Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. Г. Синай, Аномальный перенос в почти-периодических средах, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 1, 181–208

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm120>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 11:38:35

АНОМАЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС В ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ СРЕДАХ

Я. Г. Синай

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение	181
§ 2. Доказательство теоремы 1	186
§ 3. Локализация Андерсона оператора H_α	191
§ 4. Экспоненциальное убывание приближенных собственных функций и другие асимптотические соотношения	204
Список литературы	208

§ 1. Введение

В этой работе мы обсуждаем новый тип случайных блужданий, отличающихся от броуновского движения или его модификаций. Впервые он был обнаружен в случайных блужданиях в случайных средах (см. [1]) и характерен тем, что траектория носит сильно выраженный флуктуационный характер: движущаяся точка застревает в “случайной яме” и колеблется около ее дна. Затем в достаточно большой момент времени, зависящий от глубины ямы, она перескакивает более или менее детерминированным образом в следующую яму, где ведет себя подобным образом, затем перескакивает в следующую яму и т. д. Такие блуждания естественно назвать флуктуационными. В [1] для флуктуационного блуждания требовалась определенная симметрия распределения вероятностей перехода. Ниже мы описываем другой класс задач, где флуктуационное блуждание появляется в открытой области значений параметров.

Обозначим через Ω_t ансамбль случайных траекторий $b_t = \{b(s), 0 \leq s \leq t\}$ длины t таких, что $b(s+1) - b(s) = \pm 1, 0$. Возьмем C^2 -периодическую функцию F периода 1, имеющую две невырожденные критические точки, и положим $V(k, k+1) = V(k+1, k) = 0$, $V(k, k) = F(\omega k + \alpha)$, где ω — число вращения и $\alpha \in [0, 1]$ — фаза. Введем статистический вес

$$(1) \quad \pi(b_t) = \varepsilon^{\nu(b_t)} \exp \left\{ \beta \sum_{s=0}^{t-1} V(b(s), b(s+1)) \right\},$$

где $\nu(b_t) = (k \mid 0 \leq k < t, b(k) \neq b(k+1))$, β и ε — параметры, и отвечающую ему

статистическую сумму

$$Z_t(\beta, \varepsilon) = \sum_{b_t \in \Omega_t} \pi(b_t).$$

Траекторию случайного блуждания можно рассматривать как полимерную цепь, статистический вес (1) характеризует взаимодействие этой цепи со случайной средой. В нашем случае случайная среда является почти-периодической. Основные характеристики полимера описываются средним квадратом смещения

$$r_t = \frac{1}{Z_t(\beta, \varepsilon)} \sum_{b_t \in \Omega_t} b^2(t) \pi(b_t)$$

и поведением при $t \rightarrow \infty$ распределения вероятностей

$$\frac{1}{Z_t(\beta, \varepsilon)} \sum_{b_t: b(t)=x} \pi(b_t).$$

Ситуация с фиксированным ε и малыми β была исследована недавно Е. И. Динабургом (Динабург, частное сообщение), который показал, что при естественных предположениях r_t растет при $t \rightarrow \infty$ пропорционально t , а указанное распределение вероятностей сходится к гауссовскому. Это означает, что при малых β роль среды мало существенна, и статистика случайных траекторий такая же, как и в отсутствие внешнего поля.

Основное содержание этой работы посвящено противоположной ситуации, когда β фиксировано, а ε достаточно мало. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать $\beta = 1$. Мы доказываем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Для любого $\delta > 0$ можно выбрать*

- 1) $\varepsilon_0(\delta) > 0$;
- 2) *постоянные* $0 < c(\delta) < C(\delta) < \infty$;
- 3) *целое число* $t(\delta)$

так, что при любом ε , $0 < \varepsilon < \varepsilon_0(\delta)$, $t > t(\delta)$ существуют подмножество $R_t \in S^1$, $l(R_t) \geq 1 - \delta$, и для всякого $\omega \in R_t$ подмножество $A_t(\omega) \in S^1$, $l(A_t(\omega)) > 1 - \delta$, такие, что для $\omega \in R_t$, $\alpha \in A_t(\omega)$

$$c(\delta)t^{2/3} \leq r_t \leq C(\delta)t^{2/3}.$$

Для тех же (ω, α) найдется такая точка $x_t(\omega, \alpha)$, что для распределения вероятностей P_t , $P_t(b_t) = \frac{\pi(b_t)}{Z_t(\beta, \varepsilon)}$,

$$P_t\{b_t : |b(t) - x_t(\omega, \alpha)| \geq u\} \leq C(\delta)e^{-\gamma_0 u},$$

где $\gamma_0 = \gamma_0(\omega) > 0$ и не зависит от t и α .

Иными словами, распределение конца полимерной цепи $b(t)$, индуцированное P_t , экспоненциально локализовано в окрестности точки $x_t(\omega, \alpha)$, расстояние которой до нуля растет как $t^{1/3}$. Из этого утверждения, точнее, из его доказательства, можно

вывести, что в условиях теоремы 1 полимерная цепь ведет себя, как траектория флуктуационного случайного блуждания. Пары (ω, α) , для которых выполнено утверждение теоремы 1, естественно считать типичными (для нашей задачи).

Доказательство теоремы 1 опирается на теорию локализации Андерсона (ЛА) для разностного оператора Шрёдингера с почти-периодическим потенциалом (см. [2]–[4]). Ниже в этом параграфе мы излагаем ряд первоначальных фактов, относящихся к ЛА для указанного оператора. В §2 мы доказываем теорему 1, точнее, сводим ее к некоторым оценкам. В §3 мы приводим подробный обзор доказательства ЛА, а в §4 описываем, как получить нужные оценки. В целом §3, §4 покрывают нужды §2.

Одномерный разностный оператор Шрёдингера с почти-периодическим потенциалом, который играет основную роль в этой работе, имеет вид

$$(2) \quad (H_\alpha \Psi)(x) = \varepsilon \Psi(x-1) + \varepsilon \Psi(x+1) + \exp\{F(x\omega + \alpha)\} \Psi(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

Легко видеть, что H_α – ограниченный самосопряженный линейный оператор в пространстве l^2 дважды бесконечных последовательностей $\Psi = \{\Psi(x), -\infty < x < \infty\}$. Справедливы следующие утверждения.

1°. Для почти каждого ω и достаточно малых ε , $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0(\omega)$, оператор H_α при почти всех α имеет чисто точечный спектр. Именно это утверждение называется локализацией Андерсона.

2°. Для каждой собственной функции (с.ф.) $\Psi_{\alpha,i}$ оператора H_α можно указать конечное множество $Z(\Psi_{\alpha,i})$, называемое ее существенным носителем (с.н.), так, что $\Psi_{\alpha,i}$ сосредоточена в основном около с.н. $Z(\Psi_{\alpha,i})$. Последовательное построение с.н. будет приведено в §3. Собственное значение (с.з.), отвечающее $\Psi_{\alpha,i}$, обозначается $\lambda_{\alpha,i}$.

3°. Если $\Psi_{\alpha,i}$ есть с.ф. H_α , то сдвинутая функция $(S\Psi_{\alpha,i})(x) = \Psi_{\alpha,i}(x+1)$ есть с.ф. $\Psi_{\alpha+\omega,j}$ оператора $H_{\alpha+\omega}$. Существенный носитель ковариантен по отношению к этой симметрии: $Z(S\Psi_{\alpha,i}) = Z(\Psi_{\alpha,i}) - 1$.

Последнее свойство, разумеется, не определяет с.н. однозначно. Доказательство ЛА, которое мы имеем в виду (см. [4]), включает в себя построение с.н. для каждой с.ф. Из того, что F принимает каждое значение не более чем в двух точках, можно вывести (см. далее), что с.н. любой с.ф. содержит 2^r точек, $r \geq 0$, и имеет иерархическую структуру. А именно, если $\#(Z(\Psi_{\alpha,i})) = 2^r$, то $Z(\Psi_{\alpha,i})$ состоит из двух непересекающихся подмножеств: $Z(\Psi_{\alpha,i}) = Z_{r,1} \cup Z_{r,2}$, $Z_{r,2} = Z_{r,1} + m_r$ для некоторого $m_r > 0$. Множество $Z_{r,1}$ таким же образом может быть разложено в сумму двух подмножеств $Z_{r,1} = Z_{r-1,1} \cup Z_{r-1,2}$, $Z_{r-1,2} = Z_{r-1,1} + m_{r-1}$ и т.д. Типичный вид с.н. представлен на рис. 1 для $r = 0, 1, 2, 3$. Схематичный вид с.ф. изображен на рис. 2. Существенный носитель отмечен точками. Числа $m_1, m_2, \dots, m_r$ связаны со структурой резонансов, которые отвечают каждой с.ф. $\Psi_{\alpha,i}$.

4°. Обозначим через $\text{pos}(\Psi_{\alpha,i})$ крайнюю левую точку $Z(\Psi_{\alpha,i})$ и введем множество Φ_α тех с.ф. $\Psi_{\alpha,i}$, для которых $\text{pos}(\Psi_{\alpha,i}) = 0$. Пусть также $\Lambda_\alpha = \{\lambda \mid \Psi_{\alpha,i} \in \Phi_\alpha\}$. Функции Φ_α и Λ_α , вообще говоря, многозначные, а для некоторых α их значения могут быть пустыми множествами. В целом же как функции α они измеримы в естественном смысле этого слова, и для всего набора собственных функций $\{\Psi_{\alpha,i}\}$ имеет место соотношение

$$(3) \quad \{\Psi_{\alpha,i}\} = \bigcup_{-\infty < m < \infty} S^m \Phi_{\alpha+m\omega}.$$

Рис. 1

Рис. 2

Равенство (3) показывает, что весь базис с.ф. может быть выражен через значения измеримой функции Φ_α вдоль траектории точки $\alpha \in S^1$ под действием поворота T_ω окружности S^1 на угол ω , $T_\omega \alpha = \alpha + \omega \pmod{1}$. Аналогичное соотношение справедливо для набора с.з.: если $\{\lambda_{\alpha,i}\}$ есть весь набор с.з. оператора H_α , то

$$\{\lambda_{\alpha,i}\} = \bigcup_{-\infty < m < \infty} \Lambda_{\alpha+m\omega}.$$

5°. Пусть $M_k \subset S^1$ есть подмножество тех α , где число с.ф. $\Psi_{\alpha,i}$, принадлежащих Φ_α , равно k . Тогда $l(M_k) \leq \text{const } \rho^k$, где const и $\rho < 1$ зависят от ω и ε и стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$.

В действительности $l(M_k)$ убывают гораздо быстрее.

6°. Пусть $D_k \subset S^1$ есть подмножество тех α , для которых Φ_α содержит хотя бы одну с.ф. $\Psi_{\alpha,i}$, для которой $\text{diam } Z(\Psi_{\alpha,i}) = k$. Здесь $\text{diam } Z(\Psi_{\alpha,i})$ есть расстояние между крайней левой и крайней правой точками $Z(\Psi_{\alpha,i})$. Тогда $l(D_k) \leq \text{const } \rho^k$ с теми же const и ρ , что и в 5°.

7°. Собственные функции убывают экспоненциально вне их с.н. Мы сформулируем это свойство следующим образом: найдется $\gamma_1 = \gamma_1(\varepsilon, \omega) > 0$ такое, что для почти всех α

$$(4) \quad \lim_{|m| \rightarrow \infty} \max_{\Psi_{\alpha+m\omega,i} \in \Phi_{\alpha+m\omega}} \frac{1}{|m|} \ln |\Psi_{\alpha+m\omega,i}(m)| = \lim_{|m| \rightarrow \infty} \min_{\Psi_{\alpha+m\omega,i} \in \Phi_{\alpha+m\omega}} \frac{1}{|m|} \ln |\Psi_{\alpha+m\omega,i}(m)| \leq -\gamma_1.$$

Следующие свойства описывают структуру Λ_α около точки, где Λ_α принимает максимальное значение.

8°. Существует единственная точка $\alpha_{\max}$, в которой Λ_α однозначна, и при $\alpha \neq \alpha_{\max}$ справедливо неравенство $\lambda_{\alpha,i} < \Lambda_{\alpha_{\max}}$ для всех $\lambda_{\alpha,i} \in \Lambda_\alpha$. Мнозначная функция Λ_α непрерывна в точке $\alpha_{\max}$ в том смысле, что при некотором $\sigma = \sigma(\omega, F) > 0$ и $\Lambda_{\alpha_{\max}} = \Lambda_{\max}$

$$(5) \quad \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_{\max}} \max_{\lambda_{\alpha,i} \in \Lambda_\alpha} \frac{\Lambda_{\max} - \lambda_{\alpha,i}}{(\alpha - \alpha_{\max})^2} = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_{\max}} \min_{\lambda_{\alpha,i} \in \Lambda_\alpha} \frac{\Lambda_{\max} - \lambda_{\alpha,i}}{(\alpha - \alpha_{\max})^2} = \sigma.$$

Последнее соотношение не означает, что в целой окрестности $\alpha_{\max}$ функция Λ_α непрерывна. Более того, точки разрыва Λ_α накапливаются к точке $\alpha_{\max}$. Однако, относительная мера тех α , где функция Λ_α неоднозначна и не непрерывна, убывает экспоненциально. Размеры разрывов убывают с еще большей скоростью. Нам понадобится это свойство в такой формулировке: если $U_\xi = \{\alpha \mid |\alpha - \alpha_{\max}| < \xi\}$ и $U_\xi^{(1)} \subset U_\xi$ есть множество тех α , где Λ_α однозначна, т.е. $Z(\Psi_{\alpha,1}) = 0$ при таких α , то при некоторой $\text{const} > 0$

$$\exp \left\{ -\text{const} \cdot \exp \left\{ -\frac{\text{const}}{\xi} \right\} \right\} \leq \frac{l(U_\xi^{(1)})}{l(U_\xi)} \leq \exp \left\{ \text{const} \cdot \exp \left\{ -\frac{\text{const}}{\xi} \right\} \right\}.$$

Здесь const зависит от ω и α , но не от ε . Примерный вид Λ_α в окрестности $\alpha_{\max}$ представлен на рис. 3.

Рис. 3

9°. При доказательстве теоремы 1 мы будем пользоваться более сильным вариантом утверждения об экспоненциальном убывании с.ф. $\Psi_{\alpha,i} \in \Phi_\alpha$ для α , близких к $\alpha_{\max}$. А именно, для некоторого $\gamma_2 = \gamma_2(\varepsilon, \omega) > 0$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in U^{(1)}_\xi} \frac{\ln |\Psi_{\alpha,1}(m)|}{|m|} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} \inf_{\alpha \in U^{(1)}_\xi} \frac{\ln |\Psi_{\alpha,1}(m)|}{|m|} = -\gamma_2.$$

Выполнение всех свойств 1°–9° для типичных ω и α обсуждается в § 4 после описания доказательства ЛА.

§ 2. Доказательство теоремы 1

Положим $Z_t(\alpha, \varepsilon, x) = \sum_{b_t: b(t)=x} \pi(b_t)$. Тогда вся статистическая сумма $Z_t(\alpha, \varepsilon) = \sum_x Z_t(\alpha, \varepsilon, x)$ и

$$r_t = \frac{\sum_{b_t \in \Omega_t} b^2(t) \pi(b_t)}{\sum_{b_t \in \Omega_t} \pi(b_t)} = \frac{\sum_x x^2 Z_t(\alpha, \varepsilon, x)}{Z_t(\alpha, \varepsilon)}.$$

Для $Z_t(\alpha, \varepsilon, x)$ можем написать

$$Z_t(\alpha, \varepsilon, x) = \varepsilon Z_{t-1}(\alpha, \varepsilon, x-1) + \varepsilon Z_{t-1}(\alpha, \varepsilon, x+1) + \exp\{F(x\omega + \alpha)\} Z_{t-1}(\alpha, \varepsilon, x).$$

Последнее соотношение позволяет представить статистическую сумму $Z_t(\alpha, \varepsilon)$ в виде

$$Z_t(\alpha, \varepsilon) = (e, H_\alpha^t \delta_0),$$

где $e = \{e(x)\}$, $e(x) \equiv 1$, $\delta_0(x) = 1$ при $x = 0$ и $\delta_0(x) = 0$ при остальных x . Точно так же

$$Z_t^{(0)}(\alpha, \varepsilon) = \sum x^2 Z_t(\alpha, \varepsilon, x) = (f, H_\alpha^t \delta_0),$$

где $f(x) = x^2$.

Допустим, что ω и α таковы, что при достаточно малых ε имеет место локализация Андерсона со всеми свойствами, перечисленными в § 1. Мы можем написать

$$(6) \quad Z_t(\alpha, \varepsilon) = \sum_i \lambda_{\alpha,i}^t \Psi_{\alpha,i}(0) \sum_x \Psi_{\alpha,i}(x),$$

$$(7) \quad Z_t^{(0)}(\alpha, \varepsilon) = \sum_i \lambda_{\alpha,i}^t \Psi_{\alpha,i}(0) \sum_x x^2 \Psi_{\alpha,i}(x).$$

Начиная с этого момента, мы обсуждаем только $Z_t(\alpha, \varepsilon)$ и в конце параграфа указываем необходимые изменения для $Z_t^{(0)}(\alpha, \varepsilon)$. С помощью 3°, 4° из § 1 получаем

$$\begin{aligned} (8) \quad Z_t(\alpha, \varepsilon) &= \sum_{-\infty < m < \infty} \sum_{i: \text{pos}(\Psi_{\alpha,i})=m} \lambda_{\alpha,i}^t \Psi_{\alpha,i}(0) \sum_x \Psi_{\alpha,i}(x) \\ &= \sum_{-\infty < m < \infty} \sum_{\Psi_{\alpha+m\omega,i} \in \Phi_{\alpha+m\omega}} \lambda_{\alpha+m\omega,i}^t \Psi_{\alpha+m\omega,i}(-m) \sum_x \Psi_{\alpha+m\omega,i}(x). \end{aligned}$$

В последнем выражении индекс i нумерует различные с.ф., принадлежащие $\Phi_{\alpha+m\omega}$. Мы покажем, что в типичной ситуации основной вклад в (8) вносит единственное слагаемое при определенных значениях m и i .

Разложим сумму (8) на несколько частей. Возьмем интервал $-t^{1/3} \leq m \leq t^{1/3}$, выберем $C_1(\delta) = C_1$ и рассмотрим окрестность $U^{(t)} = \{\alpha : |\alpha - \alpha_{\max}| \leq C_1 t^{-1/3}\}$. Точное значение C_1 определим позже. При заданных ω и α найдем такие m_j , $|m_j| \leq C_1 t^{1/3}$, что $\alpha + m_j \omega \in U^{(t)}$, $j = 1, \dots, J$. Пусть ω и α таковы, что $J \leq J_0(\delta)$, где $J_0(\delta)$, не зависящее от t , также будет определено позже. Обозначим $x_j = (\alpha + m_j \omega - \alpha_{\max}) t^{1/3}$, $y_j = m_j t^{-1/3}$. Положим

$$(9) \quad Z_t^{(1)}(\alpha, \varepsilon) = \sum_{|m_j| \leq t^{1/3}} \sum_{\Psi_{\alpha+m_j\omega, i} \in \Phi_{\alpha+m_j\omega}} \lambda_{\alpha+m_j\omega, i}^t \Psi_{\alpha+m_j\omega, i}(-m_j) \sum_x \Psi_{\alpha+m_j\omega, i}(x),$$

(10)

$$Z_t^{(2)}(\alpha, \varepsilon) = \sum_{j=1}^J \sum_{\Psi_{\alpha+m_j\omega, i} \in \Phi_{\alpha+m_j\omega}} \lambda_{\alpha+m_j\omega, i}^t \Psi_{\alpha+m_j\omega, i}(-m_j) \sum_x \Psi_{\alpha+m_j\omega, i}(x),$$

(11)

$$Z_t^{(3)}(\alpha, \varepsilon) = \sum_{|m| > C_1 t^{1/3}} \sum_{\Psi_{\alpha+m\omega, i} \in \Phi_{\alpha+m\omega, i}} \lambda_{\alpha+m\omega, i}^t \Psi_{\alpha+m\omega, i}(-m) \sum_x \Psi_{\alpha+m\omega, i}(x),$$

(12)

$$Z_t^{(4)}(\alpha, \varepsilon) = \sum_{\substack{|m| \leq C_1 t^{1/3} \\ m \neq m_j}} \sum_{\Psi_{\alpha+m\omega, i} \in \Phi_{\alpha+m\omega, i}} \lambda_{\alpha+m\omega, i}^t \Psi_{\alpha+m\omega, i}(-m) \sum_x \Psi_{\alpha+m\omega, i}(x).$$

Мы покажем, что при некоторых естественных предположениях

$$Z_t^{(2)}(\alpha, \varepsilon) \geq Z_t^{(1)}(\alpha, \varepsilon) \gg Z_t^{(3)}(\alpha, \varepsilon) + Z_t^{(4)}(\alpha, \varepsilon).$$

Мы формулируем эти предположения в виде требований к ω и α , которые будут обсуждаться в конце этого параграфа и в § 4.

(H₁) Пусть ω и α таковы, что для всех $\alpha + m_j \omega$, $j = 1, 2, \dots, J \leq J_0$ множество $\Phi_{\alpha+m_j\omega}$ состоит из единственной с.ф. Тогда i в (9), (10) принимает единственное значение $i = 1$.

Используя 8° из § 1, можем написать

$$\begin{aligned} \lambda_{\alpha+m_j\omega, 1}^t &= \Lambda_{\max}^t \left(\frac{\lambda_{\alpha+m_j\omega, 1}}{\Lambda_{\max}} \right)^t = \Lambda_{\max}^t \left(1 - \frac{\Lambda_{\max} - \lambda_{\alpha+m_j\omega, 1}}{\Lambda_{\max}} \right)^t \\ &= \Lambda_{\max}^t \left(1 - \frac{\Lambda_{\max} - \Lambda_{\alpha+m_j\omega}}{\Lambda_{\max}} \right)^t = \Lambda_{\max}^t \left(1 - \frac{\sigma x_j^2 (1 + o(1))}{t^{2/3}} \right)^t \\ &= \Lambda_{\max}^t \exp \{ -t^{1/3} \sigma x_j^2 (1 + o(1)) \}. \end{aligned}$$

С помощью 9° из § 1 получаем

$$\Psi_{\alpha+m_j\omega, 1}(-m_j) = \exp \{ -\gamma_2 |m_j| (1 + o(1)) \} = \exp \{ -\gamma_2 t^{1/3} |y| (1 + o(1)) \}.$$

Таким образом,

$$\lambda_{\alpha+m_j\omega,1}^t \Psi_{\alpha+m_j\omega,1}(-m_j) = \Lambda_{\max}^t \exp\{-t^{1/3}(\sigma x_j^2 + \gamma_2|y_j|)(1+o(1))\}.$$

Последнее соотношение показывает, что для слагаемых, входящих в $Z_t^{(1)}(\alpha, \varepsilon)$ и $Z_t^{(2)}(\alpha, \varepsilon)$, $\lambda_{\alpha+m_j\omega,1}^t \Lambda_{\max}^{-t}$ и $\Psi_{\alpha,i}(-m_j)$ имеют одинаковый порядок. Для слагаемых, входящих в $Z_t^{(3)}(\alpha, \varepsilon)$ и $Z_t^{(4)}(\alpha, \varepsilon)$, один из этих сомножителей становится существенно меньше. Этим, грубо говоря, объясняется то, что основной вклад в статистическую сумму $Z_t(\alpha, \varepsilon)$ вносит конечная сумма $Z_t^{(2)}(\alpha, \varepsilon)$.

(Н₂) Среди всех чисел $\sigma x_j^2 + \gamma_2|y_j|$, $|y_j| \leq 1$, имеется только одно число с $j = j_1$, для которого

$$\sigma x_{j_1}^2 + \gamma_2|y_{j_1}| + \beta_1 < \sigma x_j^2 + \gamma_2|y_j|, \quad j \neq j_1.$$

Среди всех чисел $\sigma x_j^2 + \gamma_2|y_j|$, $|y_j| \leq C_1(\delta)$, имеется только одно число с $j = j_0$, для которого

$$\sigma x_{j_0}^2 + \gamma_2|y_{j_0}| + \beta_1 < \sigma x_j^2 + \gamma_2|y_j|, \quad j \neq j_0.$$

Здесь β_1 — еще одна постоянная, не зависящая от t и зависящая только от $\omega, \alpha, \varepsilon$ и δ .

Если выполнено (Н₂), то основной вклад в $Z_t^{(1)}(\alpha, \varepsilon)$ вносит единственное слагаемое с $j = j_0$. В принципе возможно, что $j_1 = j_0$. Если же $j_1 \neq j_0$, то $Z_t^{(2)}(\alpha, \varepsilon) \gg Z_t^{(1)}(\alpha, \varepsilon)$.

Покажем теперь, что $Z_t^{(3)}(\alpha, \varepsilon)$ мало по сравнению с $Z_t^{(1)}(\alpha, \varepsilon)$, если C_1 выбрано достаточно большим. Мы имеем

$$|Z_t^{(3)}(\alpha, \varepsilon)| \leq \Lambda_{\max}^t \sum_{|m| > C_1 t^{1/3}} \sum_{\Psi_{\alpha+m\omega,i} \in \Phi_{\alpha+m\omega}} |\Psi_{\alpha+m\omega,i}(-m)| \sum_x |\Psi_{\alpha+m\omega,i}(x)|.$$

(Н₃) При некоторой постоянной $C_2 = C_2(\varepsilon, \delta)$ числа ω и α таковы, что при всех допустимых i

$$(13) \quad \left| \sum_x \Psi_{\alpha+m\omega,i}(x) \right| \leq C_2 m^2$$

и $\text{diam } Z(\Psi_{\alpha+m\omega,i}) \leq \ln^2 m + C_2$. На самом деле в правой части (13) можно поставить гораздо более медленно меняющуюся функцию, но для наших целей достаточно m^2 .

Из (4) имеем при всех m , $|m| \geq C_1 t^{1/3}$, и i

$$|\Psi_{\alpha+m\omega,i}(-m)| \leq \exp\left\{-\frac{\gamma_1}{2}|m|\right\}.$$

Поэтому

$$|Z_t^{(3)}(\alpha, \varepsilon)| \leq \Lambda_{\max}^t \exp\left\{-\frac{\gamma_1}{2}C_1 t^{1/3}\right\} \cdot \text{const}.$$

Если ω и α таковы, что

$$(14) \quad \frac{\gamma_1 C_1}{2} \geq \sigma x_{j_1}^2 + \gamma_2|y_{j_1}| + \beta_1,$$

то

$$|Z_t^{(3)}(\alpha, \varepsilon)| \leq \text{const} \cdot \exp\{-\beta_1 t^{1/3}\} Z_t^{(1)}(\alpha, \varepsilon) \leq \text{const} \cdot \exp\{-\beta_1 t^{1/3}\} Z_t^{(2)}(\alpha, \varepsilon),$$

что и требовалось показать.

Покажем теперь, что $Z_t^{(4)}(\alpha, \varepsilon)$ мало по сравнению с $Z_t^{(1)}(\alpha, \varepsilon)$ в силу малости всех $\lambda_{\alpha+m\omega, i}^t$. Мы оценим часть $Z_t^{(4)}(\alpha, \varepsilon)$, отвечающую $m \geq 0$. Другая часть оценивается аналогично. Имеем

$$Z_t^{(4,+)}(\alpha, \varepsilon) = \sum_{\substack{0 \leq m \leq C_1 t^{1/3} \\ \text{dist}(\alpha+m\omega, \alpha_{\max}) \geq \frac{C_1}{t^{1/3}}}} \sum_{\Psi_{\alpha+m\omega, i} \in \Phi_{\alpha+m\omega}} \lambda_{\alpha+m\omega, i}^t \cdot \Psi_{\alpha+m\omega, i}(-m) \sum_x \Psi_{\alpha+m\omega, i}(x).$$

Поскольку $\alpha + m\omega$ далеко от $\alpha_{\max}$, мы воспользуемся оценкой

$$\lambda_{\alpha+m\omega, i} \leq \Lambda_{\max} \left(1 - \frac{\sigma C_1^2}{t^{1/3}} (1 + o(1)) \right).$$

Используя очевидное неравенство $|\Psi_{\alpha+m\omega, i}| \leq 1$ и (13), мы можем написать для всех достаточно больших t

$$|Z_t^{(4,+)}(\alpha, \varepsilon)| \leq \text{const } t \ln^2 t \Lambda_{\max}^t \exp \left\{ -\frac{\sigma}{2} C_1^2 t^{1/3} \right\}.$$

Оценим теперь $Z_t^{(1)}(\alpha, \varepsilon)$ снизу. Как следует из (H₂), основной вклад в $Z_t^{(1)}(\alpha, \varepsilon)$ вносит слагаемое с $j = j_1$. Поэтому достаточно рассмотреть

$$\lambda_{\alpha+m_{j_1}\omega, 1}^t \cdot \Psi_{\alpha+m_{j_1}\omega, 1}(-m_{j_1}) \sum_x \Psi_{\alpha+m_{j_1}\omega, 1}(x).$$

Начнем со следующей леммы.

ЛЕММА 1. Для любого $\delta > 0$ можно найти такое $C_3 = C_3(\delta) > 0$, что

$$l\{(\omega, \alpha) : |\alpha + m\omega - \alpha_{\max}| \geq C_3 t^{1/3} \text{ при всех } 0 \leq m \leq t^{1/3}\} \geq 1 - \frac{1}{4} \delta^2.$$

Утверждение леммы очевидно, и доказательство опускается. Пусть O_t есть множество тех ω , для которых условная мера α , удовлетворяющих предыдущему неравенству, превышает $1 - \delta/2$. Тогда $l(O_t) \geq 1 - \delta/2$.

Для $|\Psi_{\alpha+m_{j_1}\omega, 1}(-m_{j_1})|$ мы используем оценку (см. 9°, §1)

$$|\Psi_{\alpha+m_{j_1}\omega, 1}(-m_{j_1})| \geq \exp\{-\gamma_2 m_{j_1} (1 + o(1))\}$$

и $|\sum_x \Psi_{\alpha+m_{j_1}\omega, 1}(x)| \leq 1 + \text{const} \cdot \varepsilon$. Последняя оценка, где const зависит от ω и α , легко вытекает из доказательства ЛА (см. §3). Для $\omega \in O_t$ можем теперь написать

$$\begin{aligned} Z_t^{(1)}(\alpha, \varepsilon) &\geq \Lambda_{\max}^t \left(1 - \sigma \frac{C_3^2}{t^{2/3}} (1 + o(1)) \right)^t \exp\{-\gamma_2 t^{1/3} (1 + o(1))\} \\ &= \Lambda_{\max}^t \exp\{-t^{1/3} (\sigma C_3^2 + \gamma_2) (1 + o(1))\}. \end{aligned}$$

При заданном C_3 , выбрав C_1 достаточно большим, а β_1 достаточно малым, можем написать

$$(15) \quad \frac{Z_t^{(4,+)}(\alpha, \varepsilon)}{Z_t^{(1)}(\alpha, \varepsilon)} \leq e^{-\beta_1 t}.$$

Обсуждение условий (H₁)–(H₃). Возьмем произвольное $C_1 > 1$. Можно найти такое $J_0 = J_0(C_1, \delta)$, что мера тех пар (ω, α) , где $J \leq J_0$, превосходит $1 - \frac{1}{64}\delta^2$. Разумеется, $J_0 \rightarrow \infty$ при $C_1 \rightarrow \infty$, но это для нас несущественно, поскольку вначале $t \rightarrow \infty$.

При заданном C_1 условная мера тех $\alpha \in U^{(t)}$, где Φ_α многозначна или принимает пустое множество значений, не превосходит

$$\text{const} \cdot \exp\{-\text{const} \cdot C_1 t^{1/3}\}.$$

Это следует из оценки размеров резонансных зон (см. §3, §4). Здесь const зависят только от ω . Выбирая те α , для которых $\alpha + m\omega$ не попадает в это множество при $|m| \leq C_1 t^{1/3}$, мы получаем (H₁).

Обратимся к неравенству (14). В нем $\gamma_1, x_{j_1}, y_{j_1}$ представляют собой функции ω и α , а также ε и F , что для нас несущественно. Поэтому мы можем выбрать C_1 настолько большим, что вероятность пар (ω, α) , для которых справедливо (14), превосходит $1 - \frac{1}{64}\delta^2$.

Для проверки (H₂) будем считать ω фиксированным и менять значение α . Величина γ_2 зависит только от ω и ε , но не от α . При заданных $m_{j'}, m_{j''}$, $|m_{j'}| \leq C_1 t^{1/3}$, $|m_{j''}| \leq C_1 t^{1/3}$, рассмотрим множество тех α , для которых $|\alpha + m_{j'}\omega - \alpha_{\max}| \leq C_1 t^{-1/3}$ и $|\alpha + m_{j''}\omega - \alpha_{\max}| \leq C_1 t^{-1/3}$. Оно распадается на отдельные отрезки. Соотношение $\sigma x_{j'}^2 + \gamma_2 |y_{j'}| = \sigma x_{j''}^2 + \gamma_2 |y_{j''}|$ можно рассматривать как уравнение на α , имеющее в каждом таком отрезке не более одного решения, поскольку это уравнение линейное. Возьмем α вне окрестностей этих решений размера $\beta_3 t^{-1/3}$, где $\beta_3 = \beta_3(\omega, \varepsilon)$ достаточно мало, так, чтобы мера дополнения к этим окрестностям была больше, чем $1 - \delta/8$. Этим выбором определяется значение $\beta_3 = \beta_3(\omega, \varepsilon) > 0$.

Условия (H₃) вытекают из свойств ЛА. Мы обсуждаем соответствующие вопросы в §3, §4.

Из (H₁)–(H₃) вытекает, что основной вклад в $Z_t(\alpha, \varepsilon)$ вносит слагаемое

$$\lambda_{\alpha+m_{j_0}\omega, 1}^t \cdot \Psi_{\alpha+m_{j_0}\omega, 1}(-m_{j_0}) \sum_x \Psi_{\alpha+m_{j_0}\omega, 1}(x).$$

Точно так же можно показать, что вероятности $Z_t(\alpha, \varepsilon, x)/Z_t(\alpha, \varepsilon)$ убывают экспоненциально как функции $x - m_{j_0}$.

Рассуждения для оценки $Z_t^{(0)}(\alpha, \varepsilon)$ в основном такие же. Они показывают, что и здесь основной вклад вносит то же слагаемое

$$\begin{aligned} & \lambda_{\alpha+m_{j_0}\omega, 1}^t \cdot \Psi_{\alpha+m_{j_0}\omega, 1}(-m_{j_0}) \sum_x (x + m_{j_0})^2 \Psi_{\alpha+m_{j_0}\omega, 1}(x) \\ &= m_{j_0}^2 \lambda_{\alpha+m_{j_0}\omega, 1}^t \cdot \Psi_{\alpha+m_{j_0}\omega, 1}(-m_{j_0}) \sum_x \Psi_{\alpha+m_{j_0}\omega, 1}(x) + \dots, \end{aligned}$$

где многоточием отмечены члены, малые по сравнению с выписанными слагаемыми.

§3. Локализация Андерсона оператора H_α

В этом параграфе мы приводим подробное описание доказательства ЛА оператора H_α , следуя, в основном, работе [4]. Подход этой работы отличается от других подходов, в частности, в [2] и [3], тем, что в [4] разработана техника построения локализованных с.ф. и с.н. В определенном смысле подход [4] ближе к теории КАМ, чем [2], [3]. Хотя этот параграф и не содержит полного доказательства ЛА, мы надеемся, что заинтересованный читатель сможет восстановить недостающие детали.

Выпишем оператор H_α в чуть более общем виде:

$$(H_\alpha \Psi)(x) = \varepsilon \Psi(x+1) + \varepsilon \Psi(x-1) + V(x\omega + \alpha) \Psi(x).$$

Здесь V — периодическая C^2 -функция Морса, имеющая две невырожденные критические точки. При этом существенно, что V принимает каждое значение не более чем в двух точках. Случай более общих V рассмотрен в [3] и [5].

Как уже отмечалось раньше, ЛА означает, что оператор H_α имеет чисто точечный спектр с локализованными с.ф. Если $\{\lambda_{\alpha,i}\}$ — набор с.з. H_α , то $\{\lambda_{\alpha,i}\} = \{\lambda_{\alpha+\omega,i}\}$. Иными словами, спектр H_α , понимаемый как множество его собственных значений, инвариантен относительно вращения $T_\omega \alpha = \alpha + \omega \pmod{1}$. В случае иррациональных ω не существует измеримых инвариантных функций, кроме констант, что означает, что спектр $\{\lambda_{\alpha,i}\}$ не является измеримой функцией. Наш подход показывает, как справиться с этой неизмеримостью, т.е. как ввести своеобразную униформацию спектра. А именно, мы строим “измеримую функцию” Λ_α таким образом, что весь спектр $\{\lambda_{\alpha,i}\} = \bigcup_{-\infty < m < \infty} \Lambda_{\alpha+m\omega}$. Кавычки поставлены потому, что Λ_α является, вообще говоря, многозначной функцией. Как уже отмечалось, последнее соотношение надо трактовать таким образом, что набор всех с.з. H_α состоит из значений Λ_α вдоль траектории поворота T_ω .

Мы уже упоминали о том, что в основе построения Λ_α и соответствующей Φ_α лежит идея о том, что каждая с.ф. $\Psi_{\alpha,i}$ имеет с.н. $Z(\Psi_{\alpha,i})$, в окрестности которого она главным образом сосредоточена. Естественное требование к с.н. состоит в том, что если $Z(\Psi_{\alpha,i})$ есть с.н. $\Psi_{\alpha,i}$ и $\Psi_{\alpha+\omega,i}(x) = \Psi_{\alpha,i_1}(x+1)$, то $Z(\Psi_{\alpha+\omega,i}) = Z(\Psi_{\alpha,i}) - 1$.

Пусть, как и выше, $\text{ros}(\Psi_{\alpha,i})$ есть крайняя левая точка $Z(\Psi_{\alpha,i})$. Положим $\Phi_\alpha = \{\Psi_{\alpha,i} \mid \text{ros}(\Psi_{\alpha,i}) = 0\}$, $\Lambda_\alpha = \{\lambda_{\alpha,i} \mid \Psi_{\alpha,i} \in \Phi_\alpha\}$. Если S есть сдвиг влево, $(S\Psi)(x) = \Psi(x+1)$, то

$$\{\Psi_{\alpha,i}\} = \bigcup_{-\infty < m < \infty} S^m \Phi_{\alpha+m\omega}, \quad \{\lambda_{\alpha,i}\} = \bigcup_{-\infty < m < \infty} \Lambda_{\alpha+m\omega}.$$

Построение $\Psi_{\alpha,i}$, $Z(\Psi_{\alpha,i})$, $\lambda_{\alpha,i}$ проводится по индукции и основано на теории возмущений. На каждом шагу индукции мы предполагаем, что мы имеем приближенные с.ф. $\Psi_{\alpha,i}^{(n)}$ и их с.н. $Z(\Psi_{\alpha,i}^{(n)})$ с $\text{ros}(\Psi_{\alpha,i}^{(n)}) = 0$, функцию $\Phi_\alpha^{(n)} = \{\Psi_{\alpha,i}^{(n)}\}$ и приближенные с.з. $\Lambda_\alpha^{(n)} = \{\lambda_{\alpha,i}^{(n)} \mid \Psi_{\alpha,i}^{(n)} \in \Phi_\alpha^{(n)}\}$. После этого мы рассматриваем приближенный базис

$$\{S^m \Psi_{\alpha+m\omega,i}^{(n)}, -\infty < m < \infty\}, \quad Z(S^m \Psi_{\alpha+m\omega,i}^{(n)}) = Z(\Psi_{\alpha+m\omega,i}^{(n)}) - m,$$

и приближенный спектр $\bigcup_{-\infty < m < \infty} \Lambda_{\alpha+m\omega}^{(n)}$. Функции $S^m \Psi_{\alpha+m\omega,i}^{(n)}$ неортогональны, но нормированы. Мы обсудим их приближение к ортогональности позже.

Теперь мы остановимся на основном механизме убывания с.ф. вне их существенных носителей. Допустим, что ЛА уже установлена, и для данного H_α мы имеем отвечающие ему нормированные точные с.ф. $\Psi_{\alpha,i}$, их с.н. $Z(\Psi_{\alpha,i})$, с.з. $\lambda_{\alpha,i}$ и, дополнительно, $\lambda_{\alpha,i_1} \neq \lambda_{\alpha,i_2}$ при $i_1 \neq i_2$, т.е. кратность каждого с.з. равна 1. Последнее свойство характерно для ЛА при типичных α .

Возьмем какую-либо точную с.ф. $\Psi_{\alpha,i}$, выберем m_0 и рассмотрим функцию $\varphi_{\alpha,i}$, для которой $\varphi_{\alpha,i}(m) = \Psi_{\alpha,i}$ при $m \leq m_0$ и $\varphi_{\alpha,i}(m) = 0$ при $m > m_0$. Легко проверить, что

$$\begin{aligned} H_\alpha \varphi_{\alpha,i}(m) &= \lambda_{\alpha,i} \varphi_{\alpha,i}(m) \text{ при } m < m_0 \text{ или } m > m_0 + 1, \\ H_\alpha \varphi_{\alpha,i}(m_0) &= \lambda_{\alpha,i} \varphi_{\alpha,i}(m_0) - \varepsilon \Psi_{\alpha,i}(m_0 + 1), \\ (H_\alpha \varphi_{\alpha,i})(m_0 + 1) &= \lambda_{\alpha,i} \varphi_{\alpha,i}(m_0 + 1) + \varepsilon \Psi_{\alpha,i}(m_0). \end{aligned}$$

Поэтому вектор $(H_\alpha - \lambda_{\alpha,i})\varphi_{\alpha,i} = \chi$ имеет только две ненулевых компоненты $\chi(m_0) = -\varepsilon \Psi_{\alpha,i}(m_0 + 1)$, $\chi(m_0 + 1) = \varepsilon \Psi_{\alpha,i}(m_0)$ и, тем самым, ортогонален к $\Psi_{\alpha,i}$. Покажем, что

$$\varphi_{\alpha,i} + \sum_{j \neq i} \frac{(\chi, \Psi_{\alpha,j})}{\lambda_{\alpha,i} - \lambda_{\alpha,j}} \Psi_{\alpha,j}$$

есть с.ф. H_α с с.з. $\lambda_{\alpha,i}$, в предположении, что последняя сумма сходится в L^2 . Малые знаменатели, которые здесь присутствуют, напоминают малые знаменатели КАМ-теории. В нашей ситуации сходимость имеет место, так как “малым знаменателям” отвечают достаточно “малые числители”. Далее, $\chi = \sum_{j \neq i} (\chi, \Psi_{\alpha,j}) \Psi_{\alpha,j}$ и

$$\begin{aligned} H_\alpha \left(\varphi_{\alpha,i} + \sum_{j \neq i} \frac{(\chi, \Psi_{\alpha,j})}{\lambda_{\alpha,i} - \lambda_{\alpha,j}} \Psi_{\alpha,j} \right) &= \lambda_{\alpha,i} \varphi_{\alpha,i} + \chi + \sum_{j \neq i} \frac{\lambda_{\alpha,j} (\chi, \Psi_{\alpha,j})}{\lambda_{\alpha,i} - \lambda_{\alpha,j}} \Psi_{\alpha,j} \\ &= \lambda_{\alpha,i} \left(\varphi_{\alpha,i} + \sum_{j \neq i} \frac{(\chi, \Psi_{\alpha,j})}{\lambda_{\alpha,i} - \lambda_{\alpha,j}} \Psi_{\alpha,j} \right). \end{aligned}$$

Поэтому при некоторой постоянной A_{α,i,m_0}

$$(16) \quad A_{\alpha,i,m_0} \Psi_{\alpha,i} = \varphi_{\alpha,i} + \sum_{j \neq i} \frac{(\chi, \Psi_{\alpha,j})}{\lambda_{\alpha,i} - \lambda_{\alpha,j}} \Psi_{\alpha,j}.$$

Мы будем использовать последние соотношения в ситуациях, когда с.н. $\Psi_{\alpha,i}$ лежит слева от m_0 . Тогда A_{α,i,m_0} экспоненциально близка к 1 как функция от расстояния $\text{dist}(m_0, Z(\Psi_{\alpha,i}))$. Напишем (16) при $m = m_0 + 1$:

$$\begin{aligned} (17) \quad A_{\alpha,i,m_0} \Psi_{\alpha,i}(m_0 + 1) &= \varepsilon \Psi_{\alpha,i}(m_0 + 1) \sum_{j \neq i} \frac{\Psi_{\alpha,j}(m_0) \Psi_{\alpha,j}(m_0 + 1)}{\lambda_{\alpha,i} - \lambda_{\alpha,j}} \\ &\quad + \varepsilon \Psi_{\alpha,i}(m_0) \sum_{j \neq i} \frac{\Psi_{\alpha,j}^2(m_0 + 1)}{\lambda_{\alpha,i} - \lambda_{\alpha,j}}. \end{aligned}$$

Введем усеченную резольвенту

$$(18) \quad \Gamma_i(\lambda, m_1, m_2) = \sum_{j \neq i} \frac{\Psi_{\alpha,j}(m_1) \Psi_{\alpha,j}(m_2)}{\lambda - \lambda_{\alpha,j}}.$$

Из (17) вытекает

$$(19) \quad \frac{\Psi_{\alpha,i}(m_o + 1)}{\Psi_{\alpha,i}(m_o)} = \varepsilon \frac{\Gamma_i(\lambda_{\alpha,i}; m_o, m_o + 1)}{A_{\alpha,i,m_o} + \varepsilon \Gamma_i(\lambda_{\alpha,i}; m_o + 1, m_o + 1)}.$$

Поскольку коэффициенты A_{α,i,m_o} экспоненциально стремятся к 1 с ростом m_o , основной вклад в суммы (18), участвующие в (19), дают слагаемые, отвечающие с.ф., сосредоточенным около m_o , так как для таких j значения $\Psi_{\alpha,j}(m)$ порядка 1, а для остальных j они убывают по мере удаления с.н. от m_o . Как уже упоминалось, основная тактика при доказательстве ЛА состоит в том, чтобы сделать малые знаменатели $\lambda_{\alpha,i} - \lambda_{\alpha,j}$ не слишком малыми, а соответствующие им числители не слишком большими. Тогда ряды (18) будут достаточно быстро сходиться и отношение

$$\varepsilon \frac{\Gamma_i(\lambda_{\alpha,i}; m_o + 1, m_o + 1)}{1 + \varepsilon \Gamma_i(\lambda_{\alpha,i}; m_o, m_o + 1)} = \Theta(\lambda_{\alpha,i}; \alpha + m_o \omega)$$

можно рассматривать как более или менее регулярную функцию $\alpha + m_o \omega$. Мы можем теперь написать

$$(20) \quad \frac{\Psi_{\alpha,i}(m_o + k)}{\Psi_{\alpha,i}(m_o)} = \varepsilon^k \prod_{r=m_o}^{m_o+k-1} \Theta(\lambda_{\alpha,i}; \alpha + r\omega) \cdot R_{m_o}^{m_o+k-1},$$

где $R_{m_o}^{m_o+k-1}$ — остаточный член порядка 1, связанный с тем, что мы заменили все A_{α,i,m_o} на 1. Произведение в (20) может быть оценено с помощью эргодической теоремы, причем $\lambda_{\alpha,i}$ можно считать параметром. Мы видим также, что интеграл от логарифма модуля $\Theta(\lambda_{\alpha,i}; \alpha)$ определяет показатель Ляпунова, отвечающий с.ф. $\Psi_{\alpha,i}$. Отношение в левой части (20) экспоненциально стремится к нулю, если ε достаточно мало.

Аналогичные формулы могут быть выписаны, когда m_o лежит слева от с.н. $\Psi_{\alpha,i}$. В таком случае надо брать φ , равные нулю при $m < m_o$.

В основной индуктивной процедуре мы используем аналогичные формулы, в которых вместо точных с.ф. фигурируют приближенные с.ф.

Теперь мы проделаем явно два первых шага основной индуктивной процедуры. На нулевом шаге полагаем

$$\Psi_{\alpha,i}^{(0)} = \delta_i, \quad \lambda_{\alpha,i}^{(0)} = V(\alpha + i\omega), \quad Z(\Psi_{\alpha,i}^{(0)}) = i, \quad -\infty < i < \infty.$$

Поэтому $\Phi_{\alpha,m}^{(0)} = \Psi_{\alpha,0}^{(0)}$, $\Lambda_{\alpha}^{(0)} = V(\alpha)$ и

$$H_{\alpha} \Psi_{\alpha,i}^{(0)} = V(\alpha + i\omega) \Psi_{\alpha,i}^{(0)} + h_{\alpha,i}^{(0)},$$

где $h_{\alpha,i}^{(0)}$ — погрешность. На следующем шаге хотелось бы положить, в соответствии с обычной теорией возмущений,

$$(21) \quad \Psi_{\alpha,i}^{(1)} = \Psi_{\alpha,i}^{(0)} + \sum_{j \neq i} \frac{(h_{\alpha,i}^{(0)}, \Psi_{\alpha,i}^{(0)})}{\lambda_{\alpha,i}^{(0)} - \lambda_{\alpha,j}^{(0)}} \Psi_{\alpha,j}^{(0)}.$$

Эти формулы неприменимы, если знаменатель $\lambda_{\alpha,i}^{(0)} - \lambda_{\alpha,j}^{(0)}$ равен нулю или слишком мал. При таких значениях α мы имеем резонанс между $\Psi_{\alpha,i}^{(0)}$ и $\Psi_{\alpha,j}^{(0)}$. Это означает, что на следующем шаге приближенные с.ф. в главном порядке должны быть линейными комбинациями невозмущенных $\Psi_{\alpha,i}^{(0)}$ и $\Psi_{\alpha,j}^{(0)}$. На первом шаге нашей индуктивной процедуры резонанс происходит около тех α , где $V(\alpha) = V(\alpha + \omega)$. В классе функций V , которые мы рассматриваем, имеется две таких точки резонанса $\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}$, где убывающая ветвь $V(\alpha)$ пересекается с возрастающей ветвью $V(\alpha + \omega)$ и наоборот (см. рис. 4).

Рис. 4

Поскольку мы должны построить $\Phi_{\alpha}^{(1)}$, мы можем пользоваться формулами (21) вне некоторых окрестностей U_1, U_2 точек $\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}$. Внутри же этих окрестностей невозмущенные с.з. близки между собой. Для таких α мы будем строить новые приближенные с.ф., которые в главном порядке представляют собой линейные комбинации невозмущенных с.ф. с вполне определенными весами. Если $\Psi_{\alpha,i}^{(0)}$ и $\Psi_{\alpha,i}^{(0)} = S\Psi_{\alpha+\omega,j}^{(0)}$ имеют близкие приближенные с.з., то мы полагаем

$$\begin{aligned} \Psi_{\alpha,i}^{(1)} &= a_{11} \left(\Psi_{\alpha,i}^{(0)} + \sum_{k \neq i,j} \frac{(h_{\alpha,i}^{(0)}, \Psi_{\alpha,k}^{(0)})}{\lambda_{\alpha,i}^{(0)} - \lambda_{\alpha,k}^{(0)}} \Psi_{\alpha,k}^{(0)} \right) + a_{12} \left(\Psi_{\alpha,j}^{(0)} + \sum_{k \neq i,j} \frac{(h_{\alpha,j}^{(0)}, \Psi_{\alpha,k}^{(0)})}{\lambda_{\alpha,j}^{(0)} - \lambda_{\alpha,k}^{(0)}} \Psi_{\alpha,k}^{(0)} \right), \\ \Psi_{\alpha,j}^{(1)} &= a_{21} \left(\Psi_{\alpha,i}^{(0)} + \sum_{k \neq i,j} \frac{(h_{\alpha,i}^{(0)}, \Psi_{\alpha,k}^{(0)})}{\lambda_{\alpha,i}^{(0)} - \lambda_{\alpha,k}^{(0)}} \Psi_{\alpha,k}^{(0)} \right) + a_{22} \left(\Psi_{\alpha,j}^{(0)} + \sum_{k \neq i,j} \frac{(h_{\alpha,j}^{(0)}, \Psi_{\alpha,k}^{(0)})}{\lambda_{\alpha,j}^{(0)} - \lambda_{\alpha,k}^{(0)}} \Psi_{\alpha,k}^{(0)} \right). \end{aligned}$$

Матрица $\|a_{i,j}\|$ ортогональна и приводит матрицу

$$\left\| \begin{array}{cc} \lambda_{\alpha,i}^{(0)} & (\Psi_{\alpha,i}^{(0)}, \Psi_{\alpha,j}^{(0)}) \\ (\Psi_{\alpha,i}^{(0)}, \Psi_{\alpha,j}^{(0)}) & \lambda_{\alpha,j}^{(0)} \end{array} \right\|$$

Рис. 5

Рис. 6

к диагональному виду. Существенный носитель новых приближенных с.ф. полагается равным $Z(\Psi_{\alpha,i}^{(1)}) = Z(\Psi_{\alpha,j}^{(1)}) = 0 \cup 1$, их вид представлен схематически на рис. 5.

Обсудим подробнее разницу между $\Lambda_{\alpha}^{(0)}$ и $\Lambda_{\alpha}^{(1)}$. Рассмотрим для определенности окрестность U_1 . До того, как строить новые приближенные с.ф., мы имели две окрестности U_1, U_1' и графики $\Lambda_{\alpha}^{(0)} = V(\alpha)$ на них. Выберем эти окрестности U_1, U_1' так, чтобы графики $\Lambda_{\alpha}^{(0)}$ проектировались на один и тот же интервал на оси $\Lambda^{(0)}$ (см. рис. 6). На следующем шаге индукции мы имеем две новые приближенные с.ф., вид которых представлен на рис. 5, с различающимися с.з. Функция $\Lambda_{\alpha}^{(0)}$ становится двузначной на U_1 (см. рис. 7) и не принимает вообще значений на U_1' . Это связано с тем, что для $\alpha' \in U_1'$ не существует приближенных с.ф., для которых $\text{ros}(\Psi_{\alpha',i}^{(1)}) = 0$. Если $0 \in Z(\Psi_{\alpha',i}^{(1)})$, то другая точка с.н. лежит слева от нуля.

Рис. 7

Вид $\Lambda_{\alpha}^{(1)}$ также важен. На U_1 ее график состоит из двух ветвей. Ветви, примыкающие к концам U_1' , принимают в этих концах те же значения, что и ветви $\Lambda_{\alpha}^{(1)}$, опреде-

Рис. 8

ленные на U_1 . Более того, если взять график $\Lambda_\alpha^{(1)}$ около границы U'_1 и сдвинуть его на $-\omega$, то он будет представлять собой C^2 -гладкое продолжение соответствующей ветви на U_1 (см. рис. 8). Ясно также, что $\Lambda_\alpha^{(1)}$ и $\Lambda_{\alpha+\omega}^{(1)}$ не пересекаются нигде, кроме концов ветвей $\Lambda_\alpha^{(1)}$. Уже на этом шаге теории возмущений полезно проследить появление на оси Λ интервалов, где нет значений $\Lambda_\alpha^{(1)}$, так называемых запрещенных зон. Они возникают вследствие резонансов, и мы увидим далее, что вся конструкция приводит к спектру, сосредоточенному на Канторовом множестве положительной меры с бесконечным числом запрещенных зон.

Рис. 9

Обсудим теперь выбор размеров окрестностей U_1, U'_1 . Легко посчитать, что форма $\Psi_{\alpha,i}^{(1)}$ и $\Psi_{\alpha,j}^{(1)}$ по мере изменения α вдоль U_1 меняется следующим образом (рис. 9). В концах U_1 приближенные с.ф. $\Psi_{\alpha,i}^{(1)}$, $\Psi_{\alpha,j}^{(1)}$ имеют только один существенный пик, и эта форма продолжается в нерезонансную область. Поэтому выбор границ U_1 неоднозначен и может меняться в определенных пределах. Иногда полезно границы U_1 немного сдвигать, если пересечения графиков соответствующих функций происходят слишком близко к их концам (см. далее).

Теперь мы сформулируем индуктивные предположения на n -м шаге нашей индуктивной процедуры. Допустим, что мы имеем функцию $\Phi_\alpha^{(n)}$, значения которой представляют собой конечные множества (возможно, пустые) приближенных нормированных с.ф. $\Psi_{\alpha,i}^{(n)}$, имеющих с.н. $Z(\Psi_{\alpha,i}^{(n)})$, причем $\text{pos}(Z(\Psi_{\alpha,i}^{(n)})) = 0$. Кроме того, каждая приближенная с.ф. $\Psi_{\alpha,i}^{(n)}$ имеет полный конечный носитель, вне которого она тождественно равна нулю. Мы обозначим его $FZ(\Psi_{\alpha,i}^{(n)})$. Полный носитель растет с ростом n , в то время как с.н. $Z(\Psi_{\alpha,i}^{(n)})$ стабилизируется. $FZ(\Psi_{\alpha,i}^{(n)})$ представляет собой конечный отрезок.

Строим базис в l^2 по формуле $\{\Psi_{\alpha,i}^{(n)}\} = \bigcup_{-\infty < m < \infty} S^m \Phi_{\alpha+m\omega}^{(n)}$. Этот базис неортогональный и становится ортогональным только в пределе $n \rightarrow \infty$. Утверждение о том, что $(\Psi_{\alpha,i}^{(n)})$ образует базис, можно считать еще одним индуктивным предположением. Для каждой приближенной с.ф. $\Psi_{\alpha,i}^{(n)} \in \Phi_\alpha^{(n)}$ задано приближенное с.з. $\lambda_{\alpha,i}^{(n)}$ так, что

$$(22) \quad H_\alpha \Psi_{\alpha,i}^{(n)} = \lambda_{\alpha,i}^{(n)} \Psi_{\alpha,i}^{(n)} + b_{\alpha,i}^{(n)} + h_{\alpha,i}^{(n)},$$

где $b_{\alpha,i}^{(n)}$ и $h_{\alpha,i}^{(n)}$ — погрешности. Расщепление всей погрешности на две части существенно. Пусть $FZ(\Psi_{\alpha,i}^{(n)})$ есть отрезок $[m_1, m_2]$. Тогда $b_{\alpha,i}^{(n)}$ отлична от нуля только в точках $m_1 - 1, m_1$ и $m_2, m_2 + 1$, а $h_{\alpha,i}^{(n)}$ равна нулю в этих точках. Этим $b_{\alpha,i}^{(n)}$ и $h_{\alpha,i}^{(n)}$ определены однозначно и $h_{\alpha,i}^{(n)}(m)$ равно нулю при всех m вне отрезка $[m_1 + 2, m_2 - 2]$.

Полагаем $\Lambda_\alpha^{(n)} = \{\lambda_{\alpha,i}^{(n)} \mid \Psi_{\alpha,i}^{(n)} \in \Phi_\alpha^{(n)}\}$ и $\bigcup_{-\infty < m < \infty} \Lambda_{\alpha+m\omega}^{(n)}$ есть приближенный спектр H_α .

Как уже отмечалось выше, из того, что V принимает каждое значение не более чем в двух точках, следует, что с.н. $Z(\Psi_{\alpha,i}^{(n)})$ имеет специальную иерархическую структуру, которая связана со структурой резонансов. Мы опишем ее снова, и это можно считать еще одним индуктивным предположением. А именно,

$$Z(\Psi_{\alpha,i}^{(n)}) = Z_1 \cup (Z_1 + m_r), \quad Z_1 = Z_2 \cup (Z_2 + m_{r-1})$$

и т. д. Положительные числа $m_1, m_2, \dots$ называются ширинами резонансов. Из конструкции будет следовать, что m_i растут очень быстро, m_i принимает значения порядка $\exp\{\text{const} \cdot m_{i-1}\}$. Такая иерархическая структура означает, в частности, что

$$\#\{Z(\Psi_{\alpha,i}^{(n)})\} = 2^r,$$

где r — число резонансов, в которых участвует данная приближенная с.ф. (см. далее).

Теперь мы опишем предположения, касающиеся формы $\Lambda_\alpha^{(n)}$, которая не слишком сильно отличается от формы $\Lambda_\alpha^{(n)}$. Допустим, что на оси Λ имеется несколько отрезков, обозначаемых далее $\Delta_{k,s}^{(n)}$, индекс s принимает значения 1, 2, 3. Для каждого $\Delta_{k,2}^{(n)}$ отрезок $\Delta_{k,1}^{(n)}$ примыкает к $\Delta_{k,2}^{(n)}$ слева, а отрезок $\Delta_{k,3}^{(n)}$ — справа. Отрезок $\Delta_{k,2}^{(n)}$ гораздо длиннее примыкающих к нему отрезков: $l(\Delta_{k,1}^{(n)}), l(\Delta_{k,3}^{(n)}) \leq \text{const} \varepsilon n^{-3} l(\Delta_{k,2}^{(n)})$. Выбор const будет описан позже. В действительности, левые части этого неравенства гораздо меньше.

Для каждого $\Delta_{k,2}^{(n)}$ можно найти два отрезка $U_{k,2,1}^{(n)}, U_{k,2,2}^{(n)} \subset S^1$ так, что среди значений $\Lambda_\alpha^{(n)}$ имеются C^2 -функция $\Lambda_\alpha^{(n)}(k, 2, 1)$, заданная на $U_{k,2,1}^{(n)}$, и C^2 -функция $\Lambda_\alpha^{(n)}(k, 2, 2)$, заданная на $U_{k,2,2}^{(n)}$, и при этом

- i₀) с.н. всех приближенных с.ф. $\Psi_{\alpha,i}^{(n)}$, отвечающих этим ветвям, одни и те же, т.е. не зависят от α ;
- i₁) $\Lambda_\alpha^{(n)}(k, 2, 1)$ монотонно возрастает, $\Lambda_\alpha^{(n)}(k, 2, 2)$ монотонно убывает;
- i₂) функция $\Lambda_\alpha^{(n)}(k, 2, 1)$ ($\Lambda_\alpha^{(n)}(k, 2, 2)$) отображает гомеоморфно $U_{k,2,1}^{(n)}$ ($U_{k,2,2}^{(n)}$) на $\Delta_{k,2}^{(n)}$; прообраз $\Delta_{k,2}^{(n)}$ при отображении $(\Lambda^{(n)})^{-1}$ есть $U_{k,2,1}^{(n)} \cup U_{k,2,2}^{(n)}$;
- i₃) $\frac{d}{d\alpha} \Lambda_\alpha^{(n)}(k, 2, 1) \geq (b_1\varepsilon)^n$, $\frac{d}{d\alpha} \Lambda_\alpha^{(n)}(k, 2, 2) \leq -(b_1\varepsilon)^n$;
- i₄) $\left| \frac{d^2 \Lambda_\alpha^{(n)}(k, 2, 1)}{d\alpha^2} \right| \leq (B_2\varepsilon)^{-n}$, $\left| \frac{d^2 \Lambda_\alpha^{(n)}(k, 2, 2)}{d\alpha^2} \right| \leq (B_2\varepsilon)^{-n}$.

Здесь b_1, B_2 — постоянные, не зависящие от n , о которых будет сказано позже. Типичный вид $\Lambda_\alpha^{(n)}(k, 2, 1)$, $\Lambda_\alpha^{(n)}(k, 2, 2)$ представлен на рис. 10.

Рис. 10

Рассмотрим теперь $\Delta_{k,3}^{(n)}$ и $\Delta_{k+1,1}^{(n)}$. Интервал между ними представляет собой приближенную запрещенную зону на n -м шаге. Можно найти интервал $U_{k,3}^{(n)} \subset S^1$ так, что среди значений $\Lambda_\alpha^{(n)}$ имеется C^2 -функция $\Lambda_\alpha^{(n)}(k, 3)$, определенная на $U_{k,3}^{(n)}$ и такая, что

- j₁) $\Lambda_{k,3}^{(n)}$ отображает $U_{k,3}^{(n)}$ на $\Delta_{k,3}^{(n)}$ и при этом принимает одинаковые значения в концах $U_{k,3}^{(n)}$; прообраз $\Delta_{k,3}^{(n)}$ при отображении $(\Lambda^{(n)})^{-1}$ есть $U_{k,3}^{(n)}$;
- j₂) с.н. различных приближенных $\Psi_{\alpha,i}^{(n)}$, $\alpha \in U_{k,3}^{(n)}$, один и тот же и не зависит от α ;
- j₃) функция $\Lambda_{k,3}^{(n)}$ вогнута и

$$\frac{d^2 \Lambda_{k,3}^{(n)}}{d\alpha^2} \leq -(B_3\varepsilon)^n.$$

Аналогичным образом, для отрезка $\Delta_{k+1,1}^{(n)}$ найдется окрестность $U_{k+1,1}^{(n)} \subset S^1$ и ветвь $\Lambda_{k+1,1}^{(n)}$ функции $\Lambda_\alpha^{(n)}$, заданная на $U_{k+1,1}^{(n)}$ и такая, что

- j'_1) $\Lambda_{(k+1,1)}^{(n)}$ отображает $U_{k+1,1}^{(n)}$ на $\Delta_{k+1,1}^{(n)}$ и принимает одинаковые значения в концах $U_{k+1,1}^{(n)}$; прообраз $U_{k+1,1}^{(n)}$ при отображении $(\Lambda^{(n)})^{-1}$ есть $U_{k+1,1}^{(n)}$;
- j'_2) с.н. различных с.ф. $\Psi_{\alpha,i}^{(n)}$, $\alpha \in U_{k+1,1}^{(n)}$, один и тот же и не зависит от α ;
- j'_3) функция $\Lambda_{k+1,1}^{(n)}$ выпукла и

$$\frac{d^2 \Lambda^{(n)}(k+1,1)}{d\alpha^2} \geq (B_3 \varepsilon)^n,$$

B_3 — еще одна постоянная той же природы, что и b_1 , B_2 .

Рис. 11

Типичный вид $\Lambda_\alpha^{(n)}(k,3)$ и $\Lambda_\alpha^{(n)}(k+1,1)$ представлен на рис. 11. Последний справа сегмент $\Delta_{k+1,3}^{(n)}$, правая граница которого обозначается $\Lambda_{\max}^{(n)}$, для нас особенно важен ввиду содержания §1 и §2. К этому интервалу не примыкает следующий интервал $\Delta_{k+1,1}^{(n)}$ и имеется окрестность $U_\alpha^{(n)}(k_1,3)$ и только одна выпуклая функция $\Lambda_\alpha^{(n)}(k_1,3)$, удовлетворяющая тем же неравенствам j_2). Аналогичное предположение выполняется около точки, где $\Lambda_\alpha^{(n)}$ принимает минимальное значение. Вся функция $\Lambda_\alpha^{(n)}$ есть объединение ветвей $\Lambda_\alpha^{(n)}(k,1)$, $\Lambda_\alpha^{(n)}(k,2)$, $\Lambda_\alpha^{(n)}(k,3)$. Наши предположения описывают вид $\Lambda_\alpha^{(n)}$ на прообразе каждого сегмента $\Delta_{k,s}^{(n)}$. Существенно также, что ветви $\Lambda_\alpha^{(n)}$ не пересекаются с ветвями сдвигов $\Lambda_{\alpha+m\omega}^{(n)}$, $0 \leq m \leq n$, кроме, быть может, концов. Более точно, $\Lambda_{\alpha+m\omega}^{(n)}(k+1,2,2)$ является C^2 -продолжением $\Lambda_{\alpha+m\omega}^{(n)}(k+1,1)$ и $\Lambda_{\alpha+m\omega}^{(n)}(k+1,2,1)$ является C^2 -продолжением $\Lambda_{\alpha+m\omega}^{(n)}(k,3)$ (см. рис. 12). Отсутствие пересечений означает, что к n -му шагу мы уже учли все резонансы ширины, не превосходящей n .

Основная индуктивная процедура состоит в построении новых приближенных с.ф. $\Psi_{\alpha,i}^{(n+1)}$, функции $\Phi_\alpha^{(n+1)}$, соответствующих приближенных с.з. $\lambda_{\alpha,i}^{(n+1)}$ и функции $\Lambda_\alpha^{(n+1)}$.

Рассмотрим пересечения графиков $\Lambda_\alpha^{(n)}$ и $\Lambda_{\alpha+n\omega}^{(n)}$, что, очевидно, сводится к пересечению их ветвей, описанных выше. Ясно, что эти пересечения могут изучаться

Рис. 12

отдельно для каждого из отрезков $\Delta_{k,s}^{(n)}$. Поскольку в выборе их концов есть определенный произвол, мы всегда можем считать, что эти пересечения происходят во внутренних точках всех отрезков. Ясно также, что благодаря иррациональности ω пересечения возможны

либо между ветвями $\Lambda_{\alpha}^{(n)}(k, 2, 1)$ и $\Lambda_{\alpha+n\omega}^{(n)}(k, 2, 2)$ или $\Lambda_{\alpha}^{(n)}(k, 2, 2)$ и $\Lambda_{\alpha+n\omega}^{(n)}(k, 2, 1)$ (см. рис. 13 (а)),

либо между $\Lambda_{\alpha}^{(n)}(k, 3)$ и $\Lambda_{\alpha+m\omega}^{(n)}(k, 3)$ (см. рис. 13 (b)).

либо между $\Lambda_{\alpha}^{(n)}(k, 1)$ и $\Lambda_{\alpha+m\omega}^{(n)}(k, 1)$ (см. рис. 13 (с)).

Рис. 13

Пусть $C_4 = C_4(\omega, \alpha, \varepsilon)$ – еще одна достаточно большая постоянная, выбор которой также обсуждается позже. Окрестность радиуса $(C_4\varepsilon)^n$ точки пересечения $\Lambda_{\alpha}^{(n)} \cap \Lambda_{\alpha+n\omega}^{(n)}$ будем называть резонансной зоной. Возьмем $\Psi_{\alpha,i}^{(n)} \in \Phi_{\alpha}^{(n)}$ и соответствующее $\lambda_{\alpha,i}^{(n)}$. Назовем $\Psi_{\alpha,i}^{(n)}$ нерезонансной приближенной с.ф. (на $(n+1)$ -м шаге нашей процедуры), если для любой точки пересечения $(\lambda, \alpha) \in \Lambda_{\alpha}^{(n)} \cap \Lambda_{\alpha+n\omega}^{(n)}$ справедливо неравенство $|\lambda - \lambda_{\alpha,i}^{(n)}| \geq (C_4\varepsilon)^n$.

В нерезонансном случае мы строим следующее приближение к с.ф. с помощью обычных формул теории возмущений:

$$(23) \quad \tilde{\Psi}_{\alpha,i}^{(n+1)} = \Psi_{\alpha,i}^{(n)} + \sum_{j \neq i} \frac{(b_{\alpha,i}^{(n)} + h_{\alpha,i}^{(n)}, \Psi_{\alpha,i}^{(n)})}{\lambda_{\alpha,i}^{(n)} - \lambda_{\alpha,j}^{(n)}} \Psi_{\alpha,j}^{(n)},$$

$$(24) \quad \lambda_{\alpha,i}^{(n+1)} = \lambda_{\alpha,i}^{(n)} + (b_{\alpha,i}^{(n)} + h_{\alpha,i}^{(n)}, \Psi_{\alpha,i}^{(n)}).$$

Покажем, что формулы (23), (24) действительно задают следующее приближение к будущей с.ф. и будущему с.з. Мы имеем

$$H_{\alpha} \tilde{\Psi}_{\alpha,i}^{(n+1)} = \lambda_{\alpha,i}^{(n)} \Psi_{\alpha,i}^{(n)} + b_{\alpha,i}^{(n)} + h_{\alpha,i}^{(n)} + \sum_{j \neq i} \frac{(b_{\alpha,i}^{(n)} + h_{\alpha,i}^{(n)}, \Psi_{\alpha,i}^{(n)}) \lambda_{\alpha,j}^{(n)} \Psi_{\alpha,j}^{(n)}}{\lambda_{\alpha,i}^{(n)} - \lambda_{\alpha,j}^{(n)}} + \tilde{e}_{\alpha,i}^{(n)},$$

где $\tilde{e}_{\alpha,i}^{(n)}$ – погрешность более высокого порядка малости, получающаяся от того, что в последнюю сумму мы подставляем соответствующие погрешности $b_{\alpha,i}^{(n)}$ и $h_{\alpha,i}^{(n)}$. Далее, при $\delta \lambda_{\alpha,i}^{(n)} = (b_{\alpha,i}^{(n)} + h_{\alpha,i}^{(n)}, \Psi_{\alpha,i}^{(n)})$

$$(25) \quad \begin{aligned} H_{\alpha} \tilde{\Psi}_{\alpha,i}^{(n)} - \lambda_{\alpha,i}^{(n+1)} \tilde{\Psi}_{\alpha,i}^{(n)} &= H_{\alpha} \tilde{\Psi}_{\alpha,i}^{(n)} - \lambda_{\alpha,i}^{(n)} \tilde{\Psi}_{\alpha,i}^{(n)} - \delta \lambda_{\alpha,i}^{(n)} \tilde{\Psi}_{\alpha,i}^{(n)} \\ &= b_{\alpha,i}^{(n)} + h_{\alpha,i}^{(n)} - \sum_j (b_{\alpha,i}^{(n)} + h_{\alpha,i}^{(n)}, \Psi_{\alpha,j}^{(n)}) \Psi_{\alpha,j}^{(n)} + \tilde{e}_{\alpha,i}^{(n)}. \end{aligned}$$

Если бы набор $\{\Psi_{\alpha,i}^{(n)}\}$ был ортонормированным базисом, то от последнего выражения осталось бы только $\tilde{e}_{\alpha,i}^{(n)}$. Однако в нашем случае это не так. Введем матрицу скалярных произведений $\delta_{\alpha,i,j}^{(n)} = (\Psi_{\alpha,i}^{(n)}, \Psi_{\alpha,j}^{(n)}) = \delta_{i,j} + \xi_{\alpha,i,j}^{(n)}$. Это скалярное произведение заведомо равно нулю, если полные носители $FZ(\Psi_{\alpha,i}^{(n)})$, $FZ(\Psi_{\alpha,j}^{(n)})$ попарно не пересекаются. В противном случае оно мало, и мы вводим еще одно требование, которое также проверяем по индукции: $|\xi_{\alpha,i,j}^{(n)}| \leq (C_5^n)^n$, где $C_5 < 1$ – еще одна постоянная, не зависящая от n, ε, α , т.е. $C_5 = C_5(\omega)$.

Мы полагаем в нерезонансном случае $Z(\tilde{\Psi}_{\alpha,i}^{(n+1)}) = Z(\Psi_{\alpha,i}^{(n)})$. Полный носитель $FZ(\Psi_{\alpha,i}^{(n+1)})$ будущей приближенной с.ф. $\Psi_{\alpha,i}^{(n+1)}$ получается добавлением одной точки слева и одной точки справа к $FZ(\Psi_{\alpha,i}^{(n)})$. После того как $FZ(\Psi_{\alpha,i}^{(n+1)})$ выбран, мы рассматриваем ограничение $\tilde{\Psi}_{\alpha,i}^{(n+1)}$ на $FZ(\Psi_{\alpha,i}^{(n+1)})$ и нормируем его так, чтобы норма этого ограничения была равна 1. Полученную функцию и обозначим $\Psi_{\alpha,i}^{(n+1)}$. Ясно, что $\Psi_{\alpha,i}^{(n+1)}$ равна нулю вне $FZ(\Psi_{\alpha,i}^{(n+1)})$. Выражения для $b_{\alpha,i}^{(n+1)}$, $h_{\alpha,i}^{(n+1)}$ следуют из их определения.

Перейдем к резонансному случаю, когда для $\Psi_{\alpha,i}^{(n)} \in \Phi_{\alpha}^{(n)}$ найдется приближенная с.ф. $\Psi_{\alpha+n\omega,j}^{(n)} \in \Phi_{\alpha}^{(n)}$, для которой $|\lambda_{\alpha,i}^{(n)} - \lambda_{\alpha+n\omega,j}^{(n)}| \leq (C_4\varepsilon)^n$ и правый конец $FZ(\Psi_{\alpha,i}^{(n)})$ является соседним с левым концом $FZ(\Psi_{\alpha,i}^{(n)}) + n$. В силу наших предположений о $\Lambda_{\alpha}^{(n)}$ это означает, что α лежит в $(C_4\varepsilon)^n$ -окрестности одной из точек пересечения $\Lambda_{\alpha}^{(n)}$ и $\Lambda_{\alpha+n\omega}^{(n)}$. Такую ситуацию естественно назвать стыковкой приближенных с.ф. Нетрудно показать, что такая $\Psi_{\alpha+n\omega,j}^{(n)}$ только одна, т.е. резонанс возможен

лишь между двумя приближенными с.ф. В этом сказывается специфика нашей ситуации, связанная, главным образом, с тем, что мы имеем только одну частоту ω . Мы будем здесь использовать формулы теории возмущений в резонансном случае, которые дают вместо двух приближенных с.ф. $\Psi_{\alpha,i}^{(n)}$, $\Psi_{\alpha+n\omega,j}^{(n)}$ две новые приближенные с.ф. $\Psi_{\alpha,i}^{(n+1)}$, $\Psi_{\alpha+n\omega,j}^{(n+1)}$, являющиеся линейными комбинациями $\Psi_{\alpha,i}^{(n)}$ и $S^n \Psi_{\alpha+n\omega,j}^{(n)}$. Аналогичные выражения можно найти в работах [4], [6], [7]. Существенный носитель $\Psi_{\alpha,i}^{(n+1)}$, $\Psi_{\alpha,j}^{(n+1)}$ полагается равным

$$Z(\Psi_{\alpha,i}^{(n)}) \cup (Z(\Psi_{\alpha+n\omega,j}^{(n)}) + n) = Z(\Psi_{\alpha,i}^{(n)}) \cup (Z(\Psi_{\alpha,i}^{(n)}) + n),$$

поскольку резонанс возможен только между приближенными с.ф. с одним и тем же с.н. Отсюда вытекает иерархическая структура с.н., о которой упоминалось выше. Новые приближенные с.ф. строятся с помощью тех же формул, что и выше, т.е.

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{\alpha,i}^{(n+1)} &= a_{11} \left(\Psi_{\alpha,i}^{(n)} + \sum_{k \neq i,j} \frac{(b_{\alpha,i}^{(n)} + h_{\alpha,i}^{(n)}, \Psi_{\alpha,k}^{(n)})}{\lambda_{\alpha,i}^{(n)} - \lambda_{\alpha,k}^{(n)}} \Psi_{\alpha,k}^{(n)} \right) \\ &\quad + a_{12} \left(\Psi_{\alpha,i}^{(n)} + \sum_{k \neq i,j} \frac{(b_{\alpha,j}^{(n)} + h_{\alpha,j}^{(n)}, \Psi_{\alpha,k}^{(n)})}{\lambda_{\alpha,j}^{(n)} - \lambda_{\alpha,k}^{(n)}} \Psi_{\alpha,k}^{(n)} \right), \\ \tilde{\Psi}_{\alpha,j}^{(n+1)} &= a_{21} \left(\Psi_{\alpha,i}^{(n)} + \sum_{k \neq i,j} \frac{(b_{\alpha,i}^{(n)} + h_{\alpha,i}^{(n)}, \Psi_{\alpha,k}^{(n)})}{\lambda_{\alpha,i}^{(n)} - \lambda_{\alpha,k}^{(n)}} \Psi_{\alpha,k}^{(n)} \right) \\ &\quad + a_{22} \left(\Psi_{\alpha,i}^{(n)} + \sum_{k \neq i,j} \frac{(b_{\alpha,j}^{(n)} + h_{\alpha,j}^{(n)}, \Psi_{\alpha,k}^{(n)})}{\lambda_{\alpha,j}^{(n)} - \lambda_{\alpha,k}^{(n)}} \Psi_{\alpha,k}^{(n)} \right). \end{aligned}$$

Уравнение для новых приближенных с.з. μ есть квадратное уравнение

$$\begin{aligned} &(\lambda_{\alpha,i}^{(n)} - \mu)(\lambda_{\alpha,j}^{(n)} - \mu) + (b_{\alpha,i}^{(n)} + h_{\alpha,i}^{(n)}, \Psi_{\alpha,i}^{(n)}) \cdot (\lambda_{\alpha,j}^{(n)} - \mu) + (\lambda_{\alpha,i}^{(n)} - \mu)(b_{\alpha,j}^{(n)} + h_{\alpha,j}^{(n)}, \Psi_{\alpha,j}^{(n)}) \\ &+ (b_{\alpha,i}^{(n)} + h_{\alpha,i}^{(n)}, \Psi_{\alpha,i}^{(n)})(b_{\alpha,j}^{(n)} + h_{\alpha,j}^{(n)}, \Psi_{\alpha,j}^{(n)}) - (b_{\alpha,i}^{(n)} + h_{\alpha,i}^{(n)}, \Psi_{\alpha,j}^{(n)})(b_{\alpha,j}^{(n)} + h_{\alpha,j}^{(n)}, \Psi_{\alpha,i}^{(n)}) = 0. \end{aligned}$$

Его решения имеют вид

$$\begin{aligned} (26) \quad \mu &= \frac{\lambda_{\alpha,i}^{(n)} - \lambda_{\alpha,j}^{(n)}}{2} + \frac{(b_{\alpha,i}^{(n)} + h_{\alpha,i}^{(n)}, \Psi_{\alpha,i}^{(n)}) + (b_{\alpha,j}^{(n)} + h_{\alpha,j}^{(n)}, \Psi_{\alpha,j}^{(n)})}{2} \\ &\pm \left[\left(\frac{\lambda_{\alpha,i}^{(n)} + \lambda_{\alpha,j}^{(n)}}{2} + \frac{(b_{\alpha,i}^{(n)} + h_{\alpha,i}^{(n)}, \Psi_{\alpha,i}^{(n)}) + (b_{\alpha,j}^{(n)} + h_{\alpha,j}^{(n)}, \Psi_{\alpha,j}^{(n)})}{2} \right)^2 \right. \\ &\quad - \left(\lambda_{\alpha,i}^{(n)} \lambda_{\alpha,j}^{(n)} + \lambda_{\alpha,i}^{(n)} (b_{\alpha,j}^{(n)} + h_{\alpha,j}^{(n)}, \Psi_{\alpha,j}^{(n)}) + \lambda_{\alpha,j}^{(n)} (b_{\alpha,i}^{(n)} + h_{\alpha,i}^{(n)}, \Psi_{\alpha,i}^{(n)}) \right. \\ &\quad \left. + (b_{\alpha,i}^{(n)} + h_{\alpha,i}^{(n)}, \Psi_{\alpha,i}^{(n)})(b_{\alpha,j}^{(n)} + h_{\alpha,j}^{(n)}, \Psi_{\alpha,j}^{(n)}) \right. \\ &\quad \left. \left. - (b_{\alpha,i}^{(n)} + h_{\alpha,i}^{(n)}, \Psi_{\alpha,j}^{(n)})(b_{\alpha,j}^{(n)} + h_{\alpha,j}^{(n)}, \Psi_{\alpha,i}^{(n)}) \right) \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Рис. 14

Разные ветви функции $\Lambda_\alpha^{(n+1)}$ соответствуют разным выборам знака в (26). Рис. 14 показывает изменение в форме $\Lambda_\alpha^{(n)}$ при резонансе и образование новой запрещенной зоны.

Согласно формулам

$$b_{\alpha,i}^{(n)}(m_0) = -\varepsilon \Psi_{\alpha,i}^{(n)}(m_0 - 1), \quad b_{\alpha,j}^{(n)}(m_0) = -\varepsilon \Psi_{\alpha,i}^{(n)}(m_0 + 1).$$

Кроме того, еще только $b_{\alpha,i}^{(n)}(m_0 - 1)$, $b_{\alpha,j}^{(n)}(m_0 + 1)$ могут быть отличны от нуля, а остальные компоненты этих векторов равны нулю. Напомним также, что $(b_{\alpha,i}^{(n)}, \Psi_{\alpha,i}^{(n)}) = (b_{\alpha,j}^{(n)}, \Psi_{\alpha,j}^{(n)}) = 0$. Из конструкции следует, что $h_{\alpha,i}^{(n)}$, $h_{\alpha,j}^{(n)}$ имеют более высокий порядок малости, чем $b_{\alpha,i}^{(n)}$, $b_{\alpha,j}^{(n)}$. Поэтому в главном порядке выражение в квадратных скобках в (26) имеет вид

$$(27) \quad \left(\frac{\lambda_{\alpha,i}^{(n)} - \lambda_{\alpha,j}^{(n)}}{2} \right)^2 + (b_{\alpha,i}^{(n)}, \Psi_{\alpha,j}^{(n)})(b_{\alpha,j}^{(n)}, \Psi_{\alpha,i}^{(n)}) \\ = \left(\frac{\lambda_{\alpha,i}^{(n)} - \lambda_{\alpha,j}^{(n)}}{2} \right)^2 + \varepsilon^2 (\Psi_{\alpha,i}^{(n)}(m_0 - 1) \Psi_{\alpha,j}^{(n)}(m_0))^2.$$

Произведение $\Psi_{\alpha,i}^{(n)}(m_0 - 1) \Psi_{\alpha,j}^{(n)}(m_0)$ есть аналог интеграла перекрытия в теории резонансов. Оно может быть оценено на основании асимптотики убывания приближенных с.ф. Этот вопрос будет обсуждаться более подробно в следующем параграфе. Здесь же мы только отметим, что возможны нетипичные точки m_0 , где $\Psi_{\alpha,i}^{(n)}(m_0 - 1)$ или $\Psi_{\alpha,j}^{(n)}(m_0)$ аномально малы. Эти точки встречаются достаточно редко, и в таких случаях мы должны слегка видоизменить нашу процедуру, организовав процесс таким образом, чтобы стыковка всегда происходила в типичных точках.

Мы определяем теперь $\Psi_{\alpha,i}^{(n+1)}$, $\Psi_{\alpha,j}^{(n)}$ как ограничения $\tilde{\Psi}_{\alpha,i}^{(n+1)}$, $\tilde{\Psi}_{\alpha,j}^{(n)}$ на множество, получаемое из $FZ(\Psi_{\alpha,i}^{(n+1)}) \cup FZ(\Psi_{\alpha,j}^{(n)})$ добавлением крайних точек, и нормировку. Во всех случаях расстояние от $Z(\Psi_{\alpha,i}^{(n+1)})$ до границы $FZ(\Psi_{\alpha,i}^{(n+1)})$ равно $n + 1$.

Новая функция $\Lambda_\alpha^{(n+1)}$ отличается по форме от $\Lambda_\alpha^{(n)}$ в окрестностях точек пересечения $\Lambda_\alpha^{(n)}$ и $\Lambda_{\alpha+n\omega}^{(n)}$ (см. рис. 11), а вне этих окрестностей представляет собой малое возмущение $\Lambda_\alpha^{(n)}$.

Тем самым индуктивная процедура полностью определена. Прямые оценки показывают, что все погрешности стремятся к нулю, и в пределе мы получаем точные с.ф. оператора H_α .

§ 4. Экспоненциальное убывание приближенных собственных функций и другие асимптотические соотношения

Пользуясь формулами индуктивной процедуры, рассмотрим снова вопрос об экспоненциальном убывании приближенных с.ф. Именно это свойство делает всю индуктивную процедуру сходящейся.

Мы изучаем отношение $\frac{\Psi_{\alpha,i}^{(n+1)}(m+1)}{\Psi_{\alpha,i}^{(n+1)}(m)}$ для точек m , принадлежащих полному носителю $FZ(\Psi_{\alpha,i}^{(n)})$, но отстоящих от края $FZ(\Psi_{\alpha,i}^{(n+1)})$ на расстояние, превосходящее 2. Достаточно рассматривать только нерезонансную ситуацию. При таких m $\Psi_{\alpha,i}^{(n+1)}(m)$ совпадает с точностью до множителя с $\tilde{\Psi}_{\alpha,i}^{(n+1)}(m)$. Поэтому вопрос имеет смысл и для функции $\tilde{\Psi}_{\alpha,i}^{(n+1)}(m)$. В наших дальнейших рассуждениях встречаются величины, допускающие оценки сверху типа $(G \cdot \varepsilon)^n$, где G — величина порядка 1. Такой порядок малости имеют, например, основные погрешности $b_{\alpha,i}^{(n)}$, т.е. значения приближенных с.ф. около концов $FZ(\Psi_{\alpha,i}^{(n+1)})$. Мы будем называть порядок малости $(G \cdot \varepsilon)^n$ основным. Величины, допускающие оценку $(G \cdot \varepsilon^{1+\gamma})^n$ при $\gamma > 0$ и не зависящем от n , будем называть имеющими более высокий порядок малости. В частности, как легко следует из индуктивной процедуры, другая погрешность $h_{\alpha,i}^{(n)}$ имеет более высокий порядок малости, поскольку она образуется из квадратичных (и более высоких степеней) погрешностей в формулах теории возмущений.

Далее, формула (25) показывает, что $H_\alpha \tilde{\Psi}_{\alpha,i}^{(n)} - \lambda_{\alpha,i}^{(n+1)} \tilde{\Psi}_{\alpha,i}^{(n)}$ имеет основной порядок малости, поскольку она имеет, как минимум, малость $b_{\alpha,i}^{(n)}$, но правая часть (25) на самом деле меньше из-за близости базиса $\{\Psi_{\alpha+m\omega,i}^{(n)}\}$ к ортогональному.

Теперь мы можем применить прием, описанный в начале § 3. Допустим, что m лежит справа от $Z(\Psi_{\alpha,i}^{(n)})$. Положим $\varphi_{\alpha,i}^{(n)}(x)$ равной $\tilde{\Psi}_{\alpha,i}^{(n)}(x)$ при $x \leq m$ и 0 при $x > m$. Тогда

$$H_\alpha \varphi_{\alpha,i}^{(n+1)}(x) - \lambda_{\alpha,i}^{(n+1)}(x) \varphi_{\alpha,i}^{(n+1)}(x) = e_{\alpha,i}^{(n+1)}(x)$$

при $x \neq m, m+1$ и $e_{\alpha,i}^{(n+1)}(x)$ не превосходит по модулю $(C_6 \varepsilon)^n$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} H_\alpha \varphi_{\alpha,i}^{(n+1)}(m) - \lambda_{\alpha,i}^{(n+1)} \varphi_{\alpha,i}^{(n+1)}(m) &= \varepsilon \Psi_{\alpha,i}^{(n+1)}(m) + e_{\alpha,i}^{(n+1)}(m+1), \\ H_\alpha \varphi_{\alpha,i}^{(n+1)}(m+1) - \lambda_{\alpha,i}^{(n+1)} \varphi_{\alpha,i}^{(n+1)}(m+1) &= \varepsilon \Psi_{\alpha,i}^{(n+1)}(m) + e_{\alpha,i}^{(n+1)}(m+1), \end{aligned}$$

где $e_{\alpha,i}^{(n+1)}(m+1)$, $e_{\alpha,i}^{(n+1)}(m)$ удовлетворяют тем же оценкам, что и $e_{\alpha,i}^{(n+1)}(x)$. Кроме того, $\lambda_{\alpha,i}^{(n+1)} - \lambda_{\alpha,i}^{(n)}$ имеет более высокий порядок малости, поскольку $h_{\alpha,i}^{(n)}$ имеет более высокий порядок малости и $\Psi_{\alpha,i}^{(n)}$ на носителе $b_{\alpha,i}^{(n)}$ имеет основной порядок малости.

Отсюда следует, что модуль разности двух собственных значений, полные носители которых пересекаются, удовлетворяет неравенству

$$|\lambda_{\alpha,i}^{(n+1)} - \lambda_{\alpha,j}^{(n+1)}| \geq \left(\frac{C_4\varepsilon}{2}\right)^n.$$

Положим

$$\begin{aligned} \tilde{b}_{\alpha,i}^{(n+1)}(m) &= -\varepsilon \Psi_{\alpha,i}^{(n+1)}(m+1), \quad \tilde{b}_{\alpha,i}^{(n+1)}(m+1) = \varepsilon \Psi_{\alpha,i}^{(n+1)}(m), \\ \tilde{b}_{\alpha,i}^{(n+1)}(x) &= 0 \text{ при остальных } x \end{aligned}$$

и введем вектор $\tilde{h}_{\alpha,i}^{(n+1)}$ с помощью соотношения

$$(H_\alpha - \lambda_{\alpha,i}^{(n+1)})\varphi_{\alpha,i}^{(n+1)} = \tilde{b}_{\alpha,i}^{(n+1)} + \tilde{h}_{\alpha,i}^{(n+1)}.$$

Наши предыдущие рассуждения показывают, что $\tilde{h}_{\alpha,i}^{(n+1)}$ имеет более высокий порядок малости. Пусть

$$(28) \quad \tilde{\varphi}_{\alpha,i}^{(n+1)} = \varphi_{\alpha,i}^{(n+1)} + \sum_{j \neq i} \frac{(\tilde{b}_{\alpha,i}^{(n+1)} + \tilde{h}_{\alpha,i}^{(n+1)}, \Psi_{\alpha,i}^{(n+1)})}{\lambda_{\alpha,i}^{(n+1)} - \lambda_{\alpha,j}^{(n+1)}}.$$

Тогда $H_\alpha \tilde{\varphi}_{\alpha,i}^{(n+1)} - \tilde{\lambda}_{\alpha,i}^{(n+1)} \tilde{\varphi}_{\alpha,i}^{(n+1)}$ также имеет более высокий порядок малости. Поэтому $\tilde{\varphi}_{\alpha,i}^{(n+1)} - \tilde{\Psi}_{\alpha,i}^{(n+1)}$ также имеет более высокий порядок малости в том смысле, что каждая компонента разности имеет более высокий порядок малости. Напишем

$$\Psi_{\alpha,i}^{(n+1)}(m+1) = \tilde{\Psi}_{\alpha,i}^{(n+1)}(m+1) = \tilde{\varphi}_{\alpha,i}^{(n+1)}(m) + g_{\alpha,i}^{(n+1)}(m),$$

где $g_{\alpha,i}^{(n+1)}(m)$ имеет более высокий порядок малости. Далее, с помощью (27) при $x = m+1$

$$\begin{aligned} \Psi_{\alpha,i}^{(n+1)}(m+1) &= \varepsilon \Psi_{\alpha,i}^{(n+1)}(m) \sum_{j \neq i} \frac{\Psi_{\alpha,i}^{(n+1)}(m+1)}{\lambda_{\alpha,i}^{(n+1)} - \lambda_{\alpha,j}^{(n+1)}} \\ &\quad - \varepsilon \Psi_{\alpha,i}^{(n+1)}(m+1) \sum_{j \neq i} \frac{\Psi_{\alpha,i}^{(n+1)}(m+1)}{\lambda_{\alpha,i}^{(n+1)} - \lambda_{\alpha,j}^{(n+1)}} + \tilde{g}_{\alpha,i}^{(n+1)}(m+1), \end{aligned}$$

где $\tilde{g}_{\alpha,i}^{(n+1)}(m+1)$ имеет более высокий порядок малости. Поэтому

$$\begin{aligned} \Psi_{\alpha,i}^{(n+1)}(m+1) &= \varepsilon \Psi_{\alpha,i}^{(n+1)}(m) \cdot \left(\sum_{j \neq i} \frac{\Psi_{\alpha,j}^{(n+1)}(m+1)}{\lambda_{\alpha,i}^{(n+1)} - \lambda_{\alpha,j}^{(n+1)}} \right) \left(1 + \varepsilon \sum_{j \neq i} \frac{\Psi_{\alpha,i}^{(n+1)}(m)}{\lambda_{\alpha,i}^{(n+1)} - \lambda_{\alpha,j}^{(n+1)}} \right)^{-1} \\ &\quad + \tilde{g}_{\alpha,i}^{(n+1)}(m+1) \left(1 + \varepsilon \sum_{j \neq i} \frac{\Psi_{\alpha,j}^{(n+1)}(m+1)}{\lambda_{\alpha,i}^{(n+1)} - \lambda_{\alpha,j}^{(n+1)}} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Последняя формула показывает, что в главном порядке отношение

$$\Psi_{\alpha,i}^{(n+1)}(m+1)/\Psi_{\alpha,i}^{(n+1)}(m)$$

равно

$$\varepsilon \left(\sum_{j \neq i} \frac{\Psi_{\alpha,j}^{(n+1)}(m+1)}{\lambda_{\alpha,i}^{(n+1)} - \lambda_{\alpha,j}^{(n+1)}} \right) \left(1 + \varepsilon \sum_{j \neq i} \frac{\Psi_{\alpha,i}^{(n+1)}(m)}{\lambda_{\alpha,i}^{(n+1)} - \lambda_{\alpha,j}^{(n+1)}} \right)^{-1}$$

и мало в силу присутствия ε , поскольку возникающая здесь дробь принимает в типичной ситуации значения порядка 1.

Мы можем написать

$$(29) \quad \frac{\Psi_{\alpha,i}^{(n+1)}(m+k)}{\Psi_{\alpha,i}^{(n+1)}(m)} = \prod_{s=1}^k \left[\left(\varepsilon \sum_{j \neq i} \frac{\Psi_{\alpha,j}^{(n+1)}(m+s+1)}{\lambda_{\alpha,i}^{(n+1)} - \lambda_{\alpha,j}^{(n+1)}} \right) \left(1 + \varepsilon \sum_{j \neq i} \frac{\Psi_{\alpha,j}^{(n+1)}(m+s)}{\lambda_{\alpha,i}^{(n+1)} - \lambda_{\alpha,j}^{(n+1)}} \right)^{-1} \right. \\ \left. + \tilde{g}_{\alpha,i}^{(n+1)}(m+s+1) \left(1 + \varepsilon \sum_{j \neq i} \frac{\Psi_{\alpha,j}^{(n+1)}(m+s)}{\lambda_{\alpha,i}^{(n+1)} - \lambda_{\alpha,j}^{(n+1)}} \right)^{-1} \right].$$

Из этой формулы вытекает экспоненциальное убывание приближенных с.ф. вдали от с.н. Однако при использовании (29) следует иметь в виду, что возможны ситуации, когда знаменатель $1 + \varepsilon \sum_{j \neq i} \frac{\Psi_{\alpha,j}^{(n+1)}(m+s)}{\lambda_{\alpha,i}^{(n+1)} - \lambda_{\alpha,j}^{(n+1)}}$ аномально мал. Тогда и отношение

$$\frac{\Psi_{\alpha,j}^{(n+1)}(m+s+1)}{\Psi_{\alpha,j}^{(n+1)}(m+s)}$$

аномально велико. Поскольку $H_\alpha \Psi_{\alpha,i}^{(n+1)} - \lambda_{\alpha,i}^{(n+1)} \Psi_{\alpha,i}^{(n+1)}$ имеет

более высокий порядок малости, то отношение $\frac{\Psi_{\alpha,j}^{(n+1)}(m+s+1)}{\Psi_{\alpha,j}^{(n+1)}(m+s)}$ аномально близко к 1.

Это означает, что знаменатель $1 + \varepsilon \sum_{j \neq i} \frac{\Psi_{\alpha,j}^{(n+1)}(m+s-1)}{\lambda_{\alpha,i}^{(n+1)} - \lambda_{\alpha,j}^{(n+1)}}$ аномально велик, а произведение двух рядом стоящих знаменателей имеет порядок 1.

Далее, основной вклад в дробь

$$\frac{\sum_{j \neq i} \frac{\Psi_{\alpha,j}^{(n+1)}(m+s)}{\lambda_{\alpha,i}^{(n+1)} - \lambda_{\alpha,j}^{(n+1)}}}{1 + \varepsilon \sum_{j \neq i} \frac{\Psi_{\alpha,j}^{(n+1)}(m+s)}{\lambda_{\alpha,i}^{(n+1)} - \lambda_{\alpha,j}^{(n+1)}}}$$

вносят приближенные с.ф., которые сосредоточены около точки $m+s$. Поэтому эту дробь естественно записать как $\Theta^{(n+1)}(\lambda_{\alpha,i}^{(n+1)}; \alpha + (m+s)\omega)$ и к произведению (29) применить эргодическую теорему. Из всех этих рассуждений вытекает свойство 7° с.ф. (см. §1).

Рассмотрим теперь более подробно расщепление приближенных с.з. в резонансной ситуации. Если в (27) сомножители имеют основной порядок малости, то и расщепление приближенных с.з. имеет основной порядок малости. Его величина определяет размер запрещенной зоны, которая возникает на n -м шаге. В принципе возможно, что один из сомножителей $\Psi_{\alpha,i}^{(n+1)}(m-1)$ или $\Psi_{\alpha,j}^{(n+1)}(m_0)$ аномально мал. Тогда возникающие приближенные с.ф. принимают в точке m_0 аномально малые значения, что возможно при нетипичных α . В таком случае следует перейти от m_0 к m_0-1 , продолжить $\Psi_{\alpha,j}^{(n)}$ еще на один шаг до m_0-1 , пользуясь формулами нерезонансного случая, а вместо $\Psi_{\alpha,j}^{(n)}$ рассмотреть ее ограничение на $FZ(\Psi_{\alpha,i}^{(n)}) \setminus m_0$. Формулы теории возмущений будут при этом применимы и $\Psi_{\alpha,i}^{(n+1)}(m_0-1)$, $\Psi_{\alpha,j}^{(n)}(m_0)$ будет иметь основной порядок малости. После этого можно использовать предыдущие рассуждения. Отсюда вытекают также оценки i_0-i_4 и j_1-j_3 с подходящими константами b_1, B_2, B_3 .

Обсудим теперь вопрос о стремлении базиса $\bigcup S^m \Psi_{\alpha+m\omega,i}^{(n)}$ к ортогональному и о малости скалярных произведений $(\Psi_{\alpha,i}^{(n)}, \Psi_{\alpha,j}^{(n)}) = \xi_{\alpha,i,j}^{(n)}, i \neq j$. Мы имеем

$$(H_\alpha \Psi_{\alpha,i}^{(n)}, \Psi_{\alpha,j}^{(n)}) = \lambda_{\alpha,i}^{(n)}(\Psi_{\alpha,i}^{(n)}, \Psi_{\alpha,j}^{(n)}) + (b_{\alpha,i}^{(n)} + h_{\alpha,i}^{(n)}, \Psi_{\alpha,j}^{(n)}).$$

В силу самосопряженности H_α

$$(H_\alpha \Psi_{\alpha,i}^{(n)}, \Psi_{\alpha,j}^{(n)}) = (\Psi_{\alpha,i}^{(n)}, H_\alpha \Psi_{\alpha,j}^{(n)}) = \lambda_{\alpha,j}^{(n)}(\Psi_{\alpha,i}^{(n)}, \Psi_{\alpha,j}^{(n)}) + (b_{\alpha,i}^{(n)} + h_{\alpha,i}^{(n)}, \Psi_{\alpha,i}^{(n)}).$$

Правая часть последнего соотношения имеет основной порядок малости, поскольку $h_{\alpha,j}^{(n)}$ имеет основной порядок малости, и малость $(\Psi_{\alpha,i}^{(n)}, b_{\alpha,j}^{(n)})$ уменьшается еще сильнее при удалении с.н. $\Psi_{\alpha,i}^{(n)}$ от носителя $b_{\alpha,j}^{(n)}$. Если $\Psi_{\alpha,i}^{(n)}, \Psi_{\alpha,j}^{(n)}$ не получились в результате применения резонансных формул к паре приближенных с.ф., то $|\lambda_{\alpha,i}^{(n)} - \lambda_{\alpha,j}^{(n)}| \geq (\frac{1}{2}C_4\varepsilon)^n$. Значение константы C_4 определяет размер резонансных зон. Мы выберем ее достаточно большой так, чтобы из последнего соотношения вытекало

$$|\xi_{\alpha,i,j}^{(n)}| \leq \left(\frac{C}{C_4}\right)^4,$$

где C — константа, участвующая в экспоненциальной оценке убывания приближенных с.ф.:

$$|\Psi_{\alpha,i}^{(n)}(x)| \leq (C\varepsilon)^{\text{dist}(x, Z(\Psi_{\alpha,j}^{(n)}))}.$$

Если приближенные с.ф. $\Psi_{\alpha,i}^{(n)}, \Psi_{\alpha,j}^{(n)}$ получились в результате применения резонансных формул теории возмущений, то они ортогональны по построению.

Значения остальных постоянных, введенных при описании свойств ЛА, легко вытекают из конструкции.

Эта работа была начата во время посещения осенью 1997 года отделения математики Стенфордского Университета и плодотворных бесед с И. Катцнельсоном и Д. Орнштейном. Я благодарен им, а также Е. И. Динабургу и В. Шлагу за полезные обсуждения и NSF (грант DMS-9706794) и РФФИ (грант 96-01-0037) за финансовую поддержку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Синай Я. Г. Предельное поведение одномерного случайного блуждания в случайной среде // Теория вероятн. и ее примен. 1982. Т. 27. № 2. С. 247–258.
- [2] Fröhlich J., Spencer T., Wittwer P. Localization for a class of one-dimensional quasi-periodic Schrödinger operators // Comm. Math. Phys. 1990. V. 132. № 1. P. 5–25.
- [3] Eliasson L. H. Discrete one-dimensional quasi-periodic Schrödinger operators with pure point spectrum // Acta Math. 1997. V. 179. № 2. P. 153–196.
- [4] Sinai Ya. G. Anderson localization for the one-dimensional difference Schrödinger operator with quasi-periodic potential // J. Statist. Phys. 1987. V. 46. P. 861–909.
- [5] Goldstein M. Anderson Localization for Quasi-Periodic Schrödinger Equation // Preprint, 1998.
- [6] Eliasson L. H. Floquet solutions for the 1-dimensional quasi-periodic Schrödinger equation // Comm. Math. Phys. 1992. V. 146. № 3. P. 447–482.
- [7] Moser Ju., Pöschel J. An extension of a result by Dinaburg and Sinai on quasi-periodic potentials // Comment. Math. Helvet. 1984. V. 59. P. 39–85.

Отделение математики Принстонского университета
и Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН

Поступила в редакцию
22.09.1998