, являющийся парой компактных подмножеств множества $V_{a_{s+1}}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.9. Пусть k – целое, $0 \leq k \leq n$. Обозначим через $Y_k(v)$ множество всех $y \in \phi^{-1}([a, a_{k+1}])$ таких, что или

- i) $\gamma(y, \cdot; -v)$ достигает V_a и пересекает его в точке $z \in V_a^{\{\leq k-1\}}$,

или

- ii) $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(y, t; -v) = p$, где $p \in S(f)$.

Другими словами,

$$Y_k(v) = T(V_a^{\{\leq k-1\}}, -v | W') \cup D(-v | W'),$$

где $W' = \phi^{-1}([a, a_{k+1}])$. Множество $Y_k(v)$ компактно (см. [2; лемма 2.7]). Положим

$$(8) \quad A = Y_{s+1}(v) \cap V_{a_{s+1}}, \quad B = Y_s(v) \cap V_{a_{s+1}}, \quad C = \left(\bigcup_{\text{ind } p \leq s} D(p, -v) \right) \cap V_{a_{s+1}}.$$

Тогда C замкнуто, $\overline{C} \subset \text{Int } B$ и $A \supset B \supset \text{Int } B \supset C$. Далее, отображение $(-v1)^{\rightsquigarrow}$ определяет непрерывное отображение пар

$$(V_b^{\{\leq s\}}, V_b^{\{\leq s-1\}}) \rightarrow (A, B),$$

а отображение $(-v0)^{\rightsquigarrow}$ определяет непрерывное отображение пар

$$(A \setminus C, B \setminus C) \rightarrow (V_a^{\{\leq s\}}, V_a^{\{\leq s-1\}}).$$

Обозначим символом Exc изоморфизм вырезания $H_*(A \setminus C, B \setminus C) \rightarrow H_*(A, B)$ и положим

$$\mathcal{H}_s(-v) = ((-v0)^{\rightsquigarrow} \circ \text{Exc}^{-1} \circ (-v1)^{\rightsquigarrow})_*.$$

2) *Доказательство свойств $\mathcal{H}_s(-v)$.*

Доказательство сводится к свойствам оператора $H(v)$, построенного по некоторой R -системе (см. п. 3.5).

Мы предъявим R -систему $\mathcal{R} = \{(A_\lambda, B_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ для (ϕ, v) такую, что гомоморфизм $H(v)$, соответствующий $\mathcal{R}$, является изоморфным $\mathcal{H}(-v)$. Чтобы объяснить конструкцию $\mathcal{R}$, сделаем упрощающее предположение: ϕ имеет только два критических значения: первое – в $[a, a_{s+1}]$ и второе – в $[a_{s+1}, b]$. (В конце доказательства мы укажем, как перенести его на общий случай.) Положим

$$\begin{aligned} A_b &= V_b^{\{\leq s-1\}}, & A_a &= V_a^{\{\leq s-1\}}, \\ B_a &= V_a^{\{\geq s+1\}}, & B_b &= V_b^{\{\geq s+1\}}. \end{aligned}$$

Для краткости обозначим a_{s+1} символом τ . Для построения R -системы нужно предъявить множества A_τ, B_τ . Пусть (α_i) – упорядочивающая последовательность для ϕ_1 , (β_i) – упорядочивающая последовательность для ϕ_0 . Выберем число $\epsilon > 0$, достаточно малое, чтобы было выполнено следующее:

$$\begin{aligned} D_\delta(\text{ind} \leq n-s-2, -u_1) &\subset \phi_1^{-1}([\alpha_{s+1} + \epsilon, \alpha_n]), \\ \alpha_s + \epsilon &< \alpha_{s+1}, \\ (-v)^{\rightsquigarrow}(\phi_1^{-1}([\alpha_0, \alpha_s + \epsilon])) &\subset \phi_0^{-1}([\beta_0, \beta_s]), \\ \rightsquigarrow v(\phi_0^{-1}([\beta_{s+1}, \beta_n])) &\subset \phi_1^{-1}([\alpha_{s+1} + \epsilon, \alpha_n]). \end{aligned}$$

Символом $L_s(v)$ обозначим множество всех точек $y \in \phi^{-1}([a_{s+1}, b])$ таких, что или

i) $\gamma(y, \cdot; v)$ достигает V_b и пересекает его в точке $z \in \phi^{-1}([\alpha_{s+1} + \epsilon, \alpha_n])$,

или

ii) $y \in D(p, v)$, где $p \in S(f)$.

Теперь положим

$$A_\tau = (-v)^{\rightsquigarrow}(\phi_1^{-1}([\alpha_0, \alpha_s + \epsilon])), \quad B_\tau = L_s(v) \cap V_\tau.$$

Из условия (C) следует, что $\{(A_\lambda, B_\lambda)\}_{\lambda \in \{a, \tau, b\}}$ – R -система для (ϕ, v) .

Вложения пар

$$\begin{aligned} j_b: (V_b^{\{\leq s\}}, V_b^{\{\leq s-1\}}) &\subset (V_b \setminus B_b, A_b), \\ j_a: (V_a^{\{\leq s\}}, V_a^{\{\leq s-1\}}) &\subset (V_a \setminus B_a, A_a) \end{aligned}$$

индуцируют изоморфизмы в гомологиях.

Проследив еще раз построение гомоморфизма $H(v)$, соответствующего R -системе $\{(A_\lambda, B_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$, нетрудно убедиться, что $H(v) \circ (j_b)_* = (j_a)_* \circ \mathcal{H}(-v)$. Теперь уже легко вывести свойства гомоморфизма $\mathcal{H}(-v)$ из свойств $H(v)$.

В случае, когда найдется более чем одно критическое значение в отрезках $[a_{s+1}, b]$ и $[a, a_{s+1}]$, действуем аналогично: строим R -систему $\mathcal{R} = \{(A_\lambda, B_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ такую, что оператор $H(-v)$, соответствующий $\mathcal{R}$, изоморфен $\mathcal{H}(-v)$. В этой системе мы можем определить A_λ, B_λ по тем же формулам, что и выше для $\lambda = a, b, \tau$. Чтобы определить

A_λ, B_λ для остальных значений λ , сперва выберем множество $\Lambda = \{\lambda_i\}$ регулярных значений такое, что $\lambda_0 = a, \lambda_N = b, \lambda_i = \tau$ и для каждого i найдется лишь одно критическое значение ϕ в $[\lambda_i, \lambda_{i+1}]$.

Множество A_{λ_j} при $i \leq j \leq N$ определяется как некоторое утолщение множества $(-v)_{[b, \lambda_j]}^{\rightsquigarrow} (V_b^{\{\leq s-1\}})$.

Множество B_{λ_j} при $i \leq j \leq N$ определяется аналогично множеству $L_s(v)$ (см. выше). Определение множеств A_λ, B_λ для оставшихся значений λ , а также проверку изоморфности получающегося гомоморфизма $H(v)$ и гомоморфизма $\mathcal{H}(-v)$ мы оставляем читателю.

4.4. Эquivariantный гомологический градиентный спуск. Пусть $p: \widehat{W} \xrightarrow{H} W$ – регулярное накрытие W со структурной группой H . Для $A \subset W$ обозначим $p^{-1}(A)$ также символом $\widehat{A}$. Перенос вдоль $(-v)$ -траекторий определяет диффеоморфизм $(-\widehat{v})^{\rightsquigarrow}: (\partial_0 \widehat{W} \setminus K_1) \rightarrow (\partial_0 \widehat{W} \setminus K_0)$ (определение K_1, K_0 см. в п. 2.1), который коммутирует с правым действием G . Как и раньше, будем писать $(-\widehat{v})^{\rightsquigarrow}(X)$ вместо $(-\widehat{v})^{\rightsquigarrow}(X \setminus \widehat{K}_1)$. Предположим, что v удовлетворяет условию $(\mathfrak{C})$ по отношению к $\delta, \phi_0, \phi_1, u_1, u_0$. Обозначим $\phi^{-1}(\alpha)$ символом V_α . Оказывается, что можно определить “equivariantный аналог” оператора гомологического градиентного спуска. Свойства этого оператора составляют содержание следующей теоремы. Доказательство полностью аналогично доказательству теоремы 4.8 и не приводится.

ТЕОРЕМА 4.10. *Для каждого s существует гомоморфизм правых $\mathbb{Z}H$ -модулей*

$$\widehat{\mathcal{H}}_s(-v): H_*(\widehat{V}_b^{\{\leq s\}}, \widehat{V}_b^{\{\leq s-1\}}) \rightarrow H_*(\widehat{V}_a^{\{\leq s\}}, \widehat{V}_a^{\{\leq s-1\}}),$$

обладающий следующими свойствами.

Пусть N – ориентированное подмногообразие $\widehat{V}_b$ такое, что $N \subset \widehat{V}_b^{\{\leq s\}}$ и $N \setminus \text{Int } \widehat{V}_b^{\{\leq s-1\}}$ компактно.

Тогда $N' = (-\widehat{v})_{[b, a]}^{\rightsquigarrow}(N)$ – подмногообразие $(\widehat{V}_a \setminus B_a)$ такое, что $N' \subset \widehat{V}_a^{\{\leq s\}}$ и $N' \setminus \widehat{V}_a^{\{\leq s-1\}}$ компактно, и фундаментальный класс N' по модулю $\widehat{V}_a^{\{\leq s-1\}}$ совпадает с $\widehat{\mathcal{H}}_s(-v)([N])$.

4.5. Циклические кобордизмы и условия $(\mathfrak{C}\mathcal{Y})$. Результаты этого пункта будут использованы в §§ 5–7.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.11. *Циклический кобордизм* – это риманов кобордизм W вместе с изометрией $\Phi: \partial_0 W \rightarrow \partial_1 W$.

Пусть $f: W \rightarrow [a, b]$ – функция Морса на циклическом кобордизме W размерности n , v – f -градиент. Скажем, что v удовлетворяет $(\mathfrak{C}\mathcal{Y})$, если v удовлетворяет условию $(\mathfrak{C})$ (см. п. 4.2) и, вдобавок, функции Морса ϕ_1, ϕ_0 и их градиенты u_1, u_0 из определения 4.5 могут быть выбраны таким образом, что $\phi_1 \circ \Phi = \phi_0, u_1 = (\Phi)_*(u_0)$. Множество всех f -градиентов, удовлетворяющих $(\mathfrak{C}\mathcal{Y})$, будет обозначаться $\mathcal{G}\mathfrak{C}\mathcal{Y}(f)$. Пересечение $\mathcal{G}\mathfrak{C}\mathcal{Y}(f) \cap \mathcal{G}\mathcal{T}(f)$ будет обозначаться $\mathcal{G}\mathfrak{C}\mathcal{Y}\mathcal{T}(f)$.

ТЕОРЕМА 4.12. $\mathcal{G}\mathcal{C}\mathcal{Y}(f)$ открыто и плотно в $\Gamma(f)$ по отношению к C^0 -топологии. Более того, если v_0 – произвольный f -градиент, тогда можно выбрать такое C^0 -малое возмущение v градиента v_0 , что $v \in \mathcal{G}\mathcal{C}\mathcal{Y}(f)$ и $v = v_0$ в окрестности ∂W .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО в точности повторяет доказательство теоремы 4.6. Чтобы доказать C^0 -открытость множества $\mathcal{G}\mathcal{C}\mathcal{Y}(f)$, можно в точности следовать рассуждениям в первой части доказательства теоремы 4.6. Для доказательства C^0 -плотности, снова вернемся к доказательству C^0 -плотности (RP) (теорема 3.12). Здесь достаточно заметить, что мы можем выбрать $u_1, u_0, \xi_1, \xi_0, \phi_1, \phi_0$ таким образом, чтобы $u_1 = \Phi_*(u_0), \xi_1 = \Phi_*(\xi_0), \phi_0 = \phi_1 \circ \Phi$.

Для f -градиента v , удовлетворяющего $(\mathcal{C}\mathcal{Y})$, мы можем превратить оператор гомологического градиентного спуска в гомоморфизм некоторой абелевой группы в себя. А именно, положим $h_s(-v) = \mathcal{H}_s(-v) \circ \Phi_*$; тогда $h_s(-v)$ – эндоморфизм группы $H_*((\partial_0 W)^{\{\leq s\}}, (\partial_0 W)^{\{\leq s-1\}})$.

§ 5. Морсовские фильтрации кобордизмов

Пусть W – кобордизм, $\phi: W \rightarrow [a, b]$ – упорядоченная функция Морса на W , v – ϕ -градиент. Предположим, что W риманов и что v – δ -разделен. В п. 4.1 мы рассмотрели H -фильтрацию W , ассоциированную с v . Зная гомологии последовательных факторов каждой из этих фильтраций, можно в принципе восстановить гомологии пары $(W, \partial_0 W)$. Но невозможно восстановить гомологии самого кобордизма W . (В самом деле, рассмотрим следующий пример: $W = V \times [0, 1]$. Здесь все члены фильтрации гомотопически эквивалентны V , и факторы стягиваемы.) В настоящем параграфе мы определяем другую фильтрацию W , которая в некотором смысле согласована с данными фильтрациями многообразий $\partial_0 W$ и $\partial_1 W$ и исходя из которой можно восстановить гомологии кобордизма W . Чтобы построить такую фильтрацию, нужно наложить условие $(\mathcal{C})$ на поле v .

5.1. Определение фильтрации морсовского типа. Пусть W – риманов кобордизм размерности n , $f: W \rightarrow [a, b]$ – функция Морса на W и v – f -градиент. Предположим, что v удовлетворяет условию $(\mathcal{C})$. Напомним (см. п. 4.2), что в условии $(\mathcal{C})$ требуется существование упорядоченных функций Морса $\phi: W \rightarrow [a, b], \phi_1: \partial_1 W \rightarrow \mathbb{R}, \phi_0: \partial_0 W \rightarrow \mathbb{R}$, δ -разделенного ϕ_0 -градиента u_0 и δ -разделенного ϕ_1 -градиента u_1 , причем эти объекты должны удовлетворять условиям (A), (B1), (B0) из п. 4.2. Мы получаем три H -фильтрации, построенные по упорядоченным функциям Морса ϕ_0, ϕ_1 и ϕ : фильтрация $(\partial_1 W)^{\{\leq s\}}$ многообразия $\partial_1 W$, фильтрация $(\partial_0 W)^{\{\leq s\}}$ многообразия $\partial_0 W$ и фильтрация $W^{\{\leq s\}}$ многообразия W .

Напомним определение множества

$$Y_k(v) = (T((\partial_0 W)^{\{\leq k-1\}}, -v) \cup D(-v)) \cap \phi^{-1}([a, a_{k+1}])$$

из предыдущего параграфа (определение 4.9). В этом параграфе мы будем иметь дело только с одним f -градиентом, так что мы будем писать Y_k вместо $Y_k(v)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Пусть $A \subset W$ и $c, d \in [a, b]$. Обозначим $A \cap \phi^{-1}([c, d])$ символом $A|_{[c, d]}$. Пусть $\mu \in [a, b]$. Обозначим $A \cap \phi^{-1}(\mu)$ символом $A|_\mu$.

Рис. 1. $W^{\langle k \rangle}$

Положим

$$(9) \quad Z_k = (T((\partial_1 W)^{\{\leq k-1\}}, v))|_{[a_{k+1}, b]}.$$

Так как $(-v)$ спускает $(\partial_1 W)^{\{\leq k-1\}}$ до $\phi^{-1}(a_k)$ (что следует из $(\mathfrak{C})$), то множество Z_k гомеоморфно произведению $(\partial_1 W)^{\{\leq k-1\}} \times [0, 1]$.

Для $k \geq 0$ положим

$$(10) \quad \begin{aligned} W^{\prec k \succ} &= (\partial_0 W)^{\{\leq k\}} \cup (\partial_1 W)^{\{\leq k\}} \cup Y_k \cup Z_k, \\ W^{\langle k \rangle} &= (\partial_1 W)^{\{\leq k\}} \cup (Y_{k+1} \cap \phi^{-1}([a, a_{k+1}])) \cup Z_k. \end{aligned}$$

Как $\{W^{\langle k \rangle}\}_{k \in \mathbb{N}}$, так и $\{W^{\prec k \succ}\}_{k \in \mathbb{N}}$ — фильтрации W , и $W^{\prec k \succ} \subset W^{\langle k \rangle}$. Множество $W^{\langle k \rangle}$ получено из $W^{\prec k \succ}$ добавлением всех точек из $W_{[a, a_{k+1}]}$, лежащих на v -траекториях, начинающихся в $(\partial_0 W)^{\{\leq k\}} \setminus (\partial_0 W)^{\{\leq k-1\}}$.

На рис. 1 и 2 изображены (весьма схематично) множества $W^{\langle k \rangle}$ и $W^{\langle k-1 \rangle}$.

Рис. 2. $W^{\langle k-1 \rangle}$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2.

1. Введенные выше фильтрации можно описать следующим образом. Будем считать, что нисходящие диски $D(p, v)$ критических точек p индекса k функции f образуют “ k -клетки” кобордизма W . Тогда множество $W^{\prec k \succ}$ содержит все “клетки” многообразий $\partial_0 W$, $\partial_1 W$, W , имеющие размерность $\leq k$, а также v -следы “клеток” многообразия $\partial_1 W$, имеющих размерность $\leq k-1$. Множества $W^{\prec k \succ}$, $W^{\langle k \rangle}$ являются утолщениями этих “остовов”. Условие (C) гарантирует, что граница клеток, соответствующих $D(p, v)$, $p \in S(\phi)$, принадлежит объединению утолщенных клеток размерности $< \text{ind } p$.
2. Две введенные выше фильтрации гомотопически эквивалентны друг другу (см. лемму 5.3). Множество $W^{\prec k \succ}$ было введено в [6] и обозначалось там символом $W^{\langle k \rangle}$. Фильтрация $\{W^{\langle k \rangle}\}_{k \in \mathbb{N}}$ имеет некоторые технические преимущества перед $\{W^{\prec k \succ}\}_{k \in \mathbb{N}}$ — вот почему мы изменили наши обозначения и почему в настоящей работе мы в основном будем рассматривать фильтрацию $W^{\langle k \rangle}$.

Положим $W^{\prec k \succ} = W^{\langle k \rangle} = \emptyset$ для $k < 0$.

ЛЕММА 5.3. Включение $(W^{\prec k}, W^{\prec k-1}) \hookrightarrow (W^{\langle k \rangle}, W^{\langle k-1 \rangle})$ является гомотопической эквивалентностью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$(11) \quad W^{\langle k \rangle} \setminus W^{\prec k} = (Y_{k+1} \cap W^{\{\leq k\}}) \setminus (Y_k \cup (\partial_0 W)^{\{\leq k\}}).$$

В области $A = \phi^{-1}([a, a_{k+1}]) \setminus Y_k$ функция ϕ не имеет критических точек. Следовательно, найдется такое $T > 0$, что для каждого $x \in A$ мы имеем: $\gamma(x, T; -v) \in \partial_0 W \cup Y_k$. Для $x \in W$ символом $\tau(x)$ обозначим тот момент, когда $\gamma(x, \cdot; -v)$ достигает $\partial_0 W$ (если траектория не достигает $\partial_0 W$, то положим $\tau(x) = \infty$). Определим

$$(12) \quad W_0^{\langle k \rangle} = W^{\langle k \rangle} \cap \phi^{-1}([a, a_{k+1}]),$$

$$(13) \quad W_0^{\prec k} = W^{\prec k} \cap \phi^{-1}([a, a_{k+1}]).$$

Определим деформацию H_t пространства $W_0^{\langle k \rangle}$ в себя (где $t \in [0, T]$) следующим образом:

$$(14) \quad H_t(x) = \begin{cases} \gamma(x, t; -v), & \text{если } t \leq \min(T, \tau(x)), \\ \gamma(x, \min(T, \tau(x)); -v), & \text{если } t \geq \min(T, \tau(x)). \end{cases}$$

Легко убедиться в том, что $H_0 = \text{id}$, $H_T(W_0^{\langle k \rangle}) \subset W_0^{\prec k}$ и что $W_0^{\prec k}$ инвариантно относительно H_t при всех $t \geq 0$. Поэтому включение $W_0^{\prec k} \hookrightarrow W_0^{\langle k \rangle}$ является гомотопической эквивалентностью.

Теперь несложно продолжить деформацию H_t на все $W^{\langle k \rangle}$, положив $H_t(x) = x$ для $x \in \phi^{-1}([a_{k+1} + \epsilon, b])$ и соответствующим образом склеив два отображения в области $\phi^{-1}([a_{k+1}, a_{k+1} + \epsilon])$. Таким образом, мы получили отображение, гомотопически обратное включению $W^{\prec k} \hookrightarrow W^{\langle k \rangle}$.

Гомотопически обратное отображение для включения пар, фигурирующего в формулировке леммы, строится подобным образом (значение T , возможно, придется увеличить). Мы оставляем детали читателю.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.4. В настоящем параграфе мы будем неоднократно использовать метод, примененный при доказательстве леммы 5.3. Мы будем говорить, что мы применяем $(-v)$ -сдвиг. В частности, при доказательстве леммы 5.3 мы применили $(-v)$ -сдвиг в области $\phi^{-1}([a, a_{k+1}]) \setminus Y_k$.

5.2. Гомологии пары $(W^{\langle k \rangle}, W^{\langle k-1 \rangle})$. Здесь мы покажем, что $W^{\langle k \rangle}$ образует клеточную фильтрацию W , и вычислим гомологии $(W^{\langle k \rangle}, W^{\langle k-1 \rangle})$. Замечание 5.2 подсказывает, что для $* \neq k$ группа $H_*(W^{\langle k \rangle}, W^{\langle k-1 \rangle})$ должна обращаться в нуль и что при $* = k$ эта группа должна быть свободной абелевой группой, порожденной гомологическими классами соответствующих клеток. В этом параграфе мы убедимся, что это действительно выполняется.

Чтобы вычислить $H_*(W^{\langle k \rangle}, W^{\langle k-1 \rangle})$, мы сначала определим четыре гомоморфизма со значениями в $H_k(W^{\langle k \rangle}, W^{\langle k-1 \rangle})$. В теореме 5.5 мы установим, что группа $H_k(W^{\langle k \rangle}, W^{\langle k-1 \rangle})$ является прямой суммой образов этих гомоморфизмов.

1. Для каждого s множества $(\partial_0 W)^{\{\leq s\}}, (\partial_1 W)^{\{\leq s\}}$ являются подмножествами $W^{\langle s \rangle}$. Следовательно, имеются гомоморфизмы, индуцированные соответствующими включениями:

$$(15) \quad C_k(u_0) = H_k((\partial_0 W)^{\{\leq k\}}, (\partial_0 W)^{\{\leq k-1\}}) \xrightarrow{\mathcal{J}_0} H_k(W^{\langle k \rangle}, W^{\langle k-1 \rangle}),$$

$$(16) \quad C_k(u_1) = H_k((\partial_1 W)^{\{\leq k\}}, (\partial_1 W)^{\{\leq k-1\}}) \xrightarrow{\mathcal{J}_1} H_k(W^{\langle k \rangle}, W^{\langle k-1 \rangle}).$$

2. Каждая $(-v)$ -траектория, начинающаяся в $(\partial_1 W)^{\{\leq k-1\}}$, достигает $\phi^{-1}(a_k)$. Поэтому существует непрерывное отображение

$$G_k: (\partial_1 W)^{\{\leq k-1\}} \times [a_k, b] \rightarrow \phi^{-1}([a_k, b]),$$

являющееся гомеоморфизмом на свой образ, причем для каждого x кривая $t \mapsto G_k(x, t)$ является репараметризованной v -траекторией, и $\phi(G_k(x, t)) = t$. Положим $I_k = [a_k, b]$. Мы получаем отображение пар

$$G_k: ((\partial_1 W)^{\{\leq k-1\}}, (\partial_1 W)^{\{\leq k-2\}}) \times (I_k, \partial I_k) \rightarrow (W^{\langle k \rangle}, W^{\langle k-1 \rangle}).$$

Зададим гомоморфизм

$$(17) \quad \mathcal{S}: C_{k-1}(u_1) \rightarrow H_*(W^{\langle k \rangle}, W^{\langle k-1 \rangle})$$

формулой $\mathcal{S}(x) = (G_k)_*(x \otimes \iota)$ (где $\otimes$ — произведение Кюннета и ι — фундаментальный класс пары $(I_k, \partial I_k)$).

3. Пусть $p \in S_k(\phi)$. Напомним, что $d(p)$ обозначает вложенный диск $D(p, v) \cap \phi^{-1}([a_k, b])$. Из условия $(\mathfrak{C})$ следует, что $\partial d(p) \subset W^{\langle k-1 \rangle}$. Мы получаем гомоморфизм

$$(18) \quad C_k(v) = H_k(W^{\{\leq k\}}, W^{\{\leq k-1\}}) \xrightarrow{\mathcal{J}} H_k(W^{\langle k \rangle}, W^{\langle k-1 \rangle}).$$

ТЕОРЕМА 5.5.

1. $H_*(W^{\langle k \rangle}, W^{\langle k-1 \rangle}) = 0$, если $*$ $\neq k$.
2. Гомоморфизм

$$(19) \quad L_k = (\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_0, \mathcal{J}, \mathcal{S}): C_k(u_1) \oplus C_k(u_0) \oplus C_k(v) \oplus C_{k-1}(u_1) \rightarrow H_k(W^{\langle k \rangle}, W^{\langle k-1 \rangle})$$

является изоморфизмом.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.6. Из теоремы 5.5 следует, в частности, что $H_k(W^{\langle k \rangle}, W^{\langle k-1 \rangle})$ является свободной абелевой группой ранга $\sharp S_k(\phi_1) + \sharp S_k(\phi_0) + \sharp S_k(\phi) + \sharp S_{k-1}(\phi_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем значение k и положим

$$a_k = \lambda, \quad a_{k+1} = \mu, \quad Z = T((\partial_1 W)^{\{\leq k-1\}}, v)|_{[\lambda, b]}$$

и, далее,

$$(20) \quad \Delta = \bigcup_{p \in S_k(\phi)} d(p),$$

$$(21) \quad R = Z \cup \Delta \cup (\partial_1 W)^{\{\leq k\}} \cup Y_{k+1}|_{\lambda},$$

$$(22) \quad S = W^{\langle k-1 \rangle}|_{[\lambda, b]},$$

так что $S \subset R \subset \phi^{-1}([\lambda, b])$. В следующей лемме изучение гомологий $(W^{\langle k \rangle}, W^{\langle k-1 \rangle})$ сводится к изучению пересечения этой пары с $\phi^{-1}([\lambda, b])$.

ЛЕММА 5.7. *Включение пар*

$$(23) \quad (R, S) \hookrightarrow (W^{\langle k \rangle}|_{[\lambda, b]}, W^{\langle k-1 \rangle}|_{[\lambda, b]}) \hookrightarrow (W^{\langle k \rangle}, W^{\langle k-1 \rangle}),$$

$$(24) \quad (\Delta \cup (Y_{k+1}|_{[a_k]}), Y_k|_{[a_k]}) \hookrightarrow (W^{\langle k \rangle}|_{[\lambda, \mu]}, W^{\langle k-1 \rangle}|_{[\lambda, \mu]})$$

индуцирует изоморфизм в гомологиях.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы покажем, что (24) индуцирует изоморфизм в гомологиях. (Включения из (23) рассматриваются аналогично.) Используя $(-v)$ -сдвиг в области $W^{\langle k \rangle}|_{[\lambda, \mu]} \setminus W^{\langle k-1 \rangle}|_{[\lambda, \mu]}$, легко доказать, что включение

$$(Y_k|_{[\lambda, \mu]} \cup Y_{k+1}|_{\lambda}, Y_k|_{\lambda}) \hookrightarrow (W^{\langle k \rangle}|_{[\lambda, \mu]}, W^{\langle k-1 \rangle}|_{[\lambda, \mu]})$$

является гомологической эквивалентностью. Пересечение множеств $Y_k|_{[\lambda, \mu]}$ и $Y_{k+1}|_{\lambda}$ лежит в $Y_k|_{\lambda}$, так что пространство $(Y_k|_{[\lambda, \mu]} \cup Y_{k+1}|_{\lambda})/Y_k|_{\lambda}$ гомеоморфно букету

$$Y_k|_{[\lambda, \mu]}/Y_k|_{\lambda} \vee Y_{k+1}|_{\lambda}/Y_k|_{\lambda}.$$

Включение $Y_k|_{[\lambda, \mu]}/Y_k|_{\lambda} \hookrightarrow \phi^{-1}([\lambda, \mu])/\phi^{-1}(\lambda)$ также является гомологической эквивалентностью (чтобы убедиться в этом, надо применить $(-v)$ -сдвиг в области $\phi^{-1}([\lambda, \mu]) \setminus Y_k|_{[\lambda, \mu]}$, а затем – вырезание). Пространство $(\Delta \cup Y_{k+1}|_{\lambda})/Y_k|_{\lambda}$ гомеоморфно букету

$$(\Delta/\partial\Delta) \vee (Y_{k+1}|_{\lambda}/Y_k|_{\lambda}).$$

Стандартные рассуждения из теории Морса позволяют отождествить гомотопический тип пары $(\phi^{-1}([\lambda, \mu]), \phi^{-1}(\lambda))$ с гомотопическим типом пары $(\Delta, \partial\Delta)$, что и завершает доказательство.

Итак, остается вычислить гомотопический тип R/S . Положим

$$\rho = R|_{\lambda}, \quad \sigma = S|_{\lambda}.$$

Заметим, что R получено из S приклеиванием четырех компактных подмножеств: $\phi_1^{-1}([\alpha_k, \alpha_{k+1}])$, $G_k(\phi_1^{-1}([\alpha_{k-1}, \alpha_k]) \times [\lambda, b])$, Δ , ρ . Каждые два из них пересекаются по некоторому подмножеству множества S . Следовательно,

$$R/S = ((\partial_1 W)^{\{\leq k\}}/(\partial_1 W)^{\{\leq k-1\}}) \vee \Sigma((\partial_1 W)^{\{\leq k-1\}}/(\partial_1 W)^{\{\leq k-2\}}) \vee ((\Delta \cup \rho)/\sigma),$$

где Σ – надстройка. Теперь мы займемся описанием пространства $(\Delta \cup \rho)/\sigma$. Так как $\Delta \cap \rho \subset \sigma$, то имеется гомеоморфизм

$$(25) \quad (\Delta/\partial\Delta) \vee (\rho/\sigma) \xrightarrow[\approx]{(i_1, i_2)} (\Delta \cup \rho)/\sigma.$$

Пространство $\Delta/\partial\Delta$ гомеоморфно букету всех пространств $d(p)/\partial d(p)$, и пространство ρ/σ гомеоморфно (посредством отображения $(-v)_{[\lambda, a]}^{\sim}$) пространству $((\partial_0 W)^{\{\leq k\}}/(\partial_0 W)^{\{\leq k-1\}})$. Итак, мы получили следующий гомеоморфизм:

$$(26) \quad R/S \approx ((\partial_1 W)^{\{\leq k\}}/(\partial_1 W)^{\{\leq k-1\}}) \vee \Sigma((\partial_1 W)^{\{\leq k-1\}}/(\partial_1 W)^{\{\leq k-2\}}) \vee \left(\bigvee_{p \in S_k(\phi)} d(p)/\partial d(p) \right) \vee ((\partial_0 W)^{\{\leq k\}}/(\partial_0 W)^{\{\leq k-1\}}).$$

Гомологии этого букета изоморфны

$$C_k(u_1) \oplus C_k(u_0) \oplus C_k(v) \oplus C_{k-1}(u_1).$$

Ясно, что образы прямых слагаемых этих групп в $H_k(W^{\langle k \rangle}, W^{\langle k-1 \rangle})$ равны $\text{Im } \mathcal{J}_1$, $\text{Im } \mathcal{J}_0$, $\text{Im } \mathcal{I}$, $\text{Im } \mathcal{S}$ соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.8. В качестве побочного продукта нашего доказательства получаем следующее: включение

$$(27) \quad (\Delta/\partial\Delta) \vee (\rho/\sigma) \xrightarrow{j} W^{\langle k \rangle}|_{[\lambda, \mu]}/W^{\langle k-1 \rangle}|_{[\lambda, \mu]}$$

является гомологической эквивалентностью и, следовательно, индуцирует изоморфизм

$$(28) \quad J: C_*(v) \oplus C_*(u_0) \xrightarrow{\cong} H_*(W^{\langle k \rangle}|_{[\lambda, \mu]}, W^{\langle k-1 \rangle}|_{[\lambda, \mu]}).$$

5.3. Граничные операторы, ассоциированные с фильтрациями морсовского типа. В предыдущем пункте мы видели, что $W^{\langle k \rangle}$ образует клеточную фильтрацию W . Поскольку $W^{\langle k \rangle} = \emptyset$ при $k < 0$, то гомология W может быть вычислена исходя из цепного комплекса, ассоциированного с фильтрацией. Именно, положим $E_k = H_k(W^{\langle k \rangle}, W^{\langle k-1 \rangle})$. Предложение 1.3 из [17; гл. 5] утверждает, что гомологии $H_*(W)$ изоморфны гомологиям комплекса (E_*, d_*) , где $d_k: E_k \rightarrow E_{k-1}$ – граничный оператор точной последовательности тройки $(W^{\langle k \rangle}, W^{\langle k-1 \rangle}, W^{\langle k-2 \rangle})$. В этом пункте мы вычислим матрицу этого граничного оператора по отношению к разложению E_* в прямую сумму, полученному в теореме 5.5. Положим $d'_s = L_s^{-1} \circ D_s \circ L_{s+1}$. Тогда d'_s задается (4×4) -матрицей гомоморфизмов групп. Чтобы описать элементы этой матрицы, напомним, что $C_*(u_1), C_*(u_0), C_*(v)$ сами являются цепными комплексами, и обозначим соответствующие граничные операторы посредством $\partial_*^{(1)}, \partial_*^{(0)}, \partial_*$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.9. Матрица для d'_{k+1} есть

$$(29) \quad \begin{pmatrix} \partial_{k+1}^{(1)} & 0 & 0 & \text{Id} \\ 0 & \partial_{k+1}^{(0)} & P_k & -\mathcal{H}_k(-v) \\ 0 & 0 & \partial_{k+1} & -N_k \\ 0 & 0 & 0 & -\partial_k^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Здесь $\mathcal{H}_k(-v)$ – оператор гомологического градиентного спуска (см. теорему 4.8), P_k, N_k – некоторые гомоморфизмы, которые будут определены в доказательстве.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В доказательстве будем использовать обозначения и определения из пп. 5.1 и 5.2.

Первые два столбца. Они получаются прямо из определения $\mathcal{J}_0, \mathcal{J}_1$: достаточно применить функториальность граничных операторов, ассоциированных с фильтрациями.

Третий столбец. Из леммы 5.7 следует, что достаточно вычислить класс гомологий элемента $\partial d(p)$ в $(W^{\langle k \rangle}|_{[\lambda, b]}, W^{\langle k-1 \rangle}|_{[\lambda, b]})$. Поскольку $\partial d(p)$ принадлежит $\phi^{-1}(\mu)$, достаточно вычислить класс гомологий $\partial d(p)$ в $(W^{\langle k \rangle}|_{[\lambda, \mu]}, W^{\langle k-1 \rangle}|_{[\lambda, \mu]})$. Гомологии этой пары изоморфны $C_k(v) \oplus C_k(u_0)$ (согласно замечанию 5.8). Легко убедиться, что проекция $[\partial d(p)]$ на первую компоненту прямой суммы равна $\partial_{k+1}([p])$. Символом P_k обозначим гомоморфизм проекции на вторую компоненту. На этом вычисление третьего столбца заканчивается.

Гомоморфизм N_k . Пусть $x \in C_k(u_1) = H_*((\partial_1 W)^{\{\leq k\}}, (\partial_1 W)^{\{\leq k-1\}})$.

Выберем представляющую x сингулярную цепь $\bar{x}$. Из условия (C) вытекает, что $(-v)$ спускает $\bar{x}$ до $\phi^{-1}(\mu)$; рассмотрим спущенную сингулярную цепь $\bar{\bar{x}}$ как цикл в паре

$$(W^{\langle k \rangle}|_{[\lambda, \mu]}, W^{\langle k-1 \rangle}|_{[\lambda, \mu]}).$$

Символом $N_k(x)$ обозначим проекцию элемента $J^{-1}([x])$ на прямое слагаемое $C_*(v)$ группы $C_*(v) \oplus C_*(u_0)$ (см. формулу (28)).

Напомним, что $C_k(v)$ – свободная абелева группа, порожденная элементами $[p]$, $p \in S_k(\phi)$. Запишем $N_k(x) = \sum_{p \in S_k(\phi)} \langle x, p \rangle [p]$. Тогда отображение $x \mapsto \langle x, p \rangle$ является гомоморфизмом $C_k(u_1) \rightarrow \mathbb{Z}$, который нам пригодится в дальнейшем. Теперь мы дадим интерпретацию числа $\langle x, p \rangle$ в случае, когда выполнены следующие ограничения на x :

x представлен ориентированным подмногообразием X многообразия $\partial_1 W$, принадлежащим $\text{Int}(\partial_1 W)^{\{\leq k\}}$ и трансверсальным к $D(p, -v) \cap \partial_1 W$.

Рассмотрим коориентированное $(n - k - 1)$ -мерное подмногообразие $B_p = D(p, -v) \cap \partial_1 W$ многообразия $\partial_1 W$. Из условия (C) вытекает, что $B_p \subset \phi_1^{-1}([\alpha_k, \alpha_n])$. Имеем следующую формулу для алгебраического индекса пересечения X с B_p :

$$(30) \quad \langle x, p \rangle = X \# B_p.$$

Итак,

$$(31) \quad N_k(x) = \sum_{p \in S_k(\phi)} (X \# B_p)[p].$$

Четвертый столбец. Пусть $x \in C_k(u_1) = H_k((\partial_1 W)^{\{\leq k\}}, (\partial_1 W)^{\{\leq k-1\}})$. Чтобы упростить обозначения, предположим, что x представлен ориентированным подмногообразием X многообразия $\partial_1 W$, $\dim X = k$, таким образом, что $X \subset (\partial_1 W)^{\{\leq k\}}$, $\partial X \subset (\partial_1 W)^{\{\leq k-1\}}$. Тогда из определения $\mathcal{S}(x)$ (см. п. 5.2) следует, что $d_{k+1}(\mathcal{S}(x))$ представляется суммой трех ориентированных особых многообразий с границей:

$$(32) \quad X - G_k(\partial X \times [a_{k+1}, b]) - G_k(X \times \{a_{k+1}\}).$$

Первый член соответствует верхнему члену четвертого столбца. Второй и третий члены (32) не являются циклами пары $(W^{(k)}, W^{(k-1)})$. Это можно поправить следующим образом. Каждая $(-v)$ -траектория, начинающаяся в ∂X , достигает $\phi^{-1}(a_k)$, и мы можем записать

$$(33) \quad G_k(\partial X \times [a_{k+1}, b]) = G_k(\partial X \times [a_k, b]) - G_k(\partial X \times [a_k, a_{k+1}]),$$

так что тогда $d_{k+1}(\mathcal{S}(x))$ представляется суммой

$$(34) \quad X - G_k(\partial X \times [a_k, b]) + Y,$$

где $Y = G_k(\partial X \times [a_k, a_{k+1}]) - G_k(\partial X \times \{a_{k+1}\})$. Теперь два последних члена в правой части (34) являются циклами в $(W^{(k)}, W^{(k-1)})$. Гомологический класс $G_k(\partial X \times [a_k, b])$ очевидно совпадает с $\mathcal{S}(\partial_k^{(1)}x)$. Несложно проверить, что $\mathcal{L}_k^{-1}(Y)$ совпадает с элементом $-N_k(x) - \mathcal{H}_k(-v)(x)$, на чем и заканчивается вычисление четвертого столбца.

5.4. Фильтрации морсовского типа регулярных накрытий кобордизмов.

В предыдущем пункте мы видели, что возможно вычислить гомологии $H_*(W)$ исходя из цепного комплекса E_* , ассоциированного с фильтрацией $W^{(k)}$. В этом пункте мы усилим этот результат и покажем, как восстановить простой гомотопический тип многообразия W .

Пусть $p: \tilde{W} \rightarrow W$ – регулярное накрытие W со структурной группой H . Для $A \subset W$ мы обозначим $p^{-1}(A)$ посредством $\tilde{A}$.

Фильтрация морсовского типа $W^{(k)}$, построенная в предыдущем пункте, позволяет определить фильтрацию $\tilde{W}^{(k)} = p^{-1}(W^{(k)})$ многообразия $\tilde{W}$. Прямое обобщение результатов предыдущего пункта приводит к следующему утверждению, описывающему структуру относительных гомологий $H_*(\tilde{W}^{(k)}, \tilde{W}^{(k-1)})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.10.

1. $H_s(\tilde{W}^{(k)}, \tilde{W}^{(k-1)}) = 0$, если $s \neq k$.
2. Положим $\tilde{E}_k = H_k(\tilde{W}^{(k)}, \tilde{W}^{(k-1)})$. Тогда $\tilde{E}_k$ – свободный $\mathbb{Z}H$ -модуль и существует изоморфизм $\mathbb{Z}H$ -модулей

$$(35) \quad \tilde{L}_k: \tilde{C}_k(u_1) \oplus \tilde{C}_k(u_0) \oplus \tilde{C}_k(v) \oplus \tilde{C}_{k-1}(u_1) \rightarrow \tilde{E}_k.$$

3. Пусть $\tilde{d}_{k+1}: \tilde{E}_{k+1} \rightarrow \tilde{E}_k$ – граничный оператор точной последовательности тройки $(\tilde{W}^{(k+1)}, \tilde{W}^{(k)}, \tilde{W}^{(k-1)})$. Тогда матрицей гомоморфизма $\tilde{d}'_{k+1} = (\tilde{L}_k)^{-1} \circ \tilde{d}_{k+1} \circ \tilde{L}_{k+1}$ является

$$(36) \quad \begin{pmatrix} \tilde{\partial}_{k+1}^{(1)} & 0 & 0 & \text{Id} \\ 0 & \tilde{\partial}_{k+1}^{(0)} & \tilde{P}_k & -\tilde{\mathcal{H}}_k(-v) \\ 0 & 0 & \tilde{\partial}_{k+1} & -\tilde{N}_k \\ 0 & 0 & 0 & -\tilde{\partial}_k^{(1)} \end{pmatrix}.$$

(Здесь $\widetilde{\mathcal{H}}_k(-v): \widetilde{C}_k(u_1) \rightarrow \widetilde{C}_k(u_0)$ – оператор гомологического градиентного спуска, ассоциированный с накрытием $\widetilde{W} \rightarrow W$, см. п. 4.4.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это предложение доказывается так же, как предложение 5.9. Мы остановимся только на тех моментах доказательства, которые существенны для дальнейшего, а именно, мы изложим построение цепей, представляющих образующие модулей $\widetilde{E}_k$, а также построение гомоморфизма $\widetilde{N}_k$.

Образующие модуля $\widetilde{E}_k$. Прежде всего, выберем для каждой точки $x \in S(\phi) \cup S(\phi_0) \cup S(\phi_1)$ некоторое ее поднятие $\tilde{x}$ в накрытие $\widetilde{W}$. Тогда для каждого $r \in S_k(\phi)$ определено поднятие $d(\tilde{r})$ диска $d(r)$ в W . Ясно, что $d(\tilde{r}) \subset \widetilde{W}^{(k)}$, $\partial d(\tilde{r}) \subset \widetilde{W}^{(k-1)}$. Определим $\widetilde{L}_k([\tilde{r}])$ как образ фундаментального класса пары $(d(\tilde{r}), \partial d(\tilde{r}))$ в $H_*(\widetilde{W}^{(k)}, \widetilde{W}^{(k-1)})$.

Образы элементов $[\tilde{q}]$, $[\tilde{t}]$ (где $q \in S_k(\phi_1)$, $t \in S_k(\phi_0)$) определяются аналогично.

Переходя к образующим четвертого прямого слагаемого, отметим, что поднятие $\tilde{q}$ определяет поднятие T_k многообразия $G_k(d(q) \times I_k)$ в $\widetilde{W}$. Пространство T_k является ориентированным топологическим многообразием с краем, так что определен его фундаментальный класс в $H_k(T_k, \partial T_k)$. Образ этого фундаментального класса в $H_k(\widetilde{W}^{(k)}, \widetilde{W}^{(k-1)})$ обозначим символом $[[\tilde{q}]]$ и определим $\widetilde{L}_k$ на компоненте $\widetilde{C}_{k-1}(u_1)$ формулой $\widetilde{L}_k([\tilde{q}]) = [[\tilde{q}]]$.

Гомоморфизм $\widetilde{N}_k$. Пусть $x \in \widetilde{C}_k(u_1) = H_k((\partial_1 \widetilde{W})^{\{\leq k\}}, (\partial_1 \widetilde{W})^{\{\leq k-1\}})$. Выберем сингулярную цепь $\tilde{x}$, представляющую x . Из условия (E) вытекает, что $(-v)$ спускает $\tilde{x}$ до $\phi^{-1}(a_{k+1})^\sim$. Результат спуска – сингулярная цепь $\bar{\tilde{x}}$ – есть цикл в паре

$$(\widetilde{W}^{(k)}|_{[\lambda, \mu]}, \widetilde{W}^{(k-1)}|_{[\lambda, \mu]}).$$

Аналогично лемме 5.7, включение

$$((\Delta \cup Y_{k+1}|_{a_k})^\sim, \tilde{Y}_k|_{a_k}) \hookrightarrow (\widetilde{W}^{(k)}|_{[\lambda, \mu]}, \widetilde{W}^{(k-1)}|_{[\lambda, \mu]})$$

индуцирует изоморфизм в гомологиях

$$\tilde{J}: \widetilde{C}_k(v) \oplus \widetilde{C}_{k-1}(u_0) \rightarrow H_*(\widetilde{W}^{(k)}|_{[\lambda, \mu]}, \widetilde{W}^{(k-1)}|_{[\lambda, \mu]}).$$

Символом $\widetilde{N}_k(x)$ обозначим проекцию элемента $\tilde{J}^{-1}([\tilde{x}])$ на первое слагаемое. Мы имеем эквивариантный аналог формул (30) и (31). Именно, для каждого $p \in S_k(\phi)$ выберем поднятие $\tilde{p} \in \widetilde{M}$. Напомним, что гомологические классы $[\tilde{p}]$ пар $(d(\tilde{p}), \partial d(\tilde{p}))$ образуют свободный базис модуля $\widetilde{C}_k(v)$. Запишем

$$\widetilde{N}_k(x) = \sum_{p \in S_k(\phi)} [\tilde{p}] \langle \langle x, p \rangle \rangle,$$

где $\langle \langle x, p \rangle \rangle \in \mathbb{Z}H$; тогда отображение $x \rightarrow \langle \langle x, p \rangle \rangle$ является гомоморфизмом $\mathbb{Z}H$ -модулей $\widetilde{C}_k(u_1) \rightarrow \mathbb{Z}H$. Предположим теперь, что x есть фундаментальный класс поднятия $\tilde{X}$ в $\partial_1 \widetilde{W}$ некоторого ориентированного многообразия $X \subset \partial_1 W$, трансверсального к $B_p = D(p, -v) \cap \partial_1 W$. Имеется поднятие $\tilde{B}_p$ многообразия $B_p \subset \partial_1 W$ в $\partial_1 \widetilde{W}$,

и, стало быть, для каждого $g \in H$ определен индекс пересечения $\tilde{X} \# \tilde{B}_p g \in \mathbb{Z}$. Выполняется следующее равенство:

$$(37) \quad \langle \langle x, p \rangle \rangle = \sum_{g \in H} (\tilde{X} \# \tilde{B}_p g) g,$$

и, таким образом,

$$(38) \quad \tilde{N}_k(x) = \sum_{p \in S_k(\phi), g \in H} (\tilde{X} \# \tilde{B}_p g) [\tilde{p}]g.$$

Итак, цепной комплекс $\{\dots \rightarrow \tilde{E}_k \xrightarrow{\tilde{d}_k} \tilde{E}_{k-1} \rightarrow \dots\}$ является свободным $\mathbb{Z}H$ -комплексом. Пункт 1 предложения 5.10 утверждает, что фильтрация $\tilde{W}^{(k)}$ является клеточной, поэтому $H_*(\tilde{E}_*) \approx H_*(\tilde{W})$ (и, как несложно показать, этот изоморфизм можно выбрать так, чтобы он коммутировал с $\mathbb{Z}H$ -действием).

Можно сказать и больше. Выберем C^1 -триангуляцию Δ многообразия W . Прообразы в $\tilde{W}$ симплексов триангуляции Δ определяют H -инвариантную триангуляцию многообразия $\tilde{W}$. Поэтому комплекс симплициальных цепей $C_*^\Delta(\tilde{W})$ многообразия $\tilde{W}$ является цепным комплексом свободных $\mathbb{Z}H$ -модулей. Выбрав и зафиксировав поднятия в $\tilde{W}$ симплексов триангуляции Δ , получим базис в этом комплексе.

С другой стороны, выбрав ориентации нисходящих дисков и поднятия в $\tilde{W}$ всех критических точек ϕ_0, ϕ_1, ϕ , получим $\mathbb{Z}H$ -базис в каждом из цепных комплексов $\tilde{C}(u_1)$, $\tilde{C}_*(u_0)$, $\tilde{C}_*(v)$. Изоморфизм $\tilde{L}_k$ переносит этот базис в $\tilde{E}_*$.

Чтобы сформулировать следующее предложение, нам нужны два определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.11.

1. Пусть R – кольцо. R -комплекс – это конечный цепной комплекс конечно-порожденных свободных правых R -модулей с фиксированными базисами.
2. Два $\mathbb{Z}H$ -комплекса C_* , D_* называются *просто гомотопически эквивалентными*, если существует гомотопическая эквивалентность $\phi: C_* \rightarrow D_*$ такая, что кручение $\tau(\phi) \in Wh(\mathbb{Z}H)$ равно нулю.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.12. $\mathbb{Z}H$ -комплексы $C_*(\tilde{W})$ и $\tilde{E}_*$ являются *просто гомотопически эквивалентными*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для замкнутых многообразий ($\partial W = \emptyset$) это предложение доказано в [3; приложение, теорема А.5]. В общем случае доказательство аналогично. Мы приведем лишь идею доказательства. Выберем C^1 -триангуляцию в W так, чтобы она удовлетворяла следующему условию ($\mathcal{T}$).

($\mathcal{T}$): Все подпространства $\partial_0 W$, $\partial_1 W$ являются симплициальными подкомплексами W . Все поверхности уровня $\phi^{-1}(a_i)$, $\phi_1^{-1}(\alpha_i)$, $\phi_0^{-1}(\beta_i)$ и диски $d(p)$, $d(q)$, $d(r)$, где $p \in S(\phi)$, $q \in S(\phi_0)$, $r \in S(\phi_1)$, являются симплициальными подкомплексами W . Для каждого k подпространства $W^{(k)}$ и подпространства R , S , определенные в (21) и (22), суть симплициальные подкомплексы W .

(Доказательство существования такой триангуляции представляет собой стандартное упражнение в теории триангуляции многообразий. В [3; с. 330–332] можно найти детальное доказательство аналогичного утверждения.)

Далее мы будем предполагать, что читатель знаком со статьей [3]. Чтобы согласовать наши обозначения с обозначениями из §3 работы [3], положим $C_* = C_*^\Delta(\widetilde{W})$, $C_*^{(k)} = C_*^\Delta(\widetilde{W}^{\langle k \rangle})$; тогда $\mathbb{Z}H$ -комплекс $\widetilde{E}_*$, определенный выше, есть в точности комплекс C_*^{gr} в обозначениях [3]. Из предложения 5.10 вытекает, что фильтрация $C_*^{(k)}$ комплекса C_* является *хорошей* (nice; определение хорошей фильтрации см. в [3; с. 310]).

Поэтому ([3; следствие 3.4]) существует каноническая цепная гомотопическая эквивалентность $\xi: C_*^{gr} \rightarrow C_*$. Гомотопический класс этой цепной гомотопической эквивалентности однозначно определяется следующими требованиями:

- F1) $\xi(C_k^{gr}) \subset C_*^{(k)}$ для каждого k ;
- F2) гомоморфизм $C_k^{gr} \rightarrow H_k(C_*^{(k)}, C_*^{(k-1)})$, индуцированный отображением ξ , совпадает с тождественным.

Определим $\mathbb{Z}G$ -комплекс $\mu(k)_*$, положив

$$(39) \quad \begin{cases} \mu(k)_j = 0, & \text{если } j \neq k, \\ \mu(k)_k = H_k(C_*^{(k)}, C_*^{(k-1)}). \end{cases}$$

Цепное отображение ξ определяет цепные гомотопические эквивалентности

$$(40) \quad \xi_k: \mu(k)_* \rightarrow C_*^{(k)} / C_*^{(k-1)}.$$

Нетрудно доказать по индукции, что если все отображения ξ_k являются простыми гомотопическими эквивалентностями, то и само ξ есть простая гомотопическая эквивалентность.

Остается показать, что каждое ξ_k – простая гомотопическая эквивалентность. Это мы сделаем в три шага.

Первый шаг: доказываем, что включение $(R, S) \hookrightarrow (W^{\langle k \rangle}, W^{\langle k-1 \rangle})$ индуцирует простую гомотопическую эквивалентность $\mathbb{Z}H$ -комплексов

$$(41) \quad j: C_*(\widetilde{R}, \widetilde{S}) \rightarrow C_*(\widetilde{W}^{\langle k \rangle}, \widetilde{W}^{\langle k-1 \rangle}) = C_*^{(k)} / C_*^{(k-1)}$$

(доказательство такое же, как в лемме 5.7).

Второй шаг: отображение ξ_k пропускается через гомотопическую эквивалентность $\xi'_k: \mu(k)_* \rightarrow C_*(\widetilde{R}, \widetilde{S})$. Гомологии $L_* = C_*(\widetilde{R}, \widetilde{S})$ равны нулю в размерностях, отличных от k , а модуль $H_k(\widetilde{R}, \widetilde{S}) \approx \widetilde{E}_k$ – свободный. Итак, вводя тривиальную фильтрацию $\{0, L_*\}$ в L_* , мы получаем цепную гомотопическую эквивалентность $\xi''_k: \mu(k)_* \rightarrow L_*$ (см. [3; следствие 3.4]), и несложно проверить, что ξ''_k гомотопно ξ'_k .

Третий шаг: можно показать, что ξ''_k расщепляется в сумму четырех гомотопических эквивалентностей, соответствующих расщеплениям R/S в букет четырех слагаемых в (26). Можно показать, что каждая из этих эквивалентностей является простой гомотопической эквивалентностью.

§ 6. Алгебраические леммы

Здесь мы будем пользоваться обозначениями из п. 1.2 и введем несколько новых. Скажем, что ϕ есть *U-простая гомотопическая эквивалентность*, если $\tau(\phi|U)$ равно нулю. Если значение U ясно из контекста, то вместо словосочетания *U-простая гомотопическая эквивалентность* мы говорим *простая гомотопическая эквивалентность*. Отметим, что если каждое $\phi_i: F_i \rightarrow D_i$ является изоморфизмом, то $\tau(\phi) = \sum_i (-1)^i [\phi_i]$.⁵

6.1. Лемма о конусоподобных цепных комплексах. Пусть C_* — R -комплекс, и пусть $d_k: C_k \rightarrow C_{k-1}$ — его граничные гомоморфизмы. Положим $E_k = C_k \oplus C_{k-1}$. Пусть для каждого k заданы изоморфизм $A_k: C_k \rightarrow C_k$ и гомоморфизм $d'_k: C_k \rightarrow C_{k-1}$. Пусть $\mathcal{D}_k: E_k \rightarrow E_{k-1}$ — гомоморфизм с матрицей $\begin{pmatrix} d_k & A_{k-1} \\ 0 & d'_{k-1} \end{pmatrix}$.

Предположим, что $\mathcal{D}_{k-1} \circ \mathcal{D}_k = 0$, так что $(E_*, \mathcal{D}_*)$ является цепным комплексом.

ЛЕММА 6.1.

1. Комплекс E_* гомотопически эквивалентен нулю.
2. $\tau(E_*) = \sum_i (-1)^{i+1} [A_i]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим конус L_* тождественного отображения $\text{Id}: C_* \rightarrow C_*$; мы имеем: $L_k = C_k \oplus C_{k-1}$, и матрицей граничного оператора $\Delta_k: L_k \rightarrow L_{k-1}$ является $\begin{pmatrix} d_k & \text{Id} \\ 0 & -d_{k-1} \end{pmatrix}$.

Ясно, что $\tau(L_*) = 0$. Мы знаем, что $(E, \mathcal{D}_*)$ — цепной комплекс, а это эквивалентно выполнению следующих условий:

1. d'_k — граничный оператор;
2. $d_k A_k + A_{k-1} d'_k = 0$ для каждого k .

Определим отображение $\lambda: E_* \rightarrow L_*$ следующим образом: $(c_k, c_{k-1}) \mapsto (c_k, A_{k-1} c_{k-1})$. Простое вычисление показывает, что λ — изоморфизм комплексов. Поэтому E_* гомотопически эквивалентен нулю и $\tau(L_*) = \tau(E_*) + \tau(\lambda) = \tau(\lambda)$. Но $\tau(\lambda) = \sum_i (-1)^{i+1} [A_i]$.

6.2. Кольцо $A[t]$. Пусть A — произвольное коммутативное кольцо с единицей. Положим $R = A[t]$. Рассмотрим вложение $j: A \hookrightarrow A[t]$ и проекцию $\pi: A[t] \twoheadrightarrow A[t]/tA[t] = A$. Тогда $\pi j = \text{id}$. Если C_* — R -комплекс, то комплекс $C_*^- = C_* \otimes_A R$ называется *R-расширением* комплекса C_* (или попросту *расширением*, если это не приводит к путанице).⁶ Пусть $f: C_* \rightarrow D_*$ — отображение A -комплексов. Отображение $f \otimes \text{id}: C_* \otimes R \rightarrow D_* \otimes R$ называется *R-расширением* отображения f . Мы будем обозначать R -расширение отображения f тем же символом f , если это не приводит к путанице. Отметим, что $C_*^- = C_*^- / tC_*^-$, так что $H_*(C_*^-) = 0$, если и только если $H_*(C_*) = 0$. Пусть U — подгруппа группы $A^\bullet$. Отображение $j_*: K_1(A|U) \rightarrow K_1(R|U)$ является мономорфизмом на прямое слагаемое; правым обратным к этому отображению является $\pi_*: K_1(R|U) \rightarrow K_1(A|U)$. Следующая лемма очевидна.

⁵Здесь мы придерживаемся соглашения о знаках, принятого в [4], так что наше кручение $\tau(C_*)$ отличается по знаку от кручения из [18].

⁶Почему мы выбрали обозначение C_*^- , читатель поймет в следующем параграфе (см. (50)).

ЛЕММА 6.2. *Комплекс C_*^- является U -просто гомотопически эквивалентным нулю тогда и только тогда, когда комплекс C_* является U -просто гомотопически эквивалентным нулю.*

СЛЕДСТВИЕ 6.3. *Пусть*

$$(42) \quad 0 \longrightarrow M_* \xrightarrow{\phi} N_* \longrightarrow P_* \longrightarrow 0$$

– точная последовательность R -комплексов такая, что P_* является R -расширением.

Отображение ϕ является U -простой гомотопической эквивалентностью тогда и только тогда, когда ϕ/t является U -простой гомотопической эквивалентностью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Точная последовательность (42) расщепляется как точная последовательность R -модулей, следовательно, она остается точной и после тензорного умножения на R/tR . Далее, гомологии комплекса P_* равны нулю тогда и только тогда, когда равны нулю гомологии комплекса P_*/tP_* , и, таким образом, ϕ/t является гомотопической эквивалентностью в том и только том случае, когда ϕ – гомотопическая эквивалентность. Далее, кручение отображения ϕ (соответственно, отображения ϕ/t) равно кручению комплекса P_* (соответственно, комплекса P_*/tP_*). Но $\tau(P_*) = j_*(\tau(P_*/tP_*))$, ибо P_* есть R -расширение.

§ 7. Условие $(\mathcal{C})$, фильтрации морсовского типа для морсовских отображений $M \rightarrow S^1$ и рациональность новиковских коэффициентов инцидентности в случае C^0 -общего положения

7.1. Условие $(\mathcal{C})$ и рациональность новиковских коэффициентов инцидентности в случае C^0 -общего положения. В этом параграфе мы перейдем наконец морсовским отображениям $M \xrightarrow{f} S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Мы будем использовать определения и обозначения из п. 2.4.

Предположим, что f примитивно, т.е. $f_*: H_1(M) \rightarrow H_1(S^1) = \mathbb{Z}$ – эпиморфно. Для упрощения записи предположим, что $1 \in S^1$ – регулярное значение функции f . Обозначим $f^{-1}(1)$ символом V . Напомним, что $\mathcal{C}: \overline{M} \rightarrow M$ – бесконечное циклическое накрытие, ассоциированное с f , и $F: \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}$ – поднятие функции f . Положим $V_\alpha = F^{-1}(\alpha)$, $W = F^{-1}([0, 1])$ и $V^- = F^{-1}([-\infty, 1])$. Кобордизм W есть результат разрезания M вдоль V . Образующая t структурной группы накрытия $\mathcal{C}$ выбрана так, что $V_\alpha t = V_{\alpha-1}$. Положим $W_s = W t^s$; тогда $\overline{M}$ есть объединение $\bigcup_{s \in \mathbb{Z}} W_s$, причем W пересекаются по многообразию V_{-s} .

Для каждого $k \in \mathbb{Z}$ ограничение $\mathcal{C}$ на V_k является диффеоморфизмом $V_k \rightarrow V$. Введем в M произвольную риманову метрику и поднимем ее до t -инвариантной римановой метрики на $\overline{M}$. Теперь W – риманов кобордизм и, более того, – циклический кобордизм по отношению к изометрии t^{-1} : $\partial_0 W = V_0 \rightarrow \partial_1 W = V_1$. Будем говорить, что v удовлетворяет условию $(\mathcal{C})$ ($\mathcal{C}$ – от слова *клеточный* (cellular) и $\mathcal{C}$ – от слова *круг* (circle)), если $(F|W)$ -градиент v удовлетворяет условию $(\mathcal{U})$ из п. 4.5. Множество f -градиентов v , удовлетворяющих $(\mathcal{C})$, будет обозначаться символом

$\mathcal{GC}(f)$. Из теоремы 4.12 следует, что множество $\mathcal{GC}\mathcal{T}(f) = \mathcal{GC}(f) \cap \mathcal{T}(f)$ является открытым и плотным подмножеством множества $\mathcal{T}(f)$ в C^0 -топологии.

Пусть $v \in \mathcal{GC}(f)$. Напомним, что в условии $(\mathcal{C}\mathcal{U})$ фигурирует упорядоченная функция Морса ϕ_1 на V_1 и ее градиент u_1 , а также упорядоченная функция Морса $\phi_0 = \phi_1 \circ t^{-1}$ на V_0 и ее градиент $u_0 = (t)_*(u_1)$. Определим упорядоченную функцию Морса $\phi_k = \phi_0 \circ t^k: V_k \rightarrow \mathbb{R}$ и ϕ_k -градиент $u_k = (t^{-k})_*(u_0)$.

ТЕОРЕМА 7.1. *Пусть $v \in \mathcal{GC}\mathcal{T}(f)$. Тогда каждый новиковский коэффициент инцидентности является рациональной функцией своего аргумента t .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $r, s \in S(f)$, $\text{ind } r = l + 1 = \text{ind } s + 1$. Можно считать, что поднятия $\bar{r}, \bar{s}$ критических точек r, s в $\bar{M}$ лежат в W . Тогда $n_k(r, s; v) = 0$ при $k < 0$.

Рассмотрим ориентированное подмногообразие $S_{\bar{r}} = D(\bar{r}, v) \cap V_0$ подмногообразия V_0 . Из условия $(\mathcal{C})$ вытекает, что $S_{\bar{r}} \subset (V_0)^{\{\leq l\}}$ и что множество $S_{\bar{r}} \setminus \text{Int}(V_0^{\{\leq l-1\}})$ компактно, так что определен фундаментальный класс $[S_{\bar{r}}]$ многообразия $S_{\bar{r}}$ в группе $H_l(V_0^{\{\leq l\}}, V_0^{\{\leq l-1\}})$. Применяя утверждение 1 теоремы 4.8, по индукции получаем, что для каждого k подмногообразие $X_k = (-v)_{[0, -k]}^{\sim}(S_{\bar{r}})$ многообразия V_{-k} лежит в $V_{-k}^{\{\leq l\}}$ и что $X_k \setminus \text{Int}(V_{-k}^{\{\leq l-1\}})$ компактно. Более того, фундаментальный класс многообразия X_k в $H_*(V_{-k}^{\{\leq l\}}, V_{-k}^{\{\leq l-1\}})$ совпадает с $\mathcal{H}_l^k(-v)([S_{\bar{r}}])$.

Положим $Y_k = B_{\bar{s}t^{k+1}} = D(\bar{s}t^{k+1}, -v) \cap V_{-k}$. Тогда Y_k — коориентированное $(n - l - 1)$ -мерное подмногообразие многообразия V_{-k} (где $n = \dim M$) и $Y_k \subset \phi_{-k}^{-1}([\alpha_l, \alpha_{n+1}])$. Поскольку v удовлетворяет условию трансверсальности, то $X_k \pitchfork Y_k$ и $n_{k+1}(r, s; v) = X_k \# Y_k$. Применяя формулу (30) к кобордизму W_{k+1} , получаем:

$$(43) \quad n_{k+1}(r, s; v) = \langle [X_k], \bar{s}t^{k+1} \rangle.$$

Обозначим $t^{-1}\mathcal{H}_l(-v)$ символом h ; тогда

$$(44) \quad n_{k+1}(r, s; v) = \langle h^k([S_{\bar{r}}])t^k, \bar{s}t^{k+1} \rangle = \langle h^k([\bar{S}_r]), \bar{s}t \rangle.$$

Стало быть, верна следующая формула:

$$n(r, s; v) = n_0(r, s; v) + t \sum_k \xi(A^k x) t^k,$$

где $A = h, x = [S_{\bar{r}}], \xi = \langle \cdot, \bar{s}t \rangle$. Теперь рациональность функции $n(r, s; v)$ вытекает из утверждения (2).

7.2. Новиковские коэффициенты инцидентности, ассоциированные с регулярным накрытием. В настоящем разделе мы обобщим конструкцию комплекса Новикова и изучим свойства рациональности для соответствующих коэффициентов инцидентности. Мы будем использовать определения и обозначения из пп. 1.2 и 2.4.

Пусть $f: M \rightarrow S^1$ — не гомотопное нулю морсовское отображение, $\mathcal{P}: M \rightarrow M$ — регулярное накрытие со структурной группой G . Как всегда, мы предполагаем, что

G абелева. Предположим, что $f \circ \mathcal{P}$ гомотопна нулю, тогда отображение $\mathcal{P}$ пропускается через $\mathcal{C}$:

$$(45) \quad \begin{array}{ccc} \widetilde{M} & \xrightarrow{p} & \overline{M} \\ \mathcal{P} \searrow & & \downarrow \mathcal{C} \\ & & M \end{array}$$

Следовательно, существует поднятие функции $f: M \rightarrow S^1$ до функции Морса $\widetilde{F}: \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$. Гомоморфизм $f_*: \pi_1 M \rightarrow \mathbb{Z}$ пропускается через гомоморфизм $\xi: G \rightarrow \mathbb{Z}$. Положим $H = \text{Ker } \xi$, $G_- = \xi^{-1}([-\infty, 0])$. Выберем (как и раньше при построении первоначального варианта комплекса Новикова, см. п. 2.4) ориентации нисходящих дисков критических точек f . Выберем, кроме того, поднятие каждой критической точки x функции f в многообразии $\widetilde{M}$. Пусть $v \in \mathcal{GT}(f)$. Поднимем v до G -инвариантного векторного поля на $\widetilde{M}$ (которое будем обозначать той же буквой v). Пусть $x, y \in S(f)$, $\text{ind } x = \text{ind } y + 1$. Обозначим символом $\Gamma(x, y, g)$ множество $(-v)$ -орбит, соединяющих $\widetilde{x}$ с $\widetilde{y}g$. Пусть $\gamma \in \Gamma(x, y, g)$. Тогда, как и ранее, определен знак $\varepsilon(\gamma) \in \{-1, 1\}$. Положим

$$\tilde{n}(x, y; v) = \sum_{g \in G} \left(\sum_{\gamma \in \Gamma(x, y, g)} \varepsilon(\gamma) \cdot g \right).$$

Тогда $\tilde{n}(x, y; v)$ — элемент $\widehat{\Lambda}$, и нетрудно показать, что $\tilde{n}(x, y; v) \in \widehat{\Lambda}_\xi$. Элемент $\tilde{n}(x, y; v)$ будет называться *новиковским коэффициентом инцидентности* (как и $n(x, y; v)$). Пусть $\widetilde{\mathcal{C}}_p(v)$ — свободный правый $\widehat{\Lambda}_\xi$ -модуль, натянутый на $S_p(f)$. Определим $\widehat{\Lambda}_\xi$ -гомоморфизм $\widetilde{\mathcal{D}}_p: \widetilde{\mathcal{C}}_p(v) \rightarrow \widetilde{\mathcal{C}}_{p-1}(v)$, полагая

$$\widetilde{\mathcal{D}}_p(x) = \sum_{y \in S_{p-1}(f)} y \cdot \tilde{n}(x, y; v).$$

Можно проверить, что $\widetilde{\mathcal{D}}_p \circ \widetilde{\mathcal{D}}_{p+1} = 0$. Таким образом, мы получили свободный цепной комплекс $\widetilde{\mathcal{C}}_*(v)$ с фиксированным базисом, называемый *комплексом Новикова*. Более того, существует цепная гомотопическая эквивалентность $\phi: \widetilde{\mathcal{C}}_*(v) \rightarrow C_*^\Delta(\widetilde{M}) \otimes_{\widehat{\Lambda}} \widehat{\Lambda}_\xi$ такая, что образ $\tau(\phi)$ в $K_1(\widehat{\Lambda}_\xi | U_\xi)$ равен нулю ([3; теорема 2.2]).

Ввиду теоремы 7.1 естественно предположить, что если $v \in \mathcal{GCT}(f)$, то новиковские коэффициенты инцидентности, соответствующие v , являются не просто числовыми рядами, а “рациональными функциями многих переменных”. Точнее говоря, естественно ожидать, что $\tilde{n}(x, y; v) \in \Lambda_{(\xi)}$. Это действительно так:

ТЕОРЕМА 7.2. Пусть $v \in \mathcal{GCT}(f)$. Тогда все новиковские коэффициенты инцидентности лежат в $\Lambda_{(\xi)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы происходит параллельно доказательству теоремы 7.1. Мы не будем приводить его полностью, а отметим только основные изменения, которые нужно сделать. Пусть $r, s \in S(f)$, $\text{ind } r = \text{ind } s + 1 = l + 1$. Можно считать, что все поднятия в $\widetilde{M}$ критических точек функции f в $\widetilde{M}$ лежат в $\widetilde{W}$. И так, мы получаем поднятие X' многообразия X до $\widetilde{V}_1$. Для $a \in S(f)$ положим $\bar{a} = p(\bar{a})$. Выберем элемент $\theta \in G$ такой, что $\xi(\theta) = -1$. Каждая критическая точка функции $F: \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}$ имеет вид $\bar{b}t^k$ с $k \in \mathbb{Z}$, $b \in S(f)$. Поднимем критическую точку $\bar{b}t^k \in \overline{M}$ до точки $\tilde{b}\theta^k \in \widetilde{M}$. Тогда для каждого k мы получаем поднятие Y'_k множества Y_k в множество $\widetilde{V}_{-k} \subset \widetilde{M}$ такое, что $Y'_k = Y'_0\theta^k$. Как и в конце п. 4.5, определим эндоморфизм $\tilde{h}_l(-v)$ свободного правого $\mathbb{Z}H$ -модуля $H_*(\widetilde{V}_0^{\{\leq l\}}, \widetilde{V}_0^{\{\leq l-1\}})$ формулой $\tilde{h}_l(-v) = \tilde{\mathcal{H}}_l(-v) \circ (\theta^{-1})_*$. Так как мы рассматриваем только один f -градиент, будем писать $\tilde{h}_s$ вместо $\tilde{h}_s(-v)$.

Положим

$$\tilde{n}_k(r, s; v) = \sum_{g: \xi(g) = -k} \left(\sum_{\gamma \in \Gamma(r, s; g)} \varepsilon(\gamma) g \right).$$

Тогда $\tilde{n}(r, s; v) = \sum_{k \geq 0} \tilde{n}_k(r, s; v)$ и выполнено следующее:

$$(46) \quad \tilde{n}_{k+1}(r, s; v) = \sum_{g \in H} (\tilde{X}_k \# \tilde{B}_{\tilde{s}g\theta^{k+1}}) g \theta^{k+1}$$

$$(47) \quad = \sum_{g \in H} (\tilde{X}_k \theta^{-k} \# \tilde{B}_{sg\theta}) g \theta^{k+1} = \langle [\tilde{X}_k \theta^{-k}], \tilde{s}\theta \rangle \theta^{k+1}.$$

Применяя теорему 4.10, по индукции получаем, что $[\tilde{X}_k \theta^{-k}] = \tilde{h}^k([\tilde{X}_0])$. И так,

$$(48) \quad \tilde{n}(r, s; v) = \tilde{n}_0(r, s; v) + \sum_{k \geq 0} \langle \tilde{h}^k([\tilde{X}_0]), \tilde{s}\theta \rangle \theta^{k+1}$$

и этот последний элемент лежит в $\Lambda_{(\xi)}$ (чтобы доказать это, достаточно применить соответствующее обобщение утверждения (2)).

ЗАМЕЧАНИЕ 7.3. Приведем еще одну формулу для новиковских коэффициентов инцидентности, которая нам будет полезна в дальнейшем (она следует из (38)):

$$(49) \quad \sum_s \tilde{n}_{k+1}(r, s; v)[\tilde{s}] = \tilde{N}_l(\tilde{h}^k([\tilde{X}_0])\theta^{k+1}).$$

7.3. Фильтрации морсовского типа, построенные по морсовскому отображению $M \rightarrow S^1$. Мы будем использовать определения и обозначения пп. 7.1, 7.2. Пусть $v \in \mathcal{GC}\mathcal{T}(f)$.

Рассмотрим фильтрацию $W^{\langle k \rangle}$ кобордизма W , соответствующую векторному полю v , и введем t -инвариантную фильтрацию в множестве V^- , положив

$$V_{\langle k \rangle}^- = \bigcup_{s \geq 0} t^s W^{\langle k \rangle}.$$

Эта фильтрация в V^- индуцирует G_- -инвариантную фильтрацию $\tilde{V}_{\langle k \rangle}^-$ в множестве $\tilde{V}^-$. В настоящем разделе мы будем заниматься восстановлением простого гомотопического типа $\mathbb{Z}G$ -комплекса $C_*^\Delta(\tilde{M})$ исходя из информации, содержащейся в последовательных факторах фильтрации $V_{\langle k \rangle}^-$. (В теории Морса, конечно, уже есть процедура такого рода: возьмем функцию Морса $g: M \rightarrow \mathbb{R}$ и построим соответствующий комплекс Морса по g и по накрытию $\mathcal{P}$. Процедура, которую мы собираемся предложить в этом разделе, имеет то преимущество, что она лучше приспособлена к новиковским гомологиям многообразия.) Следующее ниже предложение является естественным продолжением теоремы 5.5 и предложений 5.9 и 5.10. Нам потребуется несколько определений. Положим

$$(50) \quad \tilde{C}_*^-(u_1) = \tilde{C}_*(u_1) \otimes_{\mathbb{Z}H} \mathbb{Z}G_-, \quad \tilde{C}_*^-(v) = \tilde{C}_*(v) \otimes_{\mathbb{Z}H} \mathbb{Z}G_-.$$

Это — $\mathbb{Z}G_-$ -комплексы. Продолжим $\mathbb{Z}H$ -гомоморфизмы $\tilde{\partial}_*: \tilde{C}_*(v) \rightarrow \tilde{C}_{*-1}(v)$, $\tilde{\partial}_*^{(1)}: \tilde{C}_*(u_1) \rightarrow \tilde{C}_{*-1}(u_1)$ по $\mathbb{Z}G_-$ -линейности до $\mathbb{Z}G_-$ -гомоморфизмов $\tilde{C}_*^-(v) \rightarrow \tilde{C}_{*-1}^-(v)$, и, соответственно, $\tilde{C}_*^-(u_1) \rightarrow \tilde{C}_{*-1}^-(u_1)$. Продолженные гомоморфизмы будем обозначать теми же символами $\tilde{\partial}_*^{(1)}$, $\tilde{\partial}_*$. Выберем какой-нибудь элемент $\theta \in G_{(-1)}$. Имеется отождествление: $\mathbb{Z}G_- = \mathbb{Z}H[\theta]$. Отождествим $\mathbb{Z}H$ -подмодуль $\tilde{C}_*(u_1)\theta$ с $\tilde{C}_*(u_0)$. Гомоморфизмы $\tilde{\mathcal{H}}_k(-v): \tilde{C}_*(u_1) \rightarrow \tilde{C}_*(u_0)$ и $\tilde{P}_k: \tilde{C}_*(v) \rightarrow \tilde{C}_*(u_0)$ можно рассматривать как гомоморфизмы со значениями в $\tilde{C}_*^-(u_1)$. Продолжим их по $\mathbb{Z}G_-$ -линейности на все $\tilde{C}_*^-(u_1)$, $\tilde{C}_*^-(v)$ (сохраняя те же обозначения для продолжений). Положим $\tilde{h}_k = \tilde{\mathcal{H}}_k(-v)\theta^{-1}: \tilde{C}_*^-(u_1) \rightarrow \tilde{C}_*^-(u_1)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.4.

1. $H_s(\tilde{V}_{\langle k \rangle}^-, \tilde{V}_{\langle k-1 \rangle}^-) = 0$, если $s \neq k$.
2. Положим $\tilde{\mathcal{E}}_k = H_k(\tilde{V}_{\langle k \rangle}^-, \tilde{V}_{\langle k-1 \rangle}^-)$. Тогда $\tilde{\mathcal{E}}_k$ — свободный $\mathbb{Z}G_-$ -модуль и существует изоморфизм $\mathbb{Z}G_-$ -модулей

$$(51) \quad \tilde{\mathcal{L}}_k: \tilde{C}_k^-(u_1) \oplus \tilde{C}_k^-(v) \oplus \tilde{C}_{k-1}^-(u_1) \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathcal{E}}_k.$$

3. Пусть $\tilde{D}_{k+1}: \tilde{\mathcal{E}}_{k+1} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_k$ — граничный оператор точной последовательности тройки $(\tilde{V}_{\langle k+1 \rangle}^-, \tilde{V}_{\langle k \rangle}^-, \tilde{V}_{\langle k-1 \rangle}^-)$. Тогда матрица гомоморфизма $\tilde{D}'_{k+1} = \tilde{\mathcal{L}}_k^{-1} \circ \tilde{D}_{k+1} \circ \tilde{\mathcal{L}}_{k+1}$ по отношению к разложению $\tilde{\mathcal{E}}_k$ в прямую сумму, указанному в (51), равна

$$(52) \quad \begin{pmatrix} \tilde{\partial}_{k+1}^{(1)} & \tilde{P}_{k+1} & \text{Id} - \theta \tilde{h}_k(-v) \\ 0 & \tilde{\partial}_{k+1} & \tilde{N}_k \\ 0 & 0 & -\tilde{\partial}_k^{(1)} \end{pmatrix}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы рассмотрим лишь частный случай $\widetilde{M} = \overline{M}$ (тогда p является тождественным отображением). Общий случай отличается от этого частного случая в основном усложнением в обозначениях (надо добавить тильды и заменить t на θ).

Рассмотрим фильтрацию $W^{\prec k \succ}$ кобордизма W , введенную в формуле (10). Положим $V_{\prec k \succ}^- = \bigcup_{s \geq 0} t^s W^{\prec k \succ}$. Несложно показать, что включения

$$(53) \quad (V_{\prec k \succ}^-, V_{\prec k-1 \succ}^-) \hookrightarrow (V_{\prec k \succ}^-, V_{\langle k-1 \rangle}^-) \hookrightarrow (V_{\langle k \rangle}^-, V_{\langle k-1 \rangle}^-)$$

являются гомотопическими эквивалентностями (это доказывается так же, как лемма 5.3). Рассмотрим подпространство

$$(54) \quad W^{[k]} = (\partial_1 W)^{\{\leq k\}} \cup Y_k \cup Z_k = W^{\prec k \succ} \setminus ((\partial_0 W)^{\{\leq k\}} \setminus (\partial_0 W)^{\{\leq k-1\}})$$

кобордизма W . Очевидно, что

$$W^{\langle k-1 \rangle} \subset W^{[k]} \subset W^{\prec k \succ},$$

поэтому существует вложение пар

$$(55) \quad (W^{[k]}, W^{\langle k-1 \rangle}) \xrightarrow{\lambda} (V_{\prec k \succ}^-, V_{\langle k-1 \rangle}^-).$$

Ясно, что

$$(56) \quad H_k(W^{[k]}, W^{\langle k-1 \rangle}) \approx C_k(u_1) \oplus C_k(v) \oplus C_{k-1}(u_1),$$

$$(57) \quad H_*(W^{[k]}, W^{\langle k-1 \rangle}) = 0, \quad \text{если } * \neq k.$$

ЛЕММА 7.5. *Индукцированный включением λ гомоморфизм*

$$(58) \quad H_*(W^{[k]}, W^{\langle k-1 \rangle}) \xrightarrow{\lambda_*} H_*(V_{\prec k \succ}^-, V_{\langle k-1 \rangle}^-)$$

инъективен и $H_(V_{\prec k \succ}^-, V_{\langle k-1 \rangle}^-)$ есть $\mathbb{Z}[t]$ -расширение модуля $\text{Im } \lambda_*$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$W^{[k]} \cap \phi^{-1}([0, a_k]) = W^{\langle k-1 \rangle} \cap \phi^{-1}([0, a_k]).$$

С помощью вырезания можно убрать множество $\phi^{-1}([0, a_k])$ как из $W^{[k]}$, так и из $W^{\langle k-1 \rangle}$. Применяя эту процедуру к множеству $t^s W$ при каждом s , легко убедиться в том, что $H_*(V_{\prec k \succ}^-, V_{\langle k-1 \rangle}^-)$ — модуль, полученный $\mathbb{Z}[t]$ -расширением из своего $\mathbb{Z}$ -подмодуля

$$H_*(W^{[k]} \cap \phi^{-1}([a_k, b]), W^{\langle k-1 \rangle} \cap \phi^{-1}([a_k, b])).$$

Последний модуль изоморфен $H_*(W^{[k]}, W^{\langle k-1 \rangle})$ и лемма доказана.

Теперь выражение (48) непосредственно следует из (29); достаточно заметить, что в пространстве V^- подпространство $\partial_0 W$ совпадает с $\partial_1 W \cdot t$.

Итак $\tilde{\mathcal{E}}_*$ — свободный цепной комплекс над $\mathbb{Z}G_-$. Фильтрация $\tilde{V}_{\langle k \rangle}^-$ пространства $\tilde{V}^-$ индуцирует соответствующую фильтрацию в сингулярных цепных комплексах. Эти фильтрации являются хорошими (согласно утверждениям 1) и 2) предложения 7.4), так что гомологии $H_*(\tilde{V}^-)$ изоморфны гомологиям комплекса $\tilde{\mathcal{E}}_*$. Можно также вычислить простой гомотопический тип комплекса $C_*^\Delta(\tilde{M})$ исходя из комплекса $\tilde{\mathcal{E}}_*$. А именно, выберем какую-нибудь C^1 -триангуляцию многообразия M . Тогда $\tilde{M}$ также триангулировано. Выбрав для каждого симплекса многообразия M его поднятие в $\tilde{M}$, получим естественный $\mathbb{Z}G$ -базис в комплексе симплициальных цепей $C_*^\Delta(\tilde{M})$. Таким образом, $C_*^\Delta(\tilde{M})$ есть $\mathbb{Z}G$ -комплекс. Введем базис в комплексе $\tilde{\mathcal{E}}_*$, используя изоморфизмы $\mathcal{L}_k$ (см. формулу (51)).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.6. $\mathbb{Z}G$ -комплексы $C_*^\Delta(\tilde{M})$ и $\tilde{\mathcal{E}}_* \otimes_{\mathbb{Z}G_-} \mathbb{Z}G$ являются просто гомотопически эквивалентными (т.е. существует гомотопическая эквивалентность ϕ между ними с кручением $\tau(\phi) \in Wh(G) = \overline{K}_1(\mathbb{Z}G | G)$, равным нулю).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем триангуляцию многообразия M так, чтобы V был симплициальным подкомплексом в M и чтобы получающаяся триангуляция кобордизма W удовлетворяла условию $(\mathcal{T})$ (см. доказательство предложения 5.12).

Тогда

$$C_*^\Delta(\tilde{M}) = C_*^\Delta(\tilde{V}^-) \otimes_{\mathbb{Z}G_-} \mathbb{Z}G.$$

Достаточно доказать, что существует цепная гомотопическая эквивалентность $\mathbb{Z}G_-$ -комплексов

$$(59) \quad \psi: \tilde{\mathcal{E}}_* \rightarrow C_*^\Delta(\tilde{V}^-)$$

такая, что $\tau(\psi) \in K_1(\mathbb{Z}G_- | H)$ равно нулю (напомним, что такие цепные гомотопические эквивалентности ψ называются H -простыми). Заметим, что каждое пространство $\tilde{V}_{\langle k \rangle}^-$ является $\mathbb{Z}G_-$ -инвариантным симплициальным подкомплексом $\tilde{V}^-$. Поэтому $C_*^\Delta(\tilde{V}_{\langle k \rangle}^-)$ образует фильтрацию в $C_*^\Delta(\tilde{V}^-)$. Из предложения 7.4 следует, что эта фильтрация является хорошей. Итак, существует каноническая цепная гомотопическая эквивалентность

$$(60) \quad \psi: \tilde{\mathcal{E}}_* \rightarrow C_*^\Delta(\tilde{V}^-),$$

однозначно определенная условиями F1) и F2) (конец п. 5.4). Определим цепной комплекс $\tilde{\mathcal{E}}(k)_*$ следующей формулой:

$$(61) \quad \tilde{\mathcal{E}}(k)_* = \begin{cases} 0, & \text{если } * \neq k, \\ \tilde{\mathcal{E}}_k, & \text{если } * = k. \end{cases}$$

Достаточно показать, что каждое цепное отображение

$$(62) \quad \psi_k: \tilde{\mathcal{E}}(k)_* \rightarrow C_*^\Delta(\tilde{V}_{\langle k \rangle}^- / \tilde{V}_{\langle k-1 \rangle}^-)$$

является H -простой гомотопической эквивалентностью. (Наше предложение выводится отсюда по индукции.)

ЛЕММА 7.7. *Цепные отображения*

$$(63) \quad C_*^\Delta(\tilde{V}_{\prec k}^-, \tilde{V}_{\prec k-1}^-) \rightarrow C_*^\Delta(\tilde{V}_{\prec k}^-, \tilde{V}_{\langle k-1 \rangle}^-) \hookrightarrow C_*^\Delta(\tilde{V}_{\langle k \rangle}^-, \tilde{V}_{\langle k-1 \rangle}^-),$$

индуцированные включениями, являются H -простыми гомотопическими эквивалентностями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что для каждого k включение

$$J: C_*^\Delta(\tilde{V}_{\prec k}^-) \hookrightarrow C_*^\Delta(\tilde{V}_{\langle k \rangle}^-)$$

является H -простой гомотопической эквивалентностью.

Факторкомплекс $C_*(\tilde{V}_{\langle k \rangle}^- / \tilde{V}_{\prec k}^-)$ является $\mathbb{Z}G_-$ -расширением некоторого $\mathbb{Z}H$ -комплекса (заметим, что $\mathbb{Z}G_- = (\mathbb{Z}H)[\theta]$). Поэтому нам достаточно доказать, что J/θ есть H -простая гомотопическая эквивалентность. Цепное отображение J/θ совпадает с цепной гомотопической эквивалентностью, индуцированной включением

$$(64) \quad C_*^\Delta(\tilde{W}^{\prec k}, (\partial_0 \tilde{W})^{\{\leq k\}}) \xrightarrow{J'} C_*^\Delta(\tilde{W}^{\langle k \rangle}, (\partial_0 \tilde{W})^{\{\leq k\}}).$$

Доказательство того, что J' есть простая гомотопическая эквивалентность, мы оставляем читателю в качестве несложного упражнения из теории простых гомотопических типов. (Указание: заметим, что $\tilde{W}^{\langle k \rangle}$ получено из $\tilde{W}^{\prec k}$ добавлением подмножества, гомеоморфного цилиндру $\phi_0^{-1}([\alpha_k, \alpha_{k+1}]) \times [0, 1]$.)

Отображение ψ_k , очевидно, пропускается через цепное отображение

$$(65) \quad \psi'_k: \tilde{\mathcal{E}}(k)_* \rightarrow C_*^\Delta(\tilde{V}_{\prec k}^- / \tilde{V}_{\langle k-1 \rangle}^-),$$

и поэтому достаточно показать, что ψ'_k — простая гомотопическая эквивалентность. Отображение ψ_k определяется с точностью до цепной гомотопии следующим условием: для каждого $x \in \tilde{\mathcal{E}}(k)_*$ гомологический класс $\psi_k(x)$ есть сам x . Поэтому можно считать, что для каждого $p \in S_k(\phi)$ элемент $\psi'_k([p])$ равен фундаментальному классу $[d(\tilde{p}), \partial d(\tilde{p})]$ пары

$$(W^{\prec k}, W^{\langle k-1 \rangle}) \subset (V_{\prec k}^-, \tilde{V}_{\langle k-1 \rangle}^-).$$

Поэтому можно предполагать, что ψ'_k есть $\mathbb{Z}G_-$ -расширение, и чтобы доказать, что $\tau(\psi'_k | H) = 0$, достаточно проверить, что $\tau(\psi'_k / \theta | H) = 0$. Доказательство последнего равенства аналогично доказательству предложения 5.12.

7.4. Замена базиса. В этом пункте мы продолжаем изучение цепного комплекса $\tilde{\mathcal{E}}_*$, введенного в предыдущем пункте. Мы сравним три цепных комплекса: $\tilde{\mathcal{E}}_*$, $C_*^\Delta(\tilde{M}) \otimes_{\Lambda} \Lambda_{(\xi)}$ и $\tilde{\mathcal{E}}_*(v)$. В [3] мы показали, что для каждого f -градиента v , удовлетворяющего условию трансверсальности, $\hat{\Lambda}_\xi$ -комплексы $C_*^\Delta(\tilde{M}) \otimes_{\Lambda} \hat{\Lambda}_\xi$ и $\tilde{\mathcal{E}}_*(v)$ гомотопически эквивалентны, и можно выбрать гомотопическую эквивалентность ϕ таким образом, что $\tau(\phi | U_\xi) \in K_1(\hat{\Lambda}_\xi | U_\xi)$ равно нулю. (Кручение отображения ϕ в группе $\overline{K}_1(\hat{\Lambda}_\xi)$ в общем случае не равно нулю, как мы увидим в дальнейшем.)

Если предположить дополнительно, что $v \in \mathcal{UC}\mathcal{T}(f)$, то можно получить более сильный результат. А именно, опираясь на предложение 7.4, мы построим цепную гомотопическую эквивалентность

$$\tilde{\mathcal{C}}_*(v) \xrightarrow{\psi} \tilde{\mathcal{E}}_* \otimes_{\mathbb{Z}G_-} \Lambda(\xi)$$

$\Lambda(\xi)$ -комплексов (напомним, что в теореме 7.2 мы доказали, что комплекс $\tilde{\mathcal{C}}_*(v)$ определен над $\Lambda(\xi)$). Далее мы получим формулу, выражающую кручение этой гомотопической эквивалентности через гомоморфизмы $\tilde{h}_k$.

Положим $\tilde{\tilde{\mathcal{E}}}_* = \tilde{\mathcal{E}}_* \otimes_{\mathbb{Z}G_-} \Lambda(\xi)$.

Мы сделаем замену базиса в комплексе $\tilde{\tilde{\mathcal{E}}}_*$, так что комплекс Новикова $\tilde{\mathcal{C}}_*(v)$ будет свободным подкомплексом, порожденным некоторыми элементами нового базиса. Окажется, что факторкомплекс стягиваем.

Новый базис вводится в определении 7.8. Каждая критическая точка $p \in S_k(\phi)$ определяет элемент $\{\tilde{p}\}$ нового базиса. Геометрический смысл этих элементов может быть описан следующим образом: образующая $[\tilde{p}]$ соответствует части $D(\tilde{p}, v) \cap (\phi \circ p)^{-1}([a_k, a_{k+1}])$ нисходящего диска, а новая образующая $\{\tilde{p}\}$ соответствует *всему* нисходящему диску $D(\tilde{p}, v)$.

Замечания о терминологии.

1. Чтобы не перегружать обозначения, отождествим $\tilde{\mathcal{E}}_k$ с $\tilde{C}_k^-(u_1) \oplus \tilde{C}_k^-(v) \oplus \tilde{C}_{k-1}^-(u_1)$. Элементы базиса в этих трех прямых слагаемых будут обозначаться символами $[\tilde{p}]$, $[\tilde{r}]$, $[[\tilde{q}]]$, где $p \in S_k(\phi_1)$, $r \in S_k(f)$, $q \in S_{k-1}(\phi_1)$. Эти элементы (в указанном порядке) образуют базис $\mathcal{B}_k$ в модуле $\tilde{\mathcal{E}}_k$. Естественный изоморфизм, отождествляющий $\mathbb{Z}G_-$ -подмодуль $\tilde{C}_k^-(u_1) \oplus 0 \oplus 0 \subset \tilde{\mathcal{E}}_k$ с подмодулем $0 \oplus 0 \oplus \tilde{C}_k^-(u_1) \subset \tilde{\mathcal{E}}_{k+1}$, будет обозначаться символом σ_k .
2. Граничный оператор в комплексах $\tilde{\tilde{\mathcal{E}}}_*$ и $\tilde{\mathcal{E}}_* \otimes_{\Lambda} \hat{\Lambda}_\xi$ будем обозначать тем же символом $\tilde{D}_*$, что и граничный оператор в комплексе $\tilde{\mathcal{E}}_*$.
3. Везде, где это не ведет к неясности, мы будем опускать индексы $k+1, k$. Например, мы пишем $\tilde{\partial}^{(1)}$ вместо $\tilde{\partial}_{k+1}^{(1)}$ и $\tilde{\partial}_k^{(1)}$. Мы часто будем опускать символ v в обозначениях, так как в оставшейся части параграфа мы будем рассматривать только один f -градиент. Мы будем использовать эти обозначения начиная с определения 7.8.
4. Положим

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{C}}_*(u_1) &= \tilde{C}_*(u_1) \otimes_{\mathbb{Z}H} \Lambda(\xi), \\ \tilde{\tilde{C}}_*(v) &= \tilde{C}_*(v) \otimes_{\mathbb{Z}H} \Lambda(\xi). \end{aligned}$$

Эти модули являются прямыми слагаемыми в $\tilde{\tilde{\mathcal{E}}}_*$.

5. Отождествим $\Lambda(\xi)$ с его образом в $\hat{\Lambda}_\xi$ при каноническом вложении. Аналогичным образом, отождествим $\tilde{\tilde{\mathcal{E}}}_*$ с его образом в $\hat{\mathcal{E}}_* = \tilde{\mathcal{E}}_* \otimes_{\Lambda} \hat{\Lambda}_\xi$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.8. Пусть $r \in S_k(f)$. Положим

$$(66) \quad \{\tilde{r}\} = [\tilde{r}] - \sum_{j=0}^{\infty} \sigma \tilde{h}^j(\tilde{P}([\tilde{r}])) \theta^j.$$

Заметим прежде всего, что элемент $\sum_{j=0}^{\infty} \tilde{h}^j(a) \theta^j$ лежит в $\tilde{C}_*(u_1)$ (для любого $a \in \tilde{C}_*(u_1)$). Поэтому $\{\tilde{r}\} \in \tilde{\mathcal{E}}_*$. Далее, элемент $\{\tilde{r}\} - [\tilde{r}]$ есть линейная комбинация (с $\Lambda_{(\xi)}$ -коэффициентами) элементов $[[\tilde{q}]]$, и, следовательно, элементы $[\tilde{p}]$, $\{\tilde{r}\}$, $[[\tilde{q}]]$ (здесь $r \in S_k(\phi)$, $q \in S_{k-1}(\phi_1)$, $p \in S_k(\phi)$) образуют некоторый базис $\mathcal{B}'_k$ модуля $\tilde{\mathcal{E}}_k$, и матрица перехода от $\mathcal{B}_k$ к $\mathcal{B}'_k$ является произведением элементарных матриц.

Обозначим символом $\tilde{\mathcal{C}}'_k(v)$ свободный $\Lambda_{(\xi)}$ -подмодуль $\tilde{\mathcal{E}}_k$, порожденный элементами $\{\tilde{p}\}$, $p \in S_k(\phi)$. Определим гомоморфизм $\delta: \tilde{\mathcal{C}}'_k(v) \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}'_{k-1}(v)$, положив

$$\delta_k(\{\tilde{r}\}) = \sum_{r' \in S_{k-1}(\phi)} \{\tilde{r}'\} \cdot \tilde{n}(r, r'; v).$$

(Таким образом, градуированный модуль $\tilde{\mathcal{C}}'_*(v)$, снабженный дифференциалом δ_* , изоморфен комплексу Новикова $\tilde{\mathcal{C}}_*(v)$.)

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.9. Матрица граничного оператора $\tilde{D}_{k+1}: \tilde{\mathcal{E}}_{k+1} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_k$ в базисах $\mathcal{B}'_{k+1}$, $\mathcal{B}'_k$ равна

$$(67) \quad \begin{pmatrix} \tilde{\partial}_{k+1}^{(1)} & 0 & \text{Id} - \tilde{h}_{k+1}\theta \\ 0 & \delta_{k+1} & \eta_{k+1} \\ 0 & 0 & \Delta_k \end{pmatrix}.$$

(Здесь η_{k+1} и Δ_k — некоторые гомоморфизмы.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первый и третий столбцы не представляют трудностей. Чтобы двигаться дальше, введем несколько определений. Пусть $x \in \hat{\mathcal{E}}_*$. Нам нужно будет рассматривать “часть x между уровнями a и b функции $\tilde{F}$ ”. Это понятие вводится в следующем определении.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.10.

1. Одночлен кольца $\hat{\Lambda}_\xi$ — это элемент вида ng , $n \in \mathbb{Z}$, $g \in G$. Одночлен кольца $\hat{\mathcal{E}}_*$ — это элемент вида $x \cdot ng$, где $n \in \mathbb{Z}$, $g \in G$ и x — один из элементов базиса $\mathcal{B}_*$.
2. Высота $ht(\lambda)$ одночлена $\lambda = ng$ в $\hat{\Lambda}_\xi$, где $n \neq 0$, равна по определению $\xi(g)$. Высота $ht(l)$ одночлена l в $\hat{\mathcal{E}}_*$ — это подмножество $\mathbb{R}$, определяемое следующим образом:

$$(68) \quad ht(l) = \begin{cases} \xi(g) + [0, 1], & \text{если } l = [\tilde{r}] \cdot ng, n \neq 0, g \in G, \\ \xi(g) + [0, 1], & \text{если } l = [[\tilde{r}]] \cdot ng, n \neq 0, g \in G, \\ \xi(g) + 1, & \text{если } l = [\tilde{p}] \cdot ng, n \neq 0, g \in G. \end{cases}$$

3. Пусть $A \subset \mathbb{R}$, $\lambda \in \hat{\Lambda}_\xi$, $\lambda = \sum_{g \in G} n_g g$. Положим $\lambda_A = \sum_{n_g \neq 0, \xi(g) \in A} n_g g$.

Пусть $x \in \hat{\Lambda}_\xi$. Определим x_A как сумму всех одночленов μ из разложения x по базису $\mathcal{B}_k$, удовлетворяющих $ht(\mu) \subset A$.

4. Пусть $A = \{a\}$. Мы будем писать x_a вместо x_A .

5. Пусть $n \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in \hat{\mathcal{E}}_*$. Положим $\Sigma_n \lambda = (\tilde{D}(\lambda_{[n, \infty[}))_n$.

ЛЕММА 7.11. Пусть $n \geq 0$, $r \in S_k(\phi)$. Тогда

$$(69) \quad \Sigma_n(\{\tilde{r}\}) = \tilde{h}^n(\tilde{P}([\tilde{r}]))\theta^n,$$

$$(70) \quad \{\tilde{r}\}_{[-n-1, -n]} = -\sigma(\Sigma_{-n}(\{\tilde{r}\})).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

ЛЕММА 7.12. Пусть $A \in \mathbb{Z}G$, $\text{supp } A \subset \xi^{-1}([n, \infty[)$, где $n \in \mathbb{Z}$. Пусть $R = \{\tilde{r}\}A$ и $m \leq n$. Тогда

$$(71) \quad R_{[m-1, \infty[} = R_{[m, \infty[} - \sigma(\Sigma_m(R)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $A = g$, $g \in G$, утверждение легко вытекает из леммы 7.11. Общий случай сводится к случаю $A = g$, $g \in G$, по линейности.

ЛЕММА 7.13. Для каждого $n \geq 0$ выполнено:

$$(72) \quad (\delta\{\tilde{r}\})_{[-n-1, \infty[} = (\delta\{\tilde{r}\})_{[-n, \infty[} - \sigma(\Sigma_{-n}(\delta\{\tilde{r}\})) + \tilde{N}\tilde{h}^n(\tilde{P}([\tilde{r}]))\theta^n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$(73) \quad (\delta\{\tilde{r}\})_{[-n-1, \infty[} = \sum_{r' \in S_{k-1}(\phi)} \{\tilde{r}\} \cdot (\tilde{n}(r, r'))_{[-n, \infty[} + \sum_{r' \in S_{k-1}(\phi)} \{\tilde{r}\} \cdot (\tilde{n}(r, r'))_{-n-1}.$$

По лемме 7.12 первый член в правой части (73) равен сумме двух первых членов в правой части (72). Второй член равен $\tilde{N}\tilde{h}^n(\tilde{P}([\tilde{r}]))\theta^n$, что следует из формулы (49).

ЛЕММА 7.14. Пусть $n \geq 0$. Тогда

$$(74) \quad \tilde{D}(\{\tilde{r}\}_{[-n, \infty[}) = (\delta\{\tilde{r}\})_{[-n, \infty[} + \tilde{h}^n(\tilde{P}([\tilde{r}]))\theta^n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по n . Случай $n = 0$ очевиден. Предположим, что формула (74) выполнена для некоторого целого n . Тогда, в частности,

$$(75) \quad \tilde{D}(\delta\{\tilde{r}\}_{[-n, \infty[}) = -\tilde{\partial}^{(1)}\tilde{h}^n(\tilde{P}([\tilde{r}]))\theta^n = \Sigma_{-n}(\delta\{\tilde{r}\}).$$

Далее,

$$(76) \quad \tilde{D}(\{\tilde{r}\}_{[-n-1, -n]}) = (-\tilde{h}^n\tilde{P}([\tilde{r}])) + \tilde{h}^{n+1}\tilde{P}([\tilde{r}])\theta + \tilde{N}\tilde{h}^n\tilde{P}([\tilde{r}]) + \sigma\tilde{\partial}^{(1)}\tilde{h}^n\tilde{P}([\tilde{r}]))\theta^n$$

и, что вытекает из леммы 7.13,

$$(77) \quad (\delta\{\tilde{r}\})_{[-n-1, \infty[} - (\delta\{\tilde{r}\})_{[-n, \infty[} = \tilde{N}\tilde{h}^n\tilde{P}([\tilde{r}]))\theta^n + \sigma\tilde{\partial}^{(1)}\tilde{h}^n\tilde{P}([\tilde{r}]))\theta^n.$$

Из двух предыдущих формул легко вывести, что утверждение (74) верно и для числа $n + 1$.

Теперь вычисление второго столбца матрицы $\tilde{D}_{k+1}$ завершено, так как из леммы 7.14 следует, что $\tilde{D}\{\tilde{r}\} = \delta\{\tilde{r}\}$.

7.5. Гомотопическая эквивалентность $\tilde{\mathcal{C}}_*(v) \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_*$ и ее кручение. Итак, мы построили вложение $I: \tilde{\mathcal{C}}_*(v) \hookrightarrow \tilde{\mathcal{E}}_*$. Рассмотрим факторкомплекс $\mathcal{Q}_*$. Это свободный $\Lambda_{(\xi)}$ -комплекс, и $\mathcal{Q}_k = \tilde{C}_k(u_1) \oplus \tilde{C}_{k-1}(u_1)$. Матрица граничного оператора $\nabla_k: \mathcal{Q}_k \rightarrow \mathcal{Q}_{k-1}$ равна

$$(78) \quad \begin{pmatrix} \tilde{\partial}_k^{(1)} & 1 - \tilde{h}_k\theta \\ 0 & \Delta_{k-1} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что гомоморфизм $1 - \tilde{h}_k\theta: \tilde{C}_k(u_1) \rightarrow \tilde{C}_k(u_1)$ является изоморфизмом, так как $\det(1 - \tilde{h}_k\theta)$ имеет вид $1 + \theta\xi$ с $\xi \in \mathbb{Z}H$, а такие элементы обратимы в $\Lambda_{(\xi)}$. Применяя лемму 6.1, получаем, что I — цепная гомотопическая эквивалентность и что кручение $\tau(I) \in \overline{K}_1(\Lambda_{(\xi)})$ равно $\sum_i (-1)^{i+1} \alpha_i$, где α_i — класс изоморфизма $(1 - \tilde{h}_i\theta)$. Используя специальные свойства гомоморфизма $(1 - \tilde{h}_k\theta)$, можно еще упростить выражение для кручения $\tau(I)$. В следующей лемме A — коммутативное кольцо с единицей, $R = A[t]$, $S = \{P \in R \mid P = 1 + tQ(t)\}$, $\tilde{R} = S^{-1}R$, L — свободный конечно-порожденный R -модуль, $\tilde{L} = S^{-1}L$.

ЛЕММА 7.15. Пусть $\xi: L \rightarrow L$ — гомоморфизм. Тогда класс изоморфизма $1 + \xi\theta: \tilde{L} \rightarrow \tilde{L}$ в группе $\overline{K}_1(\tilde{R})$ равен единице $\det(1 + \xi\theta)$ кольца $\tilde{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n = \text{rk } L$. Рассмотрим класс обратимых $(n \times n)$ -матриц M над $\tilde{R}$, удовлетворяющих свойству $[M] = [\det M]$ в $\overline{K}_1(\tilde{R})$. Ясно, что этот класс содержит верхнетреугольные матрицы. Заметим также, что этот класс замкнут относительно элементарных операций. Поэтому остается доказать, что матрицу $(1 + \xi\theta)$ можно привести элементарными операциями к верхнетреугольной матрице, элементы которой лежат в $\tilde{R}$. Это несложно сделать, и мы оставим это читателю в качестве упражнения.

Итак, наше вложение $I: \tilde{\mathcal{C}}_*(v) \hookrightarrow \tilde{\mathcal{E}}_*$ является цепной гомотопической эквивалентностью и его кручение $\tau(I) \in \overline{K}_1(\Lambda_{(\xi)})$ удовлетворяет равенству

$$(79) \quad \tau(I) = \left[\prod_k \left(\det(1 - \tilde{h}_k\theta) \right)^{(-1)^{k+1}} \right].$$

Отметим также, что мы выбрали базисы в $\tilde{\mathcal{C}}_*(v)$ и $\tilde{\mathcal{E}}_*$ специальным образом: они построены по одному и тому же семейству поднятий критических точек f до $\tilde{M}$. Более того, мы потребовали, что поднятия критических точек f до $\tilde{M}$ принадлежали $\tilde{W}$.

Более того, это семейство поднятий было выбрано таким образом, что все поднятия в $\tilde{M}$ критических точек лежат в $\tilde{W}$.

Если мы отбросим эти ограничения на семейство поднятий, то наша формула (79) для кручения останется верной, но будет утверждать только равенство двух элементов группы $\overline{K}_1(\Lambda_{(\xi)} \mid G)$. С помощью предложения 7.6 выводим отсюда следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 7.16. *Существует цепная гомотопическая эквивалентность*

$$\phi: \widetilde{\mathcal{C}}_*(v) \rightarrow \mathcal{C}_*^\Delta(\widetilde{M}) \otimes_{\Lambda} \Lambda_{(\xi)}$$

такая, что

$$(80) \quad \tau(\phi | G) = \left[\prod_k \det(1 - \tilde{h}_k \theta)^{(-1)^{k+1}} \right].$$

§ 8. Доказательство основной теоремы

Мы будем использовать обозначения предыдущего параграфа. Множество всех f -градиентов Купки–Смейла, удовлетворяющих $(\mathfrak{C}\mathcal{Y})$, будет обозначаться символом $\mathcal{G}\mathcal{H}\mathcal{S}\mathcal{C}(f)$. Мы покажем, что это множество удовлетворяет заключению теоремы. В самом деле, первое утверждение теоремы выполнено, так как $(\mathfrak{C}\mathcal{Y})$ является C^0 -открытым и плотным условием и так как $\mathcal{G}\mathcal{H}\mathcal{S}\mathcal{C}(f)$ плотно в $\mathcal{G}\mathcal{H}\mathcal{S}(f)$. Первая часть второго утверждения следует из теоремы 7.2. Остается проверить, что $\zeta_L(-v) \in \Lambda_{(\xi)}$ и что образ ζ -функции $\zeta_L(-v)$ в $\overline{K}_1(\Lambda_{(\xi)} | G)$ равен элементу

$$\left[\prod_m \det(1 - \tilde{h}_m \theta)^{(-1)^{m+1}} \right].$$

Для того чтобы это проделать, нам нужно еще одно описание оператора $\tilde{h}_m$.

8.1. Гомологический градиентный спуск (третий вариант). Напомним, что $\phi_1: V_1 \rightarrow \mathbb{R}$ — функция Морса, а u_1 — δ -разделенный ϕ_1 -градиент. Пусть $p \in S_m(\phi_1)$. Положим

$$R(p) = (D_\delta(p, u_1) \cup V_1^{\{\leq m-1\}}) / V_1^{\{\leq m-1\}}.$$

Это пространство гомотопически эквивалентно сфере S^m . Пусть $k \in \mathbb{Z}$. Положим

$$Q_k^{[m]} = \widetilde{V}_k^{[m]}(\delta) / \widetilde{V}_k^{\{\leq m-1\}}$$

(где, как обычно, $\widetilde{A} = \mathcal{P}^{-1}(A)$). Группа H действует на $Q_k^{[m]}$, оставляя точку $\alpha_k = [\widetilde{V}_k^{\{\leq m-1\}}]$ неподвижной. Поднятие $\tilde{p}\theta$ точки p в $\widetilde{M}$ определяет поднятие $R(\tilde{p})$ пространства $R(p)$ в $\widetilde{M}$. Имеется следующее равенство:

$$Q_k^{[m]} = \bigvee_{\substack{p \in S_m(\phi_1), \\ h \in H, \xi(h)=k}} R(\tilde{p}) \cdot h.$$

Образующая m -й группы гомологий пространства $R(\tilde{p})$, соответствующая выбранной ориентации диска $D(p, v)$, будет обозначаться символом $\rho(\tilde{p})$. Тогда $\mathbb{Z}H$ -модуль $H_*(Q_k^{[m]})$ является свободным, и семейство $\{\rho(\tilde{p})\}_{p \in S_m(\phi_1)}$ является базисом этого

модуля. Несложно проверить, что оператор градиентного спуска $(-v)^{\rightsquigarrow}$ определяет непрерывное H -эквивариантное отображение $v\downarrow: Q_k^{[m]} \rightarrow Q_{k-1}^{[m]}$, переводящее α_k в α_{k-1} . Кроме того, следующая диаграмма коммутативна:

$$(81) \quad \begin{array}{ccc} H_*(\tilde{V}_k^{\{\leq m\}}, \tilde{V}_k^{\{\leq m-1\}}) & \xrightarrow{\tilde{\mathcal{H}}(-v)} & H_*(\tilde{V}_{k-1}^{\{\leq m\}}, \tilde{V}_{k-1}^{\{\leq m-1\}}) \\ \uparrow \approx & & \uparrow \approx \\ H_*(Q_k^{[m]}) & \xrightarrow{(v\downarrow)_*} & H_*(Q_{k-1}^{[m]}) \end{array}$$

Мы оставляем читателю построение отображения $v\downarrow$ в качестве упражнения по теории гомологического градиентного спуска.

8.2. Вычисление ζ -функции. Обозначим символом $\text{Cl}^{[s]}(-v)$ множество всех замкнутых орбит поля $(-v)$, пересекающих множество $V^{\{\leq s\}}(\delta) \setminus V^{\{\leq s-1\}}$. Из свойства $(\mathfrak{C}\mathcal{Y})$ вытекает, что $\text{Cl}(-v)$ является объединением непересекающихся подмножеств $\text{Cl}^{[s]}(-v)$. Положим

$$\eta_s(-v) = \sum_{\gamma \in \text{Cl}^{[s]}(-v)} \varepsilon(\gamma) \frac{\pi([\gamma])}{m(\gamma)}.$$

Так как

$$\ln \det(1 - \theta \tilde{h}_m) = - \sum_{k > 0} \frac{\text{Tr}(\theta \tilde{h}_m)^k}{k},$$

то достаточно будет доказать, что для любого s выполнено:

$$(82) \quad (-1)^s \sum_{k > 0} \frac{\text{Tr}(\theta \tilde{h}_s)^k}{k} = \eta_s(-v).$$

Фиксируем теперь значение s . Мы будем для краткости писать Cl вместо $\text{Cl}^{[s]}(-v)$. Для того чтобы доказать равенство (82), нам потребуется перевести наши исходные данные на язык теории неподвижных точек.

Мы будем говорить, что точка $a \in \beta \setminus \{\omega\}$ является G -неподвижной точкой отображения $(v\downarrow)^k$, если $(v\downarrow)^k(a) = a \cdot g$, $g \in G$. Элемент $g \in G_{(-k)}$ однозначно определяется из вышеприведенного равенства; мы будем обозначать этот элемент символом $g(a)$. Множество всех G -неподвижных точек отображения $(v\downarrow)^k$ будет обозначаться $GF(k)$.

Множество всех G -неподвижных точек отображения $(v\downarrow)^k$ с данным $g(a) = g$ будет обозначаться символом $GF(k, g)$. Таким образом, $GF(k) = \bigsqcup_{g \in G_{(-k)}} GF(k, g)$.

По аналогии с обычной теорией неподвижных точек нетрудно определить понятия кратности $\mu(a)$ и индекса $\text{ind } a$ неподвижной точки $a \in GF(k)$.

Пусть $a \in GF(k)$. Положим $a_i = (v\downarrow)^i(a)$. Пусть $\hat{a}_i$ есть (единственная) точка множества β , принадлежащая G -орбите точки a_i . Множество всех точек $\hat{a}_i$ назовем *квазиорбитой точки a* и обозначим символом $Q(a)$; это множество конечно и число элементов в нем равно $k/\mu(a)$.

Рассмотрим интегральную кривую γ поля $(-v)$ в многообразии $\widetilde{M}$, удовлетворяющую $\gamma(0) = a$ (где $a \in GF(k)$). Для некоторого $T > 0$ выполнено

$$\gamma(T) = (v\downarrow)^k(a) = a \cdot g(a) \in \widetilde{V}_{-k}.$$

Отображение $P \circ \gamma: [0, T] \rightarrow M$ является замкнутой орбитой поля $(-v)$. Таким образом, мы получили отображение $\Gamma: GF(k) \rightarrow \text{Cl}$, образ которого состоит в точности из всех $\gamma \in \text{Cl}$, удовлетворяющих условию $f_*([\gamma]) = -k$.

Для любого $\gamma \in \text{Cl}_k$ множество $\Gamma^{-1}(\gamma)$ является квазиорбитой некоторой точки $a \in GF_k$. (Заметим также, что множество $P(\Gamma^{-1}(\gamma))$ есть пересечение орбиты γ с многообразием V .)

Для любой точки $a \in \Gamma^{-1}(\gamma)$ выполнено следующее: $g(a) = \pi([\gamma])$, $\varepsilon(\gamma) = \text{ind } a$, $\mu(\gamma) = \mu(a)$. Поэтому ряд

$$\nu(-v) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{a \in GF_k} (\text{ind } a) \cdot g(a)$$

совпадает с $\eta_s(-v)$.

Чтобы доказать нашу теорему, осталось проверить, что

$$\nu(-v) = (-1)^s \sum_{k>0} \frac{\text{Tr}(\theta \tilde{h}_s)^k}{k}.$$

Это равенство вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 8.1. $\text{Tr}(\theta \tilde{h}_s)^k = (-1)^s \sum_{a \in GF(k)} (\text{ind } a) \cdot g(a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\beta = Q_0^{[s]}$. Множество $GF(k, g)$ есть множество неподвижных точек композиции следующих непрерывных отображений:

$$\beta \xrightarrow{(v\downarrow)^n} B_{(-k)} = \bigvee_{h \in G_{(-k)}} \beta \cdot h \xrightarrow{\pi_g} \beta,$$

где π_g есть отображение, отправляющее каждую компоненту букета кроме β_g в точку ω . Компонента же β_g переводится в β и отображение на этой компоненте совпадает с отображением $x \mapsto xg^{-1}$.

Точка $\omega \in \beta$ является неподвижной точкой композиции $\pi_g \circ (v\downarrow)^k$. Индекс точки ω равен 1. Теперь достаточно применить формулу Лефшеца–Дольда для числа неподвижных точек, и доказательство леммы 8.1 (а вместе с ней и доказательство основной теоремы) закончено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Pajitnov A. V. Rationality and exponential growth properties of the boundary operators in the Novikov Complex // Math. Res. Lett. 1996. V. 3. P. 541–548.
- [2] Пажитнов А. В. Рациональность граничных операторов в комплексе Новикова в случае общего положения // Алгебра и анализ. 1997. Т. 9. №5. С. 92–139.
- [3] Pajitnov A. V. On the Novikov complex for rational Morse forms // Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. 1995. V. 4. №2. P. 297–338.
- [4] Milnor J. Whitehead Torsion // Bull. Amer. Math. Soc. 1966. V. 72. P. 358–426.
- [5] Pajitnov A. V. Surgery on the Novikov Complex // K-theory. 1996. V. 10. P. 323–412.
- [6] Pajitnov A. V. Simple homotopy type of Novikov Complex for closed 1-forms and Lefschetz ζ -functions of the gradient flow // e-print dg-ga/9706014 26 June 97.
- [7] Hutchings M., Lee Y. J. Circle-valued Morse theory, Reidemeister torsion and Seiberg–Witten invariants of 3-manifolds // e-print dg-ga/9612004 3 December 1996.
- [8] Pajitnov A. V. C^0 -generic properties of boundary operators in Novikov complex // e-print math.DG/9812157; to appear in Adv. Math. Sci.
- [9] Milnor J. Lectures on the h -Cobordism Theorem. Princeton: Princeton Univ. Press, 1965.
- [10] Morse M. Calculus of variations in the large // American Mathematical Society Colloquium Publications. V. 18, 1934.
- [11] Thom R. Sur une partition en cellules associée à une fonction sur une variété // C. R. Acad. Sci. Paris. 1949. V. 228. P. 973–975.
- [12] Smale S. Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four // Ann. Math. 1961. V. 74. P. 391–406.
- [13] Witten E. Supersymmetry and Morse theory // J. Differential Geom. 1982. V. 17. №2. P. 661–692.
- [14] Новиков С. П. Многозначные функции и функционалы. Аналог теории Морса // Докл. АН СССР. 1981. Т. 260. С. 31–35.
- [15] Smale S. Differential dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. V. 73. P. 747–817.
- [16] Novikov S. P. Quasiperiodic structures in topology // Topological Methods in Modern Mathematics. Houston, TX: Publish or Perish, 1993. P. 223–235.
- [17] Дольд А. Лекции по алгебраической топологии. М.: Мир, 1976.
- [18] Тураев В. Г. Кручение Райдемайстера в теории узлов // УМН. 1986. Т. 41. №1. С. 119–182.

Université de Nantes, France

E-mail: pajitnov@math.univ-nantes.fr

Поступила в редакцию

22.06.1998