Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Фарбер, Сигнатура в терминах чисел Новикова, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 1, 209–212

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm121>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 06:10:36

УДК 515.146

СИГНАТУРА В ТЕРМИНАХ ЧИСЕЛ НОВИКОВА

М. ФАРБЕР

1. ТЕОРЕМА. Пусть M^{2n} — симплектическое многообразие с симплектическим действием окружности, которое имеет лишь изолированные неподвижные точки. Тогда сигнатура M задается следующей формулой:

$$(1) \quad \sigma(M) = b_0(\xi) - b_2(\xi) + b_4(\xi) - b_6(\xi) + \cdots + (-1)^n b_{2n}(\xi),$$

где $\xi \in H^1(M; \mathbb{R})$ обозначает класс когомологий обобщенного отображения моментов, а $b_i(\xi)$ — соответствующее число Новикова.

Это обобщает теорему, доказанную в [1], в которой речь шла о гамильтоновых действиях окружности. В гамильтоновом случае $\xi = 0$, а соответствующие числа Новикова становятся обычными числами Бетти $b_i(\xi) = b_i(M)$.

2. Поясним используемые в формулировке теоремы 1 понятия.

Вначале заметим, что любое симплектическое многообразие обладает канонической ориентацией, и сигнатура $\sigma(M)$ рассматривается по отношению к этой ориентации.

Пусть ω обозначает симплектическую форму на M . Действие окружности S^1 предполагается симплектическим, что означает, что для любого $g \in S^1$ имеет место $g^*\omega = \omega$. Пусть X — векторное поле, порождающее S^1 -действие. Тогда

$$(2) \quad \theta = \iota(X)\omega$$

— замкнутая 1-форма на M , называемая обобщенным отображением моментов. Мы рассматриваем класс когомологий де Рама $\xi = [\theta] \in H^1(M; \mathbb{R})$ формы θ .

Определение чисел Новикова $b_i(\xi)$ можно найти в [2]–[4].

При нечетном n обе части формулы (1) обращаются в нуль. Здесь мы используем соглашение о том, что сигнатура любого $4k + 2$ -мерного многообразия равна нулю. Правая часть (1) обращается в нуль благодаря соотношению $b_i(\xi) = b_{2n-i}(\xi)$, которое вытекает непосредственно из определения чисел Новикова (см. [2; определение 1.2]) и классической двойственности Пуанкаре.

Частично поддержано EPSRC Visiting Fellowship.

3. Доказательство теоремы 1. Первая часть доказательства вполне аналогична рассуждениям из [1]. Вторая часть доказательства использует неравенства Новикова–Морса, установленные в [2].

Для любой неподвижной точки $p \in M$ действия окружности мы имеем линейное представление окружности S^1 на касательном пространстве $T_p(M)$, которое не имеет неподвижных векторов. Это определяет комплексную структуру на $T_p(M)$, а значит и каноническую ориентацию. Мы положим $\eta(p) = +1$ или $\eta(p) = -1$ в зависимости от того, совпадает или нет эта ориентация с ориентацией $T_p(M)$, задаваемой симплектической формой.

ПРИМЕР. Для стандартного вращения двумерной сферы S^2 вокруг северного и южного полюсов p_N и p_S , мы имеем $\eta(p_N) = 1$ и $\eta(p_S) = -1$.

В [1] при помощи теоремы Атьи–Ботта о неподвижных точках было доказано, что

$$(3) \quad \sigma(M) = \sum \eta(p),$$

где сумма берется по всем неподвижным точкам p действия окружности.

Применим теорему 0.3 из [2] к обобщенному отображению моментов θ , задаваемому (2). Критическими точками θ являются в точности неподвижные точки p действия окружности. Хорошо известно (см. [5; §§ 2.1, 2.2], а также [1]), что все эти критические точки являются невырожденными. Кроме того, индексы всех критических точек θ являются четными и

$$(4) \quad \eta(p) = (-1)^{\text{ind}(p)/2},$$

см. [1], [5]. Применяя теорему 0.3 из [2], мы получаем, что многочлен Морса (Morse counting polynomial)

$$\mathcal{M}_\theta(\lambda) = \sum c_j(\theta) \lambda^j$$

содержит только члены четной степени (где $c_j(\theta)$ обозначает число критических точек θ , имеющих индекс j). Таким образом, многочлен $\mathcal{Q}(\lambda)$ в формуле (0.7) из [2] обращается в нуль (в силу принципа лакун Морса (Morse lacunary principle)). Следовательно, мы получаем, что в нечетных размерностях все числа Новикова $b_{2j-1}(\xi)$ обращаются в нуль, а для чисел Новикова в четных размерностях мы имеем

$$(5) \quad b_{2j}(\xi) = c_{2j}(\theta).$$

Из (3) и (4) мы находим $\sigma(M) = \sum (-1)^j c_{2j}(\theta)$. Сопоставляя это с формулой (5), мы завершаем доказательство.

Ниже мы рассмотрим еще одно обобщение теоремы из [1]: мы будем допускать симплектические действия окружности с множеством неподвижных точек более общего вида.

Ориентированное многообразие N называется i -многообразием (где $i = \sqrt{-1}$), если все его нечетномерные числа Бетти $b_{2j-1}(N)$ обращаются в нуль, а сигнатура $\sigma(N)$ равна $\sum_{j=0}^{\dim(N)/2} (-1)^j b_{2j}(N)$. Другими словами, сигнатура N получается вычислением многочлена Пуанкаре N в точке $\lambda = i$.

Точка (вместе с ее канонической ориентацией) является i -многообразием. Любое комплексное проективное пространство $\mathbb{CP}^n$ (с канонической ориентацией) также является i -многообразием. Если N_1 и N_2 являются i -многообразиями, то их произведение $N_1 \times N_2$ также является i -многообразием.

Результат [1] можно переформулировать следующим образом: *любое симплектическое многообразие, допускающее гамильтоново действие окружности с изолированными неподвижными точками является i -многообразием*. Это дает множество примеров i -многообразий.

Дополнительные примеры i -многообразий можно найти в работе Д. Мецлера (D. Metzler) [6].

Теорема 1 остается верной в случае, когда связными компонентами множества неподвижных точек действия окружности являются i -многообразия (вместо изолированных точек):

4. ТЕОРЕМА. Пусть M^{2n} – симплектическое многообразие с симплектическим действием окружности. Предположим, что каждая компонента множества неподвижных точек является i -многообразием. Тогда сигнатура M может быть выражена в терминах чисел Новикова следующим образом

$$(6) \quad \sigma(M) = \sum_{j=0}^n (-1)^j b_{2j}(\xi),$$

где $\xi \in H^1(M; \mathbb{R})$ – класс когомологий обобщенного отображения моментов.

Заметим, что для каждой связной компоненты $Z \subset M$ множества неподвижных точек действия окружности, $\omega|_Z$ является симплектической формой на Z , см. [5], где ω обозначает симплектическую форму на M . Таким образом, Z обладает канонической ориентацией, и в теореме 5 мы предполагаем, что Z является i -многообразием по отношению к этой ориентации.

5. Доказательство теоремы 4. Для каждой компоненты связности $Z \subset M$ множества неподвижных точек определим знак $\eta(Z) = \pm 1$ следующим образом. Ориентация касательного расслоения к M и ориентация касательного расслоения к Z (определяемая симплектической формой) определяют ориентацию нормального расслоения $\nu(Z)$ к Z в M . Другая ориентация $\nu(Z)$ определяется действием окружности: для любой точки $p \in Z$ окружность S^1 действует на $\nu_p(Z)$ без неподвижных векторов и, следовательно, определяет комплексную структуру и ориентацию пространства $\nu_p(Z)$. Мы положим $\eta(Z) = 1$, если эти две ориентации пространства $\nu_p(Z)$ согласованы, и $\eta(Z) = -1$, если эти две ориентации $\nu_p(Z)$ противоположны.

Используя рассуждения, аналогичные рассуждениям из [1], мы получаем следующую формулу для сигнатуры (обобщающую формулу (3))

$$(7) \quad \sigma(M) = \sum_Z \eta(Z) \sigma(Z),$$

где сумма берется по множеству связных компонент Z множества неподвижных точек. Используя, как и выше, теорему 0.3 из [2] и принцип лакун, мы находим

$$(8) \quad \sum_Z \lambda^{\text{ind}(Z)} \mathcal{P}_Z(\lambda) = \sum_{j \geq 0} \lambda^j b_j(\xi),$$

где сумма в левой части берется по всем связным компонентам Z множества неподвижных точек, а $\mathcal{P}_Z(\lambda)$ обозначает многочлен Пуанкаре Z . Отсюда мы получаем (используя наше предположение о том, что $\mathcal{P}_Z(\lambda)$ не содержит нечетных степеней), что все нечетномерные числа Новикова $b_{2j-1}(\xi)$ обращаются в нуль.

Аналогично (4), мы имеем

$$(9) \quad \eta(Z) = (-1)^{\text{ind}(Z)/2}.$$

Отсюда, подставляя $\lambda = i$ в (8) и используя наше предположение $\sigma(Z) = \mathcal{P}_Z(i)$, мы получаем (6).

6. СЛЕДСТВИЕ. Пусть M^{2n} – симплектическое многообразие с гамильтоновым действием окружности, для которого каждая компонента множества неподвижных точек является i -многообразием. Тогда M является i -многообразием.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Jones J. D. S., Rawnsley J. H. Hamiltonian circle actions on symplectic manifolds and the signature // J. Geom. Phys. 1997. V. 23. P. 301–307.
- [2] Braverman M., Farber M. Novikov type inequalities for differential forms with non-isolated zeros // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1997. V. 122. P. 357–375.
- [3] Фарбер М. Ш. Точность неравенств Новикова // Функц. анализ и его прилож. 1985. Т. 19. №1. С. 49–59.
- [4] Новиков С. П. Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса // УМН. 1982. Т. 37. С. 3–49.
- [5] Audin M. The Topology of Torus Actions on Symplectic Manifolds. Basel: Birkhäuser, 1991.
- [6] David S. Metzler Wall-crossing formula for the signature of symplectic quotients // Preprint math.SG/9809030.

School of Mathematical Sciences, Tel-Aviv University, Israel
E-mail: farber@math.tau.ac.il

Поступила в редакцию
15.01.1999