Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Платонов, Жесткость для групп с радикалом, когомологии конечных групп и проблемы арифметичности, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 1, 171–180

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm119>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 16:18:48

УДК 512.74

Сергею Петровичу Новикову посвящается

ЖЕСТКОСТЬ ДЛЯ ГРУПП С РАДИКАЛОМ, КОГОМОЛОГИИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП И ПРОБЛЕМЫ АРИФМЕТИЧНОСТИ

В. П. Платонов

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	171
2. Жесткость и проблемы арифметичности для полупростых групп	173
3. Жесткость и проблемы арифметичности для групп с радикалом	174
4. Классы сопряженности конечных подгрупп	176
5. Группы целочисленных матриц с конечным числом образующих	178
Список литературы	180

1. Введение

Пусть $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ – линейная алгебраическая группа, определенная над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. Подгруппа $\Gamma \subset G$ называется арифметической подгруппой G , если Γ соизмерима с $G(\mathbb{Z}) = G \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. Абстрактная группа Δ называется арифметической, если она изоморфна арифметической подгруппе подходящей $\mathbb{Q}$ -определенной алгебраической группы. Напомним, что две подгруппы $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ называются соизмеримыми, если их пересечение $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ имеет конечный индекс в Γ_1 и Γ_2 .

Теория арифметических групп является одной из глубоких областей современной математики. Мы отсылаем к [9] за изложением наиболее фундаментальных результатов этой теории. Однако так случилось, что следующая базисная проблема теории арифметических групп оставалась нерешенной до самого последнего времени.

ПРОБЛЕМА 1. Пусть Δ – конечное расширение арифметической группы Γ , т. е. Γ есть подгруппа конечного индекса в Δ . Является ли Δ арифметической группой?

Естественность проблемы 1, которую мы будем называть проблемой арифметичности, очевидна.

Борель и Серр в [1] заметили, что положительное решение проблемы 1 повлечет за собой положительное решение следующей когомологической проблемы.

Пусть F – конечная группа автоморфизмов арифметической группы Γ . Тогда естественно определяется первое когомологическое множество $H^1(F, \Gamma)$.

ПРОБЛЕМА 2. Будет ли множество $H^1(F, \Gamma)$ конечным?

Борель и Серр в [1] доказали конечность в ряде случаев, однако в общем случае проблема 2 оставалась открытой. С другой стороны, они заметили также, что решение проблемы 2 будет следовать из положительного решения следующей проблемы.

ПРОБЛЕМА 3. Пусть Δ – конечное расширение арифметической группы Γ . Будет ли Δ иметь конечное число классов сопряженности конечных подгрупп?

Нетрудно показать, что любое конечное расширение арифметической группы Γ будет изоморфно конечно порожденной подгруппе группы $GL_n(\mathbb{Z})$ для подходящего n . И мы имеем следующую более общую проблему, сформулированную в [8] более 30 лет назад.

ПРОБЛЕМА 4. Пусть Γ – подгруппа $GL_n(\mathbb{Z})$ с конечным числом образующих. Верно ли, что Γ имеет конечное число классов сопряженности конечных подгрупп?

Недавно в наших работах с Ф. Груневальдом (см. [3], [4]) было получено решение всех сформулированных выше проблем. И главная цель настоящей статьи – дать обзор этих результатов.

Наиболее неожиданным оказалось решение проблемы арифметичности (проблема 1): существуют конечные расширения Δ арифметической группы Γ , которые не являются арифметическими.

В то же время мы доказали в [4], что проблема 3 имеет положительное решение, что влечет положительное решение проблемы 2.

Хотя в общем случае проблема арифметичности имеет отрицательное решение, класс арифметических групп, для которых существуют неарифметические конечные расширения, оказывается сравнительно узким. Одним из основных наших результатов является

ТЕОРЕМА 1. Пусть Γ – арифметическая подгруппа $\mathbb{Q}$ -определенной линейной алгебраической группы G . Предположим, что связная компонента единицы $G(\mathbb{R})^0$ вещественной группы Ли $G(\mathbb{R})$ не имеет простого фактора, изоморфного $PSL_2(\mathbb{R})$, так что проекция группы $\Gamma \cap G(\mathbb{R})^0$ в этот фактор является дискретной подгруппой. Тогда всякое конечное расширение Δ группы Γ арифметично.

СЛЕДСТВИЕ 1. Всякое конечное расширение разрешимой арифметической группы является арифметическим.

Доказательство теоремы 1 довольно трудное и базируется на новых результатах о жесткости для арифметических подгрупп алгебраических групп с радикалом. Пусть G_1, G_2 – линейные алгебраические группы, определенные над $\mathbb{Q}$, и $\Gamma_1 \subset G_1, \Gamma_2 \subset G_2$ – арифметические подгруппы. Проблемы жесткости обычно имеют дело с вопросом: когда изоморфизм между арифметическими группами Γ_1 и Γ_2 может быть расширен до рационального (или почти рационального) изоморфизма между алгебраическими группами G_1 и G_2 ? Для $\mathbb{Q}$ -простых алгебраических групп G_1, G_2 присоединенного типа результаты Маргулиса [6], Мостова [7] и Прасада [10] дают положительное решение проблем жесткости при условии на вещественные ранги G_1 и G_2 .

Для не полупростых групп нетрудно построить примеры, когда нет никакой эффективной связи между изоморфизмами арифметических подгрупп и рациональными изоморфизмами содержащих их алгебраических групп (см. [4]).

Тем не менее, довольно общие результаты жесткости для алгебраических групп с радикалом могут быть получены. Всякая $\mathbb{Q}$ -определенная линейная алгебраическая группа $G = H \cdot U(G)$, где $U(G)$ – унитарный радикал группы G , а H – редуктивное дополнение для $U(G)$ в G (см. [9]). Мы будем называть группу G группой с сильным унитарным радикалом, если естественное действие группы H на $U(G)$ сопряжениями является точным. В [4] доказана следующая теорема жесткости.

ТЕОРЕМА 2. Пусть G_1, G_2 – $\mathbb{Q}$ -определенные линейные алгебраические группы с сильными унитарными радикалами и пусть $Z(U(G_2))$ – центр группы $U(G_2)$. Если $\Gamma_1 \subset G_1(\mathbb{Q}), \Gamma_2 \subset G_2(\mathbb{Q})$ – арифметические подгруппы, плотные в топологии Зарисского, и $\varphi: \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ – изоморфизм, тогда существует $\mathbb{Q}$ -определенный рациональный изоморфизм $\Phi: G_1 \rightarrow G_2$ и отображение $v: \Gamma_1 \rightarrow Z(U(G_2(\mathbb{Q})))$, так что $\Phi(\gamma) = v(\gamma) \cdot \varphi(\gamma)$ для всех $\gamma \in \Gamma_1$, причем $v(\gamma) = 1$ для всех $\gamma \in \Gamma_1 \cap U(G_1)$.

В [4] содержатся также другие результаты о жесткости, представляющие независимый интерес.

За необходимыми фактами о линейных алгебраических группах и их арифметических подгруппах мы отсылаем к книге [9].

2. Жесткость и проблемы арифметичности для полупростых групп

Пусть Γ – арифметическая подгруппа $\mathbb{Q}$ -определенной алгебраической группы G . В традиционном определении предполагается, что $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$. Такие группы естественно называть $\mathbb{Q}$ -арифметическими. На самом деле произвольная арифметическая группа изоморфна соответствующей $\mathbb{Q}$ -арифметической.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Всякая арифметическая группа Γ изоморфна $\mathbb{Q}$ -арифметической группе.

Прежде всего, мы хотели бы построить пример арифметической группы Γ , допускающей конечные расширения, которые не являются арифметическими группами.

Пусть F_n – свободная группа с n образующими $x_1, \dots, x_n, n \geq 3$. Определим автоморфизм σ' группы F_n следующим образом: $\sigma(x_i) = x_i, 1 \leq i \leq n-1, \sigma(x_n) = x_n^{-1}$. Как хорошо известно, F_n является арифметической подгруппой в $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$.

Рассмотрим полупрямое произведение $\Delta = \langle \sigma \rangle \cdot F_n$. Очевидно, что индекс $[\Delta : F_n] = 2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Группа Δ не является арифметической.

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Мы будем записывать элементы группы Δ в виде пар (α, f) , где $\alpha \in \langle \sigma \rangle, f \in F_n$. Нетрудно показать, что любая неединичная нормальная подгруппа группы Δ имеет неединичное пересечение с $F_n = (1, F_n)$, в частности, всякая нетривиальная нормальная подгруппа группы Δ бесконечна. Предположим, что Δ – арифметическая группа. Тогда без ограничения общности можно считать, что

Δ – арифметическая подгруппа $G(\mathbb{Q})$, плотная в топологии Зарисского. Так как группа F_n не имеет нетривиальных разрешимых нормальных подгрупп, то можно предполагать, что группа G полупроста, присоединенного типа. Тогда $G = G_1 \times \cdots \times G_r$, где группы G_i являются $\mathbb{Q}$ -простыми, определенными над $\mathbb{Q}$.

Далее показывается, что мы можем считать группу G $\mathbb{Q}$ -простой. Так как группа F_n изоморфна подгруппе конечного индекса в $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, то характеристический индекс $\chi(G(\mathbb{R})) \leq \chi(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})) = 2$ (см. [11]). Это влечет за собой, что $G(\mathbb{R}) = H_1 \times \cdots \times H_l$, где H_1 является конечным расширением группы $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, а факторы $H_2, \dots, H_l$ – компактные группы Ли. Пересечение $\Delta \cap H_2 \times \cdots \times H_l$ должно быть конечным, поэтому мы можем считать Δ подгруппой H_1 . Связная компонента $H_1^0 \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Группа $F_n \cap H_1^0 = N$ является нормальной подгруппой конечного индекса m в Δ . Тогда $x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m \in N$. Сопряжение с помощью элемента $(\sigma, 1)$ индуцирует аналитический автоморфизм $\tilde{\sigma}$ группы H_1^0 . Так как все автоморфизмы группы $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ внутренние, то существует $\gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ такой, что $\tilde{\sigma}(x) = \gamma x \gamma^{-1}$ для всех $x \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. С точностью до сопряженности,

$$x_1^n = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad x_1^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть мы имеем первый случай. Так как порядок элемента x_1^n бесконечен, t не может быть корнем из единицы. Тогда $\gamma = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s^{-1} \end{pmatrix}$. Из $\gamma x_n \gamma^{-1} = x_n^{-1}$ следует, что $s \neq \pm 1$. Тогда $\gamma x_2^n \gamma^{-1} = x_2^n$ влечет, что элемент x_2^n является диагональным. А это невозможно. Второй случай рассматривается аналогично.

Следующий результат играет центральную роль в доказательстве теоремы 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть G_1, G_2 – $\mathbb{Q}$ -определенные $\mathbb{Q}$ -простые алгебраические группы присоединенного типа такие, что $\mathrm{rank}_{\mathbb{R}} G_1, \mathrm{rank}_{\mathbb{R}} G_2 > 0$. Пусть $\Gamma_1 \subseteq G_1(\mathbb{Z}), \Gamma_2 \subseteq G_2(\mathbb{Z})$ – арифметические подгруппы и $\varphi: \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ – изоморфизм. Если группа $G_1(\mathbb{R})^0$ не имеет простого фактора, изоморфного $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ и такого, что проекция группы $\Gamma_1 \cap G_1(\mathbb{R})^0$ в этот фактор является дискретной подгруппой, то φ продолжается до рационального изоморфизма $\Phi: G_1 \rightarrow G_2$.

Доказательство предложения 3 опирается на теоремы жесткости для полупростых групп.

Для uniformных решеток в $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ мы имеем следующий результат, контрастирующий с предложением 2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $\Gamma \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ – кокомпактная решетка и $\Delta \supseteq \Gamma$ – конечное расширение. Тогда существует такое конечное расширение H группы $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, что Δ изоморфна кокомпактной решетке в H .

Доказательство предложения базируется на теореме о фиксированной точке для групп, действующих на пространстве Тейхмюллера (см. [5]).

3. Жесткость и проблемы арифметичности для групп с радикалом

Пусть G – связная $\mathbb{Q}$ -определенная алгебраическая группа. Через $L(G)$ мы будем обозначать алгебру Ли группы G . Унипотентный радикал $U(G)$ является

связной $\mathbb{Q}$ -определенной нормальной подгруппой. Экспоненциальное отображение $\exp: L(U(G)) \rightarrow U(G)$ дает нам $\mathbb{Q}$ -определенное рациональное отождествление алгебры Ли $L(U(G))$ с $U(G)$. Группа автоморфизмов $\text{Aut}(L(G))$ алгебры Ли $L(G)$ обладает естественной структурой $\mathbb{Q}$ -определенной алгебраической группы. Мы имеем следующее $\mathbb{Q}$ -определенное рациональное представление:

$$\alpha_G: G \rightarrow \text{Aut}(L(U(G))), \quad \alpha_G(g)(x) = \exp^{-1}(g \exp(x) g^{-1}), \quad g \in G, \quad x \in L(U(G)).$$

Ядро $\text{Ker } \alpha_G$ совпадает с централизатором группы $U(G)$ в G . Хорошо известно (см. [9]), что группа $U(G)$ имеет $\mathbb{Q}$ -определенное редуктивное дополнение G^{red} в G . Все такие дополнения сопряжены элементами из $U(G)(\mathbb{Q})$. Итак, $G = G^{\text{red}} \cdot U(G)$.

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 2. В дальнейшем мы будем использовать индекс $s = 1$ или $s = 2$. Пусть $L(G_s, \Gamma_s)$ будет обозначать $\mathbb{Q}$ -подпространство алгебры Ли $L(U(G_s))$, порожденное $\exp^{-1}(\Gamma_s)$. Тогда $L(G_s, \Gamma_s)$ инвариантно относительно скобки Ли в $L(U(G_s))$ и определяет $\mathbb{Q}$ -структуру для $L(U(G_s))$, т.е. $L(U(G_s)) \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} L(G_s, \Gamma_s)$. Пусть $U(G_s, \Gamma_s) = \Gamma_s \cap U(G_s)$. Можно доказать, что $\varphi(U(G_1, \Gamma_1)) = U(G_2, \Gamma_2)$, и существует такой рациональный изоморфизм $\Phi_u: U(G_1) \rightarrow U(G_2)$, что $\Phi_u(\gamma) = \varphi(\gamma)$ для всех $\gamma \in U(G_1, \Gamma_1)$. Тогда $\tilde{\Phi}_u = \exp^{-1} \circ \Phi_u \circ \exp$ будет $\mathbb{Q}$ -определенным изоморфизмом алгебр Ли $L(U(G_1))$ и $L(U(G_2))$.

Если $\Theta \in \text{Aut}(L(U(G_1)))$, тогда $\Psi_u(\Theta) = \tilde{\Phi}_u \circ \Theta \circ \tilde{\Phi}_u^{-1}$ является $\mathbb{Q}$ -определенным рациональным изоморфизмом

$$\Psi_u: \text{Aut}(L(U(G_1))) \rightarrow \text{Aut}(L(U(G_2))).$$

Пусть $\alpha_s: G_s \rightarrow \text{Aut}(L(U(G_s)))$ есть гомоморфизм α_{G_s} , введенный выше. Ядро $\text{Ker}(\alpha_s) = Z(U(G_s))$ и с помощью прямых вычислений можно проверить, что

$$\Psi_u(\alpha_1(\gamma)) = \alpha_2(\varphi(\gamma)).$$

Группы $\alpha_s(\Gamma_s)$ являются арифметическими подгруппами в $\alpha_s(G_s)$, плотными в топологии Зарисского. Так как $\Psi_u(\alpha_1(G_1)) = \alpha_2(G_2)$, то Ψ_u является $\mathbb{Q}$ -определенным рациональным изоморфизмом между $\alpha_1(G_1)$ и $\alpha_2(G_2)$. Зафиксируем какую-либо максимальную $\mathbb{Q}$ -определенную редуктивную подгруппу G_1^{red} в G_1 . Тогда группа $\Psi_u(\alpha_1(G_1^{\text{red}})) = \overline{G}_2$ является максимальной $\mathbb{Q}$ -определенной редуктивной подгруппой группы $\alpha_2(G_2)$.

Если теперь $H = \alpha_2^{-1}(\overline{G}_2)$, то любая максимальная $\mathbb{Q}$ -определенная редуктивная подгруппа H^{red} является максимальной редуктивной в G_2 и α_2 индуцирует $\mathbb{Q}$ -рациональный изоморфизм $\beta: H^{\text{red}} \rightarrow \overline{G}_2$. Теперь мы можем определить рациональный гомоморфизм Φ . Если $g \in G_1$, то существует однозначное представление $g = r_g \cdot u_g$, где $r_g \in G_1^{\text{red}}$, $u_g \in U(G_1)$. Положим

$$\Phi(g) = \beta^{-1} \circ \Phi_u \circ \alpha_1(\Gamma_g) \Phi_u(u_g).$$

Прямыми вычислениями проверяется, что $\Phi: G_1 \rightarrow G_2$ является изоморфизмом.

Теоремы 2 недостаточно для решения проблемы арифметичности, нужна так называемая униформная теорема жесткости, доказательство которой намного сложнее (см. [4; теорема 3.6]).

4. Классы сопряженности конечных подгрупп

Основная цель настоящего раздела — объяснить доказательство следующей теоремы, дающей решение проблемы 2.

ТЕОРЕМА 3. *Всякое конечное расширение Δ арифметической группы Γ имеет конечное число классов сопряженности конечных подгрупп.*

Следует отметить, что даже в случае, когда Γ является прямым произведением конечного числа свободных групп с конечным числом образующих, эта проблема была открытой.

Если группа Δ арифметична, то утверждение теоремы 3 непосредственно следует из результатов Бореля и Хариш-Чандры.

Сейчас мы сведем доказательство теоремы 3 к весьма специальному случаю, используя теорему 1. Мы хотим доказать, что Δ имеет конечное число классов сопряженности конечных подгрупп. Предложение 1 позволяет нам считать, что существует такая алгебраическая группа G , определенная над $\mathbb{Q}$, что $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$. Заменяя Γ подходящей подгруппой конечного индекса, мы можем предполагать, что Γ нормальна в Δ и что Γ плотна в G в топологии Зарисского, где группа G связна.

Прежде всего, редуцируем рассмотрение к случаю, когда G является полупростой группой. Пусть R — разрешимый радикал группы G и $\pi: G \rightarrow G/R$ — соответствующая проекция. Группа $\Gamma_R = \Gamma \cap R$ является арифметической подгруппой группы R и нормальна в Γ . На самом деле группа $\Gamma_R = R(\Gamma)$, где $R(\Gamma)$ — разрешимый радикал группы Γ . Действительно, замыкание $\overline{R(\Gamma)}$ в топологии Зарисского является разрешимой нормальной подгруппой в G , так как $\overline{\Gamma} = G$. Следовательно, $\overline{R(\Gamma)} \subseteq R$, и, далее, $R(\Gamma) \subseteq \Gamma_R \implies R(\Gamma) = \Gamma_R$. Теперь группа $\pi(\Gamma) \cong \Gamma/R(\Gamma)$ и является арифметической подгруппой в полупростой группе G/R . Так как $R(\Gamma)$ инвариантна в Δ , то группа $\Delta/R(\Gamma)$ является конечным расширением арифметической группы $\Gamma/R(\Gamma)$. Если конечные подгруппы в $\Delta/R(\Gamma)$ разбиваются в конечное число классов сопряженности, то достаточно доказать, что любое конечное расширение группы $R(\Gamma)$ имеет конечное число классов сопряженности конечных подгрупп. Это так, ибо $R(\Gamma)$ является полициклической группой (см. [13; Ch. 8B]). Итак, достаточно доказать теорему 3 для случая полупростой группы G . Используя аналогичные рассуждения, можно свести доказательство к случаю, когда Γ нормальна в Δ и не имеет кручения, а группа G не имеет центра. Тогда $G = G_1 \times \cdots \times G_m$, где все группы G_i являются $\mathbb{Q}$ -простыми. При этом можно предполагать, что группы $G_1(\mathbb{R}), \dots, G_m(\mathbb{R})$ не являются компактными. Положим $\Gamma_i = \Gamma \cap G_i$. Тогда подгруппа $\Gamma_1 \cdot \Gamma_2 \cdots \Gamma_m$ является нормальной в Δ . Это вытекает из следующей леммы (см. [4]).

ЛЕММА 1. *Пусть $G_1, \dots, G_m$ — такие $\mathbb{Q}$ -простые алгебраические группы, что ни одна группа $G_i(\mathbb{R})$ не является компактной. Рассмотрим $G = G_1 \times \cdots \times G_m$ и пусть $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ — произвольная арифметическая подгруппа, $\Gamma_i = \Gamma \cap G_i$. Если $\varphi \in \text{Aut}(\Gamma)$, тогда существует такая перестановка τ множества $\{1, \dots, m\}$, что*

$$\varphi(\Gamma_i) = \Gamma_{\tau(i)}.$$

Поэтому, не ограничивая общности, мы можем считать, что $\Gamma = \Gamma_1 \cdot \Gamma_2 \cdots \Gamma_m$. Предположим также, что группы $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ уже упорядочены таким образом, что

$\Gamma_1 \cong \dots \cong \Gamma_k$, в то время как остальные группы не являются изоморфными Γ_1 . Положим $\Gamma_0 = \Gamma_1 \cdots \Gamma_k$ и $G_0 = G_1 \cdots G_k$. По лемме 1 группа Γ_0 нормальна в Δ .

Мы хотим доказать, что каждое конечное расширение Δ_0 группы Γ_0 имеет конечное число классов сопряженности конечных подгрупп. Если группа $G_0(\mathbb{R})$ не имеет простого фактора, изоморфного $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ и такого, что проекция Γ_0 в этот фактор дискретна, то Δ_0 арифметична по теореме 1 и мы можем применить соответствующий результат Бореля–Хариш–Чандры.

Если же $G_0(\mathbb{R})$ имеет фактор, изоморфный $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, тогда существует такое $j \in \{1, \dots, k\}$, что $G_j(\mathbb{R})$ имеет простой фактор, изоморфный $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, причем проекция Γ_j в этот фактор является дискретной группой.

Тогда все сводится к рассмотрению ситуации, когда Γ является прямым произведением конечного числа свободных групп конечного ранга или кокомпактных фуксовых групп. Здесь доказательство будет совершенно иным: мы будем использовать реализацию группы Γ как группы изометрий подходящего метрического пространства.

Пусть (X, d) – метрическое пространство с метрикой d и G – группа изометрий пространства X . Говорят, что G действует кокомпактно на X , если фактор-пространство $G \backslash X$ компактно. Если для каждого компактного подмножества $K \subset X$ существует только конечное множество таких $g \in G$, что $K \cap gK \neq \emptyset$, тогда G называется действующей разрывно на X . Мы будем использовать следующее известное (и очевидное) утверждение.

ЛЕММА 2. Пусть (X, d) – метрическое пространство и пусть Δ – группа изометрий пространства X , действующая разрывно и кокомпактно на X . Если каждая конечная группа изометрий пространства X имеет неподвижную точку, то конечные подгруппы группы Δ разбиваются в конечное число классов сопряженности.

Наиболее общими метрическими пространствами со свойством, что каждая конечная группа изометрий имеет неподвижную точку, являются так называемые $\mathrm{CAT}(0)$ -пространства (см. [2]).

Два следующих предложения играют ключевую роль в завершении доказательства теоремы 3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $\Gamma = F_1 \times \dots \times F_n$ – прямое произведение конечного числа свободных групп конечного ранга $\mathrm{rk} F_i \geq 2$ ($i = 1, \dots, n$). Если Δ – конечное расширение группы Γ , тогда конечные подгруппы группы Δ разбиваются в конечное число классов сопряженности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вначале $n = 1$. Тогда существует метрическое дерево $T(\Delta)$ такое, что Δ действует изометриями точно на $T(\Delta)$. Это действие разрывно, и фактор $\Delta \backslash T(\Delta)$ является компактным. Пусть H – конечная подгруппа Δ . По теореме о неподвижной точке из [14; гл. 4] группа H имеет неподвижную точку на $T(\Delta)$.

Пусть теперь $n > 1$. Так как Γ имеет конечный индекс в Δ , то существует подгруппа N в Γ , которая нормальна и имеет конечный индекс в Δ . Определим $\Gamma_i = N \cap F_i$ для $i = 1, \dots, n$ и $\Gamma_0 = \Gamma_1 \cdot \Gamma_2 \cdots \Gamma_n$ (мы отождествляем здесь F_i с соответствующим фактором Γ). Тогда Γ_i – свободная подгруппа конечного индекса, $\mathrm{rk}(\Gamma_i) \geq 2$. Заметим, что N_0 имеет также конечный индекс в Δ . Каждая группа Γ_i изоморфна подходящей арифметической подгруппе группы $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$. На самом деле, по лемме 1

N_0 нормальна в Δ , и без ограничения общности мы можем предположить, что Δ является полупрямым произведением: $\Delta = N_0 \cdot F$, где F — конечная группа. Упорядочим теперь группы $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ таким образом, что $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ изоморфны Γ_1 , а остальные группы $\Gamma_{k+1}, \dots, \Gamma_n$ не являются изоморфными Γ_1 . Положим $N_1 = \Gamma_1 \cdots \Gamma_k$ и $N_2 = \Gamma_{k+1} \cdots \Gamma_n$. По лемме 1 группы N_1 и N_2 нормальны в Δ . Вкладывая F диагонально в $F \times F$, мы найдем, что Δ изоморфна подгруппе конечного индекса в $N_1 \cdot F \times N_2 \cdot F$. Далее можно реализовать группы $N_1 \cdot F$ и $N_2 \cdot F$ как группы изометрий подходящего CAT(0)-пространства, откуда уже нетрудно получить, что группа Δ имеет конечное число классов сопряженных конечных подгрупп (см. [4; Proposition 4.6]).

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение, аналогичное предложению 5, неверно для конечных расширений групп бесконечного ранга. Минимальный контрпример, когда $[\Delta : F_\infty] = 2$, был построен в [8].

Следующее утверждение в принципе завершает доказательство теоремы 3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть $\Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_n$ — прямое произведение конечного числа дискретных кокомпактных подгрупп Γ_i группы $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Всякое конечное расширение Δ группы Γ имеет конечное множество классов сопряженности конечных подгрупп.

Доказательство предложения 6 в общих чертах похоже на доказательство предложения 5.

5. Группы целочисленных матриц с конечным числом образующих

Цель настоящего раздела — решение проблемы 4, поставленной более 30 лет назад в [8]. Мы даем конструкцию подгрупп группы $\mathrm{SL}_4(\mathbb{Z})$ с конечным числом образующих с бесконечным числом классов сопряженности элементов порядка 4.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть Γ — подгруппа группы $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ с конечным числом образующих. Тогда конечные подгруппы группы Γ разбиваются в конечное число классов сопряженных элементов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно, что $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ содержит свободную подгруппу конечного индекса и конечного ранга. Следовательно, Γ также содержит свободную подгруппу конечного индекса. Тогда утверждение вытекает из предложения 5.

Если Γ и G — группы и $\varphi: \Gamma \rightarrow G$ — групповой изоморфизм, определим

$$\Gamma \times_\varphi \Gamma = \{(g, h) \in \Gamma \times \Gamma \mid \varphi(g) = \varphi(h)\}.$$

ЛЕММА 3. Пусть Γ — группа с конечным числом образующих и $\varphi: \Gamma \rightarrow G$ — групповой изоморфизм такой, что ядро $\mathrm{Ker} \varphi$ конечно порождено как нормальная подгруппа группы Γ . Тогда группа $\Gamma \times_\varphi \Gamma$ конечно порождена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ — множество образующих группы Γ и $r_1, \dots, r_m$ — множество образующих ядра $\mathrm{Ker} \varphi$ как нормальной подгруппы группы Γ . Нетрудно показать, что элементы

$$(\gamma_1, \gamma_1), \dots, (\gamma_n, \gamma_n), (r_1, 1), \dots, (r_m, 1), (1, r_1), \dots, (1, r_m)$$

являются образующими для группы $\Gamma \times_\varphi \Gamma$.

ЛЕММА 4. Пусть Γ – конечно порожденная группа и $\varphi: \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}$ – сюръективный гомоморфизм. Предположим, что $f \in \Gamma$ – такой элемент конечного порядка, что его централизатор $Z_\Gamma(f)$ конечен. Пусть $z \in \Gamma$ выбран так, что $\varphi(z) = 1$. Тогда группа $\Gamma \times_\varphi \Gamma$ конечно порождена и элементы $f_i = \{z^i f z^{-i}, f\}$ ($i \in \mathbb{Z}, i \neq 0$) являются попарно несопряженными в $\Gamma \times_\varphi \Gamma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ядро $\text{Ker } \varphi$, очевидно, является конечно порожденным как нормальная подгруппа группы Γ . Значит, по лемме 3 группа $\Gamma \times_\varphi \Gamma$ конечно порождена.

Предположим теперь, что f_i и f_j сопряжены в $\Gamma \times_\varphi \Gamma$. Тогда имеются такие $x, y \in \Gamma$, что $\varphi(x) = \varphi(y)$ и

$$(xz^i f z^{-i} x^{-1}, y f y^{-1}) = (z^j f z^{-j}, f).$$

Мы получаем $y \in Z_\Gamma(f)$. Так как $Z_\Gamma(f)$ конечна, мы имеем $\varphi(x) = \varphi(y) = 0$. Из вышеприведенного равенства мы также получаем: $z^{-j} x z^i \in Z_\Gamma(f)$. Тогда $\varphi(z^{-j} x z^i) = 0 \Rightarrow i = j$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Существует конечно порожденная подгруппа $\Delta \subset \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \text{SL}_2(\mathbb{Z})$, которая содержит бесконечно много сопряженных классов элементов порядка 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим следующий элемент порядка 4 в $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$:

$$w = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 17 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

С помощью прямых вычислений нетрудно проверить, что группа $Z_{\text{SL}_2(\mathbb{Z})}(w)$ конечна. Заметим теперь, что w содержится в

$$\Gamma_0(17) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid 17 \mid c \right\}.$$

Эта группа является подгруппой конечного индекса в $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$. Известно (см. [12]), что существует сюръективный гомоморфизм $\varphi: \Gamma_0(17) \rightarrow \mathbb{Z}$. Мы можем теперь применить лемму 4 для конструкции подгруппы

$$\Delta = \Gamma_0(17) \times_\varphi \Gamma_0(17) \subset \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \text{SL}_2(\mathbb{Z}),$$

обладающей бесконечным числом несопряженных элементов порядка 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Borel A., Serre J.-P. Théorèmes de finitude en cohomologie galoisienne // Comment. Math. Helvet. 1964. V. 39. P. 111–164.
- [2] Bridson M. R. Geodesics and curvature in metric simplicial complexes // Group Theory from a Geometrical Viewpoint / ed. E. Ghys, A. Haefliger, A. Verjovsky. Singapore: World Scientific, 1991.
- [3] Grunewald F., Platonov V. On finite extensions of arithmetic groups // C. R. Acad. Sci. Paris. 1997. V. 325. №11. P. 1022–1027.
- [4] Grunewald F., Platonov V. Rigidity results for groups with radical, cohomology of finite groups and arithmeticity problems (to appear).
- [5] Kerckhoff S. P. The Nielsen realization problem // Ann. Math. 1983. V. 117. P. 235–265.
- [6] Margulis G. Discrete Subgroups of Semisimple Lie Groups. Berlin: Springer-Verlag, 1991.
- [7] Mostov G. Strong Rigidity of Locally Symmetric Spaces. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press and Univ. of Tokyo Press, 1973 (Ann. Math. Studies. V. 78).
- [8] Platonov V. The theory of algebraic linear groups and periodic groups // Amer. Math. Soc. Transl. 1968. V. 69. P. 61–110.
- [9] Platonov V., Rapinchuk A. Algebraic Groups and Number Theory. Boston, MA: Academic Press, 1994.
- [10] Prasad G. Strong rigidity of $\mathbb{Q}$ -rank 1 lattices // Invent. Math. 1973. V. 21. P. 255–286.
- [11] Prasad G. Discrete subgroups isomorphic to lattices in Lie groups // Amer. J. Math. 1976. V. 98. P. 853–863.
- [12] Rademacher H. Über die Erzeugenden von Kongruenzuntergruppen der Modulgruppe // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1929. V. 7. P. 134–148.
- [13] Segal D. Polycyclic Groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1983.
- [14] Serre J.-P. Trees. Berlin: Springer-Verlag, 1980.

University of Waterloo,
Waterloo, Ontario, Canada
E-mail: vplatonov@math.uwaterloo.ca

Поступила в редакцию
22.09.1998