Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Шлихенмайер, О. К. Шейнман, Теория Весса–Зумино–Виттена–Новикова, уравнения Книжника–Замолодчикова и алгебры Кричевера–Новикова, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 1, 213–250

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm122>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 17:50:05

УДК 517.774

Посвящается С. П. Новикову в честь его 60-летия

ТЕОРИЯ ВЕССА–ЗУМИНО–ВИТТЕНА–НОВИКОВА,
УРАВНЕНИЯ КНИЖНИКА–ЗАМОЛОДЧИКОВА
И АЛГЕБРЫ КРИЧЕВЕРА–НОВИКОВА

М. ШЛИХЕНМАЙЕР, О. К. ШЕЙНМАН

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	213
2. Алгебры типа Кричевера–Новикова	217
(a) Общие понятия	217
(b) Почти градуированная структура	218
(c) Центральные расширения и аффинные алгебры высшего рода	223
3. Представления многоточечных алгебр Кричевера–Новикова	225
4. Модули кривых с отмеченными точками и общая форма уравнений KZ	229
(a) Пространство модулей	229
(b) Алгебры Кричевера–Новикова и касательные векторы к пространству модулей	234
(c) Формальные уравнения KZ	236
5. Случай малых родов: $g = 0$	238
6. Случай малых родов: $g = 1$	242
7. Дополнение: Базис Кричевера–Новикова для эллиптического случая	246
Список литературы	249

1. Введение

В ходе развития двумерной конформной теории поля было понято, что следующая проблема представляет особый интерес: построить расслоение над *пространством модулей проколотых римановых поверхностей*¹ с действием калибровочной и конформной алгебр и проективно плоской связностью. Эта проблема берет начало в известной работе Книжника и Замолотчикова [14], где авторы рассмотрели случай рода ноль. Каждому проколу они сопоставили неприводимый модуль аффинной алгебры

Работа поддержана RiP-программой в Математическом институте Обервольфаха и совместным грантом ННАО-РФФИ 436RUS 113/276/0(R)(ННАО), 96-01-00055G (РФФИ).

¹Точное определение “пространства модулей проколотых римановых поверхностей” см. в разделе 4.

ры Каца–Мули, рассматриваемой как калибровочная алгебра. Над каждым проколом римановой сферы они взяли тензорное произведение этих модулей и рассмотрели расслоение с этим пространством в качестве слоя. Средние от сечений полученного таким образом расслоения они интерпретировали как N -точечные корреляционные функции, где N – число проколов. Применяя конструкцию Сугавара, они получили в каждом слое действие алгебры Вирасоро и определили связность как $\frac{\partial}{\partial z_p} + L_{-1}^{(p)}$, где $p = 1, \dots, N$ – индекс прокола, z_p – локальная координата в окрестности p -го прокола, а $L_{-1}^{(p)}$ – соответствующий (нормированный) оператор Сугавара степени -1 . Один из наиболее знаменитых результатов статьи [14] – вывод уравнений, имеющих решениями сечения нулевой степени, горизонтальные по отношению к связности. Эти уравнения ныне известны как уравнения Книжника–Замолотчикова (KZ), а связность – как связность KZ. Уравнения KZ для N -точечных корреляционных функций выглядят следующим образом:

$$(1.1) \quad \left(k \frac{\partial}{\partial z_p} - \sum_{r \neq p} \frac{t_p^a t_r^a}{z_p - z_r} \right) \langle \phi_1(z_1) \dots \phi_N(z_N) \rangle = 0, \quad p = 1, \dots, N.$$

Здесь k обозначает постоянную, зависящую от алгебры Каца–Мули и от уровня представления; t_i^a , $i = 1, \dots, N$, – (антиэрмитовы) матрицы представления для a -го генератора (конечномерной) алгебры токов, ассоциированного с точкой z_i (действующего на i -е поле). В (1.1) предполагается суммирование по индексу a .

D. Bernard первым рассмотрел случай положительного рода. Он понял, что “почти все специфические свойства моделей WZW^2 заключены в их нулевых модах” [2; с. 81], однако “шанс точно определить действие нулевых мод $J_{0;j}^a$ на корреляционные функции очень мал” [3; с. 146]. Другими словами, он немедленно столкнулся с проблемой определения действия нулевых мод оператора тока на корреляционные функции. Предложенный им выход заключался в том, чтобы рассмотреть корреляционные функции (точно так же как и соответствующие примарные поля) как функции не только от проколов, но и от g дополнительных параметров, являющихся элементами конечномерной группы Ли G (g обозначает род римановой поверхности). Эти дополнительные параметры называют *твистами*. С современной точки зрения он построил не что иное, как связность над *пространством модулей представлений* фундаментальной группы проколотов римановой поверхности в группе G . Множество интересных идей, содержащихся в статьях [2], [3], стимулировали ряд статей [7], [8], [12], в которых уравнения Книжника–Замолотчикова высших родов интерпретируются как уравнения горизонтальности по отношению к проективно плоской связности над пространством модулей представлений. В частности, в [7], [8] с большей точностью формулируются математические основы теории и некоторые из ее математических результатов.

Hitchin [11] предложил свой подход к проблеме. Он получил проективно плоскую связность на пространстве модулей представлений средствами геометрического квантования некоторых интегрируемых систем.

Еще одно направление было заложено в важной статье Tsuchiya, Ueno, Yamada [38]. В отличие от вышеупомянутых работ (за исключением подхода самих Книжника и

²Весса–Зумино–Виттена.

Замолодчикова) они построили проективно плоскую связность на пространстве проколотых римановых поверхностей (более точно, на пространстве модулей стабильных кривых с отмеченными точками). В наиболее прямой и последовательной форме их подход использует идею деформации комплексной структуры на римановой поверхности путем разрезания и переклейки вдоль малых окружностей вокруг некоторых точек. Они выбрали локальные координаты (соответственно, формальные окрестности) возле проколов и в этих координатах воспроизвели конструкцию Книжника–Замолодчикова. Каждому проколу они сопоставили экземпляр алгебры петель Каца–Мули и экземпляр алгебры Вирасоро, связанный с выбранной локальной координатой в окрестности прокола. Они рассмотрели центральное расширение прямой суммы локальных алгебр петель как алгебру калибровочных симметрий теории, а прямую сумму локальных алгебр Вирасоро – как алгебру конформных симметрий. Стартовав с локальных представлений, они построили пучок представлений над пространством модулей. Они ввели *конформные блоки* как некоторый фактор-пучок. Последний оказался конечномерным векторным расслоением над пространством модулей. В этом расслоении они построили вышеупомянутую связность. С помощью их техники им удалось дать математическое доказательство формулы Верлинде. Усовершенствованное изложение их подхода см. в [39].

С самого начала было понятно, что основные объекты теории Весса–Зумино–Виттена–Новикова (WZWN) на римановой поверхности имеют глобальную природу. В самом деле, ток и тензор энергии-импульса являются абелевыми дифференциалами (1-го и 2-го порядка соответственно). Алгебра, аннулирующая конформные блоки, состоит из мероморфных функций (со значениями в алгебре Ли) с определенным набором полюсов [8]. Несмотря на это, большинство авторов использует локальный подход к калибровочным и конформным симметриям, принадлежащий Tsuchiya, Ueno и Yamada. В работах [16]–[18] Кричевер и Новиков ввели обобщение аффинных алгебр Каца–Мули и Вирасоро и указали новый (глобальный) подход к калибровочным и конформным симметриям в двумерной конформной теории поля. Алгебры Кричевера–Новикова изучались и обобщались в [5], [23]–[29], [33]–[37]. В [4], [30] рассмотрена конструкция Сугавара для этих алгебр.

Исходной точкой настоящей статьи является наше наблюдение, что в теории WZWN для произвольного рода в качестве алгебр калибровочных и конформных симметрий естественно рассматривать многоточечные алгебры Кричевера–Новикова.³ Эти алгебры естественным образом связаны с основным геометрическим объектом теории, а именно, с римановыми поверхностями с проколами. В рамках такого подхода не возникает проблемы действия нулевых мод оператора тока. Более того, векторные поля Кричевера–Новикова естественным образом связаны с деформациями проколотых римановых поверхностей. Как показано ниже (теорема 4.5), они имеют отношение к касательному пространству Кураниши к пространству модулей проколотых римановых поверхностей. Двойственное описание деформаций проколотых римановых поверхностей связано с (мероморфными) квадратичными дифференциалами с полюсами в проколах порядка не более единицы. Заметим, что это двойственное описание может быть получено из двойственности Кричевера–Новикова (см. предложение 2.3). В [9] предложен еще один подход для двухточечного случая.

³И. М. Кричевер также высказывал эту идею в разговоре с одним из авторов.

В разделе 2 собрано все касающееся многоточечных алгебр Кричевера–Новикова в ситуации с N входящими точками (соответствующими подвижным проколам $(P_1, P_2, \dots, P_N)$) и одной исходящей точкой (соответствующей фиксированной “контрольной” точке P_∞). Даны определения алгебр Кричевера–Новикова векторных полей, центральных расширений, аффинных алгебр, отвечающих данным конечномерным алгебрам Ли, и т. д. Напоминаются необходимые результаты.

В разделе 3 вводятся и изучаются модули Верма для многоточечных аффинных алгебр высших родов. Следуя работе [30], вводится конструкция Сугавара для алгебр Кричевера–Новикова этого класса.

В разделе 4 вводится необходимое нам пространство модулей компактных римановых поверхностей с отмеченными точками. Как техническое средство мы также вводим большее пространство модулей с инфинитезимальными окрестностями первого порядка в проколах в качестве дополнительных данных. Заметим, что в этой статье мы имеем дело только с ситуацией общего положения, т. е. с точками пространства модулей, отвечающими кривым общего положения и общему выбору отмеченных точек. Следовательно, *a priori* наши объекты будут определены над открытым плотным подмножеством пространства модулей. Вводятся пучки аффинных алгебр Кричевера–Новикова и модулей Верма. Элементы алгебр векторных полей Кричевера–Новикова определяют касательные векторы к пространству модулей. В теореме 4.5 дан явный изоморфизм касательного пространства и некоторого подпространства алгебры векторных полей. Пусть $\{X_k, k = 1, \dots, 3g - 3 + N\}$ – базис касательного пространства и l_k – элемент алгебры векторных полей, соответствующий X_k при этом изоморфизме. Для пучков допустимых представлений аффинной алгебры (в частности, модулей Верма) набор $3g - 3 + N$ уравнений

$$(1.2) \quad \nabla_k \Phi := (\partial_k + T[l_k]) \Phi = 0$$

мы называем *формальными уравнениями Книжника–Замолодчикова* (KZ). Здесь ∂_k – производная вдоль векторного поля X_k на пространстве модулей и $T[l_k]$ – оператор представления Сугавара векторного поля l_k . Заметим, что $T[l_k]$ действует вертикально в слое.

В разделе 5 рассмотрен случай рода 0. Показано, как из (1.2) получить оригинальные уравнения KZ.

В разделе 6 изучается случай рода 1. Получены явные выражения для коэффициентов уравнений KZ в терминах σ -функции Вейерштрасса. В дополнении приведен базис KN для рода 1 и N отмеченных точек.

В целом предложенный нами подход позволяет избежать ряда трудностей предыдущих подходов, воспользоваться преимуществами глобальной конструкции Сугавара и дать прозрачное толкование геометрического смысла коэффициентов уравнения Книжника–Замолодчикова. Необходимо отметить, что даже в случае $g = 0$ наш подход дает новый вывод уравнений KZ.

В следующей, второй части статьи [31], мы более подробно изучим уравнения KZ на пучках модулей Верма, их структуру, обсудим конформные блоки и проективную плоскостность.

2. Алгебры типа Кричевера–Новикова

(а) Общие понятия. Напомним здесь понятия, введенные в [26], [23]–[25]. Пусть M – компактная риманова поверхность рода g , соответственно, на языке алгебраической геометрии гладкая проективная кривая над $\mathbb{C}$. Пусть

$$I = (P_1, \dots, P_N) \text{ и } O = (Q_1, \dots, Q_L) \quad (N, L \geq 1)$$

– не связанные упорядоченные наборы различных точек (“отмеченных точек”, “проколов”) на кривой. В частности, мы предполагаем $P_i \neq Q_j$ для любой пары (i, j) . Точки из I называются *in-точками*, точки в O – *out-точками*. Введем множество $A = I \cup O$. В данной статье мы, в основном, имеем дело с $\#I = N \geq 1$ и $\#O = 1$. Пусть ρ – мероморфный дифференциал на M , голоморфный на $M^* := M \setminus A$, с положительными вычетами в точках I , отрицательными вычетами в точках O и чисто мнимыми периодами. Дифференциал ρ однозначно задается своими вычетами (удовлетворяющими условию “сумма по всем вычетам равна нулю”). Если выбрать дополнительную точку $R \in M^*$, то корректно определена функция

$$u(P) := \operatorname{Re} \int_R^P \rho.$$

Ее линии уровня определяют слоение на M^* . Каждая линия уровня разрезает риманову поверхность и разделяет in-точки и out-точки.

Пусть $\mathcal{K}$ – каноническое линейное расслоение. Его ассоциированный пучок локальных сечений – это пучок голоморфных дифференциалов. Следуя общепринятой практике, мы не будем, как правило, отличать линейное расслоение от его ассоциированного пучка (и даже от класса дивизора его глобального мероморфного сечения). Для каждого $\lambda \in \mathbb{Z}$ рассмотрим расслоение $\mathcal{K}^\lambda := \mathcal{K}^{\otimes \lambda}$. Здесь мы используем обычное соглашение: $\mathcal{K}^0 = \mathcal{O}$ и $\mathcal{K}^{-1} = \mathcal{K}^*$ – голоморфное касательное расслоение (соответственно, пучок голоморфных векторных полей). После фиксации тэта-характеристик, т.е. расслоения S такого, что $S^{\otimes 2} = \mathcal{K}$, становится возможным рассматривать $\lambda \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Обозначим через $\mathcal{F}^\lambda$ (бесконечномерное) векторное пространство глобальных мероморфных сечений расслоения $\mathcal{K}^\lambda$, которые голоморфны на $M \setminus A$. Особый интерес для нас представляют случаи квадратичных дифференциалов ($\lambda = 2$), дифференциалов ($\lambda = 1$), функций ($\lambda = 0$) и векторных полей ($\lambda = -1$). Пространство функций мы также будем обозначать $\mathcal{A}$, а пространство векторных полей – $\mathcal{L}$. Умножая сечения на функции, мы снова получаем сечения. Таким образом, пространство $\mathcal{A}$ становится ассоциативной алгеброй, а пространство $\mathcal{F}^\lambda$ – $\mathcal{A}$ -модулем.

Векторные поля в $\mathcal{L}$ действуют на $\mathcal{F}^\lambda$ с помощью производной Ли. В локальных координатах

$$(2.1) \quad \nabla_e(g)_| := L_e(g)_| := \left(e(z) \frac{d}{dz} \right) \cdot (g(z) dz^\lambda) := \left(e(z) \frac{dg}{dz}(z) + \lambda g(z) \frac{de}{dz}(z) \right) dz^\lambda.$$

Здесь $e \in \mathcal{L}$ и $g \in \mathcal{F}^\lambda$. Чтобы избежать громоздких обозначений, мы использовали здесь один и тот же символ для сечения и представляющей его функции. Если нет

опасности запутаться, мы будем поступать так и впредь. Пространство $\mathcal{L}$ является алгеброй Ли по отношению к скобке (2.1), а $\mathcal{F}^\lambda$ является модулем над $\mathcal{L}$. Упомянем, что, используя действие $\mathcal{L}$ на $\mathcal{A}$, можно определить алгебру Ли $\mathcal{D}^1$ дифференциальных операторов степени ≤ 1 и $\mathcal{F}^\lambda$ становится модулем над $\mathcal{D}^1$. Можно распространить это на дифференциальные операторы произвольной степени (см. [26], [28], [29]). Эта дополнительная структура нам здесь не понадобится.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. *Форма Кричевера–Новикова (форма KN)* – это форма на $\mathcal{F}^\lambda \times \mathcal{F}^{1-\lambda}$, задаваемая соотношением

$$(2.2) \quad \mathcal{F}^\lambda \times \mathcal{F}^{1-\lambda} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} f \cdot g,$$

где C_τ – произвольная неособая линия уровня.

Заметим, что в (2.2) интеграл не зависит от выбранной линии уровня. С помощью вычетов форма может быть представлена в чисто алгебраическом виде:

$$(2.3) \quad \langle f, g \rangle = \sum_{P \in I} \text{res}_P(f \cdot g) = - \sum_{Q \in O} \text{res}_Q(f \cdot g).$$

(b) Почти градуированная структура. Для римановой сферы ($g = 0$) с квази-глобальной координатой z , $I = (0)$ и $O = (\infty)$ введенная выше алгебра векторных полей – это алгебра Витта, т.е. та самая алгебра, универсальное центральное расширение которой – это алгебра Вирасоро. Мы назовем для краткости эту ситуацию *классической ситуацией*. Очень важно, что эта алгебра является градуированной. Для случая высших родов (и в многоточечном случае для $g = 0$) такой градуировки не существует. Фундаментальное наблюдение Кричевера и Новикова [16]–[18] заключается в том, что работает более слабая концепция – почти градуировка.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. (a) Пусть $\mathcal{L}$ является ассоциативной алгеброй или алгеброй Ли, допускающей, как векторное пространство, прямое разложение $\mathcal{L} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{L}_n$. $\mathcal{L}$ называется *почти градуированной* (*квази-градуированной*, *обобщенно-градуированной*) алгеброй, если (1) $\dim \mathcal{L}_n < \infty$ и (2) существуют постоянные R и S такие, что

$$(2.4) \quad \mathcal{L}_n \cdot \mathcal{L}_m \subseteq \bigoplus_{h=n+m-R}^{n+m+S} \mathcal{L}_h \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}.$$

Элементы подпространства $\mathcal{L}_n$ называются *однородными элементами степени n* .

(b) Пусть $\mathcal{L}$ – почти градуированная ассоциативная алгебра или алгебра Ли и $\mathcal{M}$ – $\mathcal{L}$ -модуль с заданным разложением $\mathcal{M} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{M}_n$ как векторное пространство. $\mathcal{M}$ называется *почти градуированным* (*квази-градуированным*, *обобщенно-градуированным*) модулем, если (1) $\dim \mathcal{M}_n < \infty$ и (2) существуют постоянные R' и S' такие, что

$$(2.5) \quad \mathcal{L}_m \cdot \mathcal{M}_n \subseteq \bigoplus_{h=n+m-R'}^{n+m+S'} \mathcal{M}_h \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}.$$

Элементы подпространства $\mathcal{M}_n$ называются *однородными элементами степени n* .

Под *слабой почти градуировкой* мы понимаем почти градуировку без требования конечномерности однородных подпространств.

Для 2-точечной ситуации, $I = \{P\}$ и $O = \{Q\}$, Кричевер и Новиков ввели почти градуированную структуру на алгебрах и модулях путем введения специального базиса и объявления его элементов однородными. Одним из авторов настоящей работы было дано многоточечное обобщение [25], [26], и снова с помощью специальных базисов (результаты в том же направлении имеются также у Садова [21]). Для каждого $n \in \mathbb{Z}$, $p = 1, \dots, N$ построен некоторый элемент $f_{n,p}^\lambda \in \mathcal{F}^\lambda$. Элементы $f_{n,p}^\lambda$ для $p = 1, \dots, N$ образуют базис подпространства $\mathcal{F}_n^\lambda$; показано, что

$$\mathcal{F}^\lambda = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}_n^\lambda.$$

Подпространство $\mathcal{F}_n^\lambda$ называется *однородным подпространством степени n* .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3 [25], [26]. (а) *Алгебра векторных полей $\mathcal{L}$ и алгебра функций $\mathcal{A}$ являются почти градуированными в смысле данного выше определения, а модули $\mathcal{F}^\lambda$ являются почти градуированными модулями над ними.*

(б) *Базисные элементы удовлетворяют соотношениям двойственности по отношению к форме KN (2.2)*

$$(2.6) \quad \langle f_{n,p}^\lambda, f_{m,r}^{1-\lambda} \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} f_{n,p}^\lambda \cdot f_{m,r}^{1-\lambda} = \delta_{-n}^m \cdot \delta_p^r,$$

где C_τ – произвольная несингулярная линия уровня.

Из (2.6) мы видим, что форма KN не вырождена. Введем следующие обозначения:

$$(2.7) \quad A_{n,p} := f_{n,p}^0, \quad e_{n,p} := f_{n,p}^{-1}, \quad \omega^{n,p} := f_{-n,p}^1, \quad \Omega^{n,p} := f_{-n,p}^2.$$

Элементы $f_{n,p}^\lambda$ обладают следующим свойством:

$$\text{ord}_{P_i}(f_{n,p}^\lambda) = (n + 1 - \lambda) - \delta_i^p, \quad i = 1, \dots, N.$$

Порядки в точках множества O мы дадим только в случае $(N, 1)$ (это укороченное обозначение для $\#I = N$, $\#O = 1$). Обозначим единственный элемент в O через P_∞ .

Для $g = 0$ или $g \geq 2$, $\lambda \neq 0, 1$ и общего выбора точек в A положим

$$(2.8) \quad \text{ord}_{P_\infty}(f_{n,p}^\lambda) = -N \cdot (n + 1 - \lambda) + (2\lambda - 1)(g - 1).$$

С помощью аргументов типа Римана–Роха в [23] показано, что с точностью до скалярного множителя существует только один такой элемент $f_{n,p}^\lambda$. После выбора локальных координат z_p в точках P_p этот скаляр может быть зафиксирован требованием

$$f_{n,p}^\lambda|_{(z_p)} = z_p^{n-\lambda} (1 + O(z_p)) (dz_p)^\lambda.$$

В остальных случаях ввиду специальности встречающихся дивизоров для конечного числа степеней n требуются другие условия в точке P_∞ . Это не нарушает порядков в точках I и дуальности Кричевера–Новикова. Полное описание дано в [26; с. 73]. Для функций $A_{n,p}$ изменения необходимы, только если все порядки, даваемые общими правилами, неположительны. Для дифференциалов $\omega^{n,p}$ изменения необходимы, только если все порядки, даваемые общими правилами, неотрицательны или они дают ровно один полюс порядка 1. В любом случае изменения могут возникнуть только для конечного числа значений n .

Чтобы пояснить, какие изменения необходимы, дадим их для случая $(1, 1)$ и $g \geq 2$. Для 1-дифференциалов изменения возникают, только если $-g \leq n \leq 0$. Модифицированные условия на базисные элементы пространства дифференциалов в случае $(1, 1)$ и в случае $g \geq 2$ для $-g \leq n \leq -1$ суть

$$\text{ord}_P(w^n) = -n - 1, \quad \text{ord}_{P_\infty}(w^n) = g + n$$

и $\text{ord}_P(w^0) = -1$, $\text{ord}_{P_\infty}(w^0) = -1$, с дополнительным требованием, что ω^0 имеет чисто мнимые периоды. В частности, $w^0 = \rho$ с точностью до умножения на скаляр. Для функций мы полагаем для $-g \leq n \leq -1$

$$\text{ord}_P(A_n) = n, \quad \text{ord}_{P_\infty}(A_n) = -g - n - 1$$

и $A_0 = 1$. Чтобы зафиксировать элементы A_n для $-g \leq n \leq -1$, добавим подходящие кратные функции A_0 так, чтобы выполнялись условия дуальности $\langle w^0, A_n \rangle = 0$. Ситуация $g = 1$ будет рассмотрена в разделе 7.

Для базисных элементов $f_{n,p}^\lambda$ в [24] дано явное описание в терминах рациональных функций (для $g = 0$), σ -функции Вейерштрасса (для $g = 1$) и прим-форм и тэта-функций (для $g \geq 1$). Описание с использованием $\wp$ -функции Вейерштрасса см. в [20], [27]. Существование явного описания необходимо в нашем контексте, так как мы хотим рассматривать вышеупомянутые алгебры и модули над конфигурационным пространством, соответственно, пространством модулей проколотых кривых. В частности, из явного представления можно усмотреть, что элементы меняются “аналитически” при деформации комплексной структуры на римановой поверхности.

Для дальнейших ссылок и в качестве иллюстрации выпишем базисные элементы для $g = 0$. Выберем квази-глобальную координату z так, что точка P_∞ — это $z = \infty$. Пусть точки P_i суть $z = z_i$ для $i = 1, \dots, N$. Очевидно,

$$(2.9) \quad f_{n,p}^\lambda(z) = (z - z_p)^{n-\lambda} \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^N (z - z_i) \right)^{n-\lambda+1} \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^N (z_p - z_i) \right)^{-n+\lambda-1} dz^\lambda.$$

Явное выражение для $g = 1$ можно найти в разделе 7.

Построенный базис совпадает с базисом Вирасоро в классической ситуации и с базисом Кричевера–Новикова в двухточечной ситуации в случае высших родов (с точностью до сдвига индексов) [16]–[18].

Нам понадобится следующее описание почти градуированной структуры. Нижеследующее доказано в [25], [26]:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. *Существуют постоянные $K, L \in \mathbb{N}$ такие, что для всех $n, m \in \mathbb{Z}$*

$$A_{n,p} \cdot A_{m,r} = \delta_p^r A_{n+m,p} + \sum_{h=n+m+1}^{n+m+K} \sum_{s=1}^N \alpha_{(n,p),(m,r)}^{(h,s)} A_{h,s},$$

$$[e_{n,p}, e_{m,r}] = \delta_p^r (m - n) e_{n+m,p} + \sum_{h=n+m+1}^{n+m+L} \sum_{s=1}^N \gamma_{(n,p),(m,r)}^{(h,s)} e_{h,s}$$

с подходящими коэффициентами $\alpha_{(n,p),(m,r)}^{(h,s)}, \gamma_{(n,p),(m,r)}^{(h,s)} \in \mathbb{C}$.

Постоянные K и L могут быть явно вычислены. Они зависят от рода g и от числа точек N . Опять мы даем здесь результат только для ситуации $(N, 1)$ и $g \neq 1$:

$$(2.10) \quad L = \begin{cases} 3g, & g \neq 1 \text{ и } N = 1, \\ 3 + \left\lfloor \frac{1}{N}(3g - 3) \right\rfloor, & g \neq 1 \text{ и } N > 1, \end{cases}$$

$$K = \begin{cases} g, & g \neq 1 \text{ и } N = 1, \\ 2 + \left\lfloor \frac{1}{N}(g - 2) \right\rfloor, & g \neq 1 \text{ и } N > 1. \end{cases}$$

Здесь $[x]$ обозначает наибольшее целое $\leq x$. Очевидно, первые альтернативы являются частными случаями вторых. Строго говоря, вышеприведенное значение K – это значение для почти всех n и m . Для общности его следует увеличить на 1 или 2 в зависимости от g и N .

Алгебра $\mathcal{A}$ имеет разложение (как векторное пространство):

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_- \oplus \mathcal{A}_{(0)} \oplus \mathcal{A}_+,$$

$$(2.11) \quad \mathcal{A}_- := \langle A_{n,p} \mid n \leq -K - 1, p = 1, \dots, N \rangle, \quad \mathcal{A}_+ := \langle A_{n,p} \mid n \geq 1, p = 1, \dots, N \rangle,$$

$$\mathcal{A}_{(0)} := \langle A_{n,p} \mid -K \leq n \leq 0, p = 1, \dots, N \rangle,$$

а алгебра Ли $\mathcal{L}$ – разложение

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_- \oplus \mathcal{L}_{(0)} \oplus \mathcal{L}_+,$$

$$(2.12) \quad \mathcal{L}_- := \langle e_{n,p} \mid n \leq -L - 1, p = 1, \dots, N \rangle, \quad \mathcal{L}_+ := \langle e_{n,p} \mid n \geq 1, p = 1, \dots, N \rangle,$$

$$\mathcal{L}_{(0)} := \langle e_{n,p} \mid -L \leq n \leq 0, p = 1, \dots, N \rangle.$$

Благодаря почти-градуированности подпространства $\mathcal{A}_\pm, \mathcal{L}_\pm$ являются подалгебрами, в то время как подпространства $\mathcal{A}_{(0)}$ и $\mathcal{L}_{(0)}$ – вообще говоря, нет. К последним мы применяем термин *критическая полоса*.

Заметим, что $\mathcal{A}_+$, соответственно $\mathcal{L}_+$, может быть описано как алгебра функций (соответственно, векторных полей), имеющих нуль порядка не меньше 1 (соответственно, не меньше 2) в точках $P_i, i = 1, \dots, N$. Эти алгебры могут быть расширены за счет добавления всех элементов, которые регулярны во всех P_i . Этого можно

достичь, добавляя к множеству базисных элементов $\{A_{0,p}, p = 1, \dots, N\}$ (соответственно, $\{e_{0,p}, e_{-1,p}, i = 1, \dots, N\}$). Мы обозначаем расширенные алгебры $\mathcal{A}_+^*$ и $\mathcal{L}_+^*$ соответственно.

С другой стороны, $\mathcal{A}_-$ и $\mathcal{L}_-$ также могли бы быть расширены за счет рассмотрения всех элементов, которые имеют нуль порядка 1 (соответственно, порядка 2) в точке P_∞ . Очевидно, они могли бы быть расширены далее за счет всех элементов, которые регулярны в P_∞ . С помощью такого процесса мы включаем в эти подалгебры элементы критической полосы.

Имея в виду раздел 4, рассмотрим это подробнее для $\mathcal{L}_-$. Из (2.8) мы видим, что при переходе от $f_{n,p}^\lambda$ к $f_{n-1,p}^\lambda$ порядок в точке P_∞ увеличится на N . Прямым вычислением для векторных полей получаем

$$-N < \text{ord}_{P_\infty}(e_{-L+1,p}) \leq 0, \quad 0 < \text{ord}_{P_\infty}(e_{-L,p}) \leq N, \quad N < \text{ord}_{P_\infty}(e_{-L-1,p}) \leq 2N.$$

В частности, все элементы из $\mathcal{L}_-$ обращаются в нуль в точке P_∞ как минимум со вторым порядком. Заметим, что при постоянной степени порядок $e_{n,p}$ в точке P_∞ не зависит от p . Зафиксируем степень n . В силу общего положения точек подходящая линейная комбинация полей $e_{n,p}$ и $e_{n,s}$, $s \neq p$, имеет в точке P_∞ порядок в точности на 1 больше, чем $e_{n,p}$. Таким путем можно найти базисные элементы $g_{n,i}$ пространства $\mathcal{F}_n^\lambda$ с

$$\text{ord}_{P_\infty}(g_{n,i}) = \text{ord}_{P_\infty}(e_{n,p}) + i, \quad i = 0, \dots, N-1.$$

После замены базиса в этом смысле мы найдем базисные элементы, которые можно добавить к генераторам подалгебры $\mathcal{L}_-$ и получить большую алгебру $\mathcal{L}'_-$, содержащую все векторные поля, исчезающие минимум со вторым порядком в точке P_∞ . При этом вновь войдут только элементы критической полосы степени меньше n . Эти базисные элементы должны быть удалены из критической полосы. Оставшееся подпространство мы назовем *редуцированной критической полосой* $\mathcal{L}'_{(0)}$. Очевидно, $\mathcal{L}'_-$ может быть расширена до $\mathcal{L}''_-$, содержащей все векторные поля с порядком нуля не менее 1 в точке P_∞ , и $\mathcal{L}_+^*$, содержащей все векторные поля, регулярные в точке P_∞ . Размерность соответствующих критических полос на 1 (соответственно, на 2) меньше, чем размерность редуцированной критической полосы. С помощью подсчета порядков базисных элементов размерность может быть найдена:

$$(2.13) \quad \dim \mathcal{L}'_0 = N + N + (3g - 3) + 1 + 1 = 2N + 3g - 1.$$

Первые два члена отвечают $\mathcal{L}_0$ и $\mathcal{L}_{-1}$. Для $g \geq 2$ средний член идет от базисных векторных полей, которые имеют полюсы в точках P_i , $i = 1, \dots, N$, и P_∞ . Слагаемое $1 + 1$ соответствует построенным выше базисным векторным полям с порядком в точности 1, соответственно, 2 в точке P_∞ . В разделе 4 мы объясним, как элементы критической полосы (соответственно, ее подмножеств) связаны с касательными векторами к пространству модулей.

Аналогичное разложение верно для критических полос алгебры функций. Так появляются модифицированные $\mathcal{A}'_-$ и $\mathcal{A}'_{(0)}$. Заметим, что

$$N \leq \text{ord}_{P_\infty}(A_{-K-1,p}) < 2N.$$

Обозначим подалгебру функций, регулярных в точке P_∞ , через $\mathcal{A}_-^*$.

(с) **Центральные расширения и аффинные алгебры высшего рода.** Алгебра функций $\mathcal{A}$ (рассматриваемая как абелева алгебра Ли) имеет центральное расширение $\widehat{\mathcal{A}}$, отвечающее 2-коциклу (в смысле когомологий алгебр Ли)

$$(2.14) \quad \gamma(g, h) := \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} g dh.$$

Более точно, как векторное пространство $\widehat{\mathcal{A}} = \mathbb{C} \oplus \mathcal{A}$, а структура алгебры Ли, задается соотношениями

$$(2.15) \quad [\hat{g}, \hat{h}] = \gamma(g, h) t_1, \quad [t_1, \widehat{\mathcal{A}}] = 0,$$

где мы пользуемся обозначениями $\hat{g} := (0, g)$, $\hat{h} := (0, h)$, $t_1 = (1, 0)$.

Чтобы получить центральное расширение алгебры векторных полей (обобщающее центральное расширение Вирасоро), мы сначала должны выбрать глобальную голоморфную проективную связность R . Определяющий 2-коцикл задается соотношением

$$(2.16) \quad \chi_R(e, f) := \frac{1}{24\pi i} \int_{C_\tau} \left(\frac{1}{2} (e''' f - e f''') - R \cdot (e' f - e f') \right) dz.$$

Этот коцикл введен в случае $(1, 1)$ Кричевером и Новиковым. Как показано в [26], он может быть распространен на многоточечную ситуацию. Он определяет центральное расширение $\widehat{\mathcal{L}} = \widehat{\mathcal{L}}_R$. Другой выбор проективной связности (даже если допустить мероморфные проективные связности с полюсами в точках A) дает когомологичный коцикл, следовательно, эквивалентное центральное расширение. Мы обозначаем нетривиальный центральный генератор t_2 . Введенные выше коциклы удовлетворяют следующим важным *условиям локальности*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5 [26]. *Существуют постоянные T и S такие, что для всех $m, n \in \mathbb{Z}$*

$$\begin{aligned} \gamma(A_{n,r}, A_{m,p}) \neq 0 &\implies T \leq |m+n| \leq 0, \\ \chi_R(e_{n,r}, e_{m,p}) \neq 0 &\implies S \leq |m+n| \leq 0. \end{aligned}$$

Рассматривая порядки подынтегральных выражений в (2.14) и (2.16), мы видим, что коциклы, будучи ограничены на подалгебры $\mathcal{A}_+$, $\mathcal{A}_-$, $\mathcal{A}'_-$, соответственно на $\mathcal{L}_+$, $\mathcal{L}_-$, $\mathcal{L}'_-$, обращаются в нуль.

Для T и S снова могут быть даны явные выражения, но они не представляют интереса.

Из локальности коцикла, полагая $\deg(t_1) := \deg(t_2) := 0$, получим почти градуировку для $\widehat{\mathcal{L}}$ и $\widehat{\mathcal{A}}$. Благодаря обращению коцикла в нуль на подалгебрах $\mathcal{A}_\pm$ и $\mathcal{L}_\pm$, последние могут быть естественным образом отождествлены с подалгебрами $\widehat{\mathcal{A}}_\pm$ и $\widehat{\mathcal{L}}_\pm$ алгебр $\widehat{\mathcal{A}}$ и $\widehat{\mathcal{L}}$ соответственно.

Пусть $\mathfrak{g}$ – редуктивная конечномерная алгебра Ли с фиксированной инвариантной невырожденной симметрической билинейной формой $(\cdot, \cdot)$, например, для полупростого случая – формой Картана–Киллинга. *Алгебра петель высшего рода*, или *алгебра токов высшего рода*, определяется как

$$\overline{\mathfrak{g}} := \mathfrak{g} \otimes \mathcal{A} \text{ со скобкой Ли } [x \otimes g, y \otimes h] := [x, y] \otimes g \cdot h.$$

Она имеет центральное расширение $\widehat{\mathfrak{g}} := \mathbb{C} \oplus \overline{\mathfrak{g}}$ со скобкой Ли

$$(2.17) \quad [\widehat{x \otimes f}, \widehat{y \otimes g}] = [x, y] \otimes (fg) - (x|y) \cdot \gamma(f, g) \cdot t, \quad [t, \widehat{\mathfrak{g}}] = 0$$

(мы полагаем $\widehat{x \otimes f} = (0, x \otimes f)$). Доказательства см. в [30]. Эта алгебра называется (многоточечной) аффинной алгеброй Ли высшего рода (или алгеброй Кричеве-ра–Новикова аффинного типа). Мы снова можем определить почти градуировку на $\overline{\mathfrak{g}}$ и $\widehat{\mathfrak{g}}$, полагая

$$\deg(t) := 0, \quad \deg(\widehat{x \otimes A_{n,p}}) := \deg(x \otimes A_{n,p}) := n,$$

и, как раньше, получить разложения

$$(2.18) \quad \begin{aligned} \overline{\mathfrak{g}} &= \overline{\mathfrak{g}}_- \oplus \overline{\mathfrak{g}}_{(0)} \oplus \overline{\mathfrak{g}}_+ \quad \text{с} \quad \overline{\mathfrak{g}}_\beta = \mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}_\beta, \quad \beta \in \{-, (0), +\}, \\ \widehat{\mathfrak{g}} &= \widehat{\mathfrak{g}}_- \oplus \widehat{\mathfrak{g}}_{(0)} \oplus \widehat{\mathfrak{g}}_+ \quad \text{с} \quad \widehat{\mathfrak{g}}_\pm \cong \overline{\mathfrak{g}}_\pm \quad \text{и} \quad \widehat{\mathfrak{g}}_{(0)} = \overline{\mathfrak{g}}_{(0)} \oplus \mathbb{C} \cdot t. \end{aligned}$$

В частности, $\widehat{\mathfrak{g}}_\pm$ и $\overline{\mathfrak{g}}_\pm$ являются подалгебрами. Соответствующие утверждения верны для расширенных алгебр. Особый интерес представляют

$$\widehat{\mathfrak{g}}_-^* = \overline{\mathfrak{g}}_-^* = \mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}_-^*, \quad \widehat{\mathfrak{g}}_+^* = \overline{\mathfrak{g}}_+^* \oplus \mathbb{C}t = (\mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}_+^*) \oplus \mathbb{C}t.$$

ЛЕММА 2.6.

$$(2.19) \quad 1 = \sum_{p=1}^N A_{0,p}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (2.6), можно написать

$$1 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{p=1}^N \langle 1, \omega^{n,p} \rangle A_{n,p}.$$

Вычисляя порядки подынтегральных выражений, получим

$$\langle 1, \omega^{n,p} \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} \omega^{n,p} = 0 \quad \text{для} \quad n \neq 0, \quad \langle 1, \omega^{0,p} \rangle = 1.$$

Последнее соотношение вводится для нормировки. Утверждение доказано.

Таким образом, мы видим, что конечномерная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ естественным образом может рассматриваться как подалгебра алгебр $\overline{\mathfrak{g}}$ и $\widehat{\mathfrak{g}}$. Она лежит в подпространстве $\overline{\mathfrak{g}}_0$.

3. Представления многоточечных алгебр Кричевера–Новикова

Начнем этот раздел с определения того, что мы понимаем под модулем Верма аффинной многоточечной алгебры Кричевера–Новикова $\widehat{\mathfrak{g}}$. Конструкция, данная ниже, представляет собой обобщение конструкции, предложенной в [37].

Пусть $\mathfrak{g}$ – простая конечномерная алгебра Ли. Пусть $\overline{\mathfrak{g}}_0 \subset \overline{\mathfrak{g}}$ – линейное подпространство элементов степени 0, т.е. $\overline{\mathfrak{g}}_0 = \bigoplus_{p=1}^N \mathfrak{g} \otimes A_{0,p}$. Пусть $\widehat{\mathfrak{g}}_+ = \overline{\mathfrak{g}}_+ \subset \overline{\mathfrak{g}}$ – линейное подпространство элементов положительной степени (см. обозначения (2.18)). Пусть Z – одномерное подпространство в $\widehat{\mathfrak{g}}$, порожденное центральным элементом t . Степень t была положена равной 0, следовательно, $\widehat{\mathfrak{g}}_0 = \overline{\mathfrak{g}}_0 \oplus Z$. Напомним, что из леммы 2.6 вытекает, что $\mathfrak{g} \subset \widehat{\mathfrak{g}}_0$ (как подалгебра Ли).

ЛЕММА 3.1. *Прямая сумма $\widehat{\mathfrak{g}}'_+ := \widehat{\mathfrak{g}}_0 \oplus Z \oplus \widehat{\mathfrak{g}}_+$ является подалгеброй Ли алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним (см. раздел 2), что $\mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_+$ – (ассоциативная) подалгебра функций, регулярных во всех точках P_i , $i = 1, \dots, N$. Отсюда и следует утверждение. Смотри также предложение 2.4.

Рассмотрим прямую сумму $\mathfrak{g}_{(N)}$ N экземпляров алгебры Ли $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{g}_{(N)} := \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_N,$$

где для каждого $p = 1, \dots, N$ фиксирован изоморфизм $\varphi_p: \mathfrak{g}_p \rightarrow \mathfrak{g}$. Ниже мы будем предполагать, что отображения φ_p имеют специальную структуру. Именно, пусть $G := \text{exr } \mathfrak{g}$ – ассоциированная группа Ли. Положим $\gamma := (\gamma_1, \dots, \gamma_N)$, где $\gamma_p \in G$ произвольны, $p = 1, \dots, N$, и возьмем $\varphi_p := \text{Ad } \gamma_p$.

Выберем и зафиксируем картановскую подалгебру $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, соответствующую борелевскую подалгебру $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ и соответствующую верхнюю нильпотентную подалгебру $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}$. Положим

$$\mathfrak{h}_p := \varphi_p^{-1} \mathfrak{h}, \quad \mathfrak{b}_p := \varphi_p^{-1} \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{n}_p := \varphi_p^{-1} \mathfrak{n} \quad \text{и} \quad \mathfrak{b}_{(N)} := \mathfrak{b}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{b}_N.$$

Пусть V_p – одномерное линейное пространство над $\mathbb{C}$ с фиксированным базисным вектором v_p ($p = 1, \dots, N$) и пусть $V := \bigotimes_{p=1}^N V_p$. Возьмем произвольный набор $\lambda := \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ с $\lambda_p \in \mathfrak{h}_p^*$, $p = 1, \dots, N$.

Определим для $p = 1, \dots, N$ одномерное представление $\mathfrak{b}_p$ в V_p соотношением

$$(3.1) \quad h_p v_p = \lambda_p(h_p) v_p, \quad n_p v_p = 0 \quad \text{для} \quad h_p \in \mathfrak{h}_p, \quad n_p \in \mathfrak{n}_p.$$

Расширим это до одномерного представления алгебры Ли $\mathfrak{b}_{(N)}$ в линейном пространстве V , беря разложение $x_{(N)} := x_1 \oplus \dots \oplus x_N$ с $x_1 \in \mathfrak{b}_1, \dots, x_N \in \mathfrak{b}_N$ и полагая

$$(3.2) \quad x_{(N)}(v_1 \otimes \dots \otimes v_N) = (x_1 v_1) \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_N + v_1 \otimes (x_2 v_2) \otimes \dots \otimes v_N \\ + \dots + v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes (x_N v_N).$$

Обозначим это представление алгебры Ли $\mathfrak{b}_{(N)}$ в линейном пространстве V через $\tau_{\lambda, \gamma}$.

Пусть $\bar{\mathfrak{b}}_0 = \bigoplus_{p=1}^N \mathfrak{b} \otimes A_{0,p} \subseteq \bar{\mathfrak{g}}_0$. Очевидно, $\widehat{\mathfrak{b}} := \bar{\mathfrak{b}}_0 \oplus Z \oplus \widehat{\mathfrak{g}}_+$ – подалгебра Ли алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$. Пусть λ и γ – произвольные наборы, определенные выше; выберем $\delta \in \mathbb{C}$. Наша ближайшая задача – сопоставить каждой тройке $(\lambda, \gamma, \delta)$ одномерное представление алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{b}}$. Сначала определим линейное отображение

$$\varphi: \widehat{\mathfrak{b}} \rightarrow \mathfrak{b}_{(N)} \quad \text{с} \quad \varphi|_Z = 0, \quad \varphi|_{\widehat{\mathfrak{g}}_+} = 0$$

и

$$x = \bigoplus_{p=1}^N x_p \otimes A_{0,p} \in \bar{\mathfrak{b}}_0 \mapsto \varphi_1^{-1}(x_1) \oplus \cdots \oplus \varphi_N^{-1}(x_N).$$

ЛЕММА 3.2. *Отображение φ является гомоморфизмом алгебр Ли.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следующие соотношения являются частными случаями соотношений предложения 2.4:

$$(3.3) \quad A_{0,p}A_{0,p} = A_{0,p} + B_p, \quad B_p \in \mathcal{A}_+,$$

$$(3.4) \quad A_{0,p}A_{0,q} = B_{p,q}, \quad B_{p,q} \in \mathcal{A}_+, \quad q \neq p.$$

Коцикл для определения центрального расширения обращается в нуль на $\mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_+$. Отсюда вытекает утверждение.

Заметим, что отображение может быть расширено до $\widehat{\mathfrak{g}}_0 \oplus \widehat{\mathfrak{g}}_+ \rightarrow \mathfrak{g}_{(N)}$ с помощью того же определения.

На одномерном пространстве V мы определяем представление $\tau_{\lambda,\gamma,\delta}$ алгебры $\widehat{\mathfrak{b}}$, полагая

$$\tau_{\lambda,\gamma,\delta}(x_0 \oplus x_+ \oplus t) := \tau_{\lambda,\gamma}(\varphi(x_0)) + \delta \cdot \text{Id},$$

где прямая сумма берется по отношению к разложению алгебры $\widehat{\mathfrak{b}}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. *Линейное пространство*

$$(3.5) \quad \widehat{V}_{\lambda,\gamma,\delta} := U(\widehat{\mathfrak{g}}) \otimes_{U(\widehat{\mathfrak{b}})} V$$

с естественной структурой $\widehat{\mathfrak{g}}$ -модуля называется модулем Верма алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{g}}$, соответствующим набору данных $(\lambda, \gamma, \delta)$. Как всегда, $U(\cdot)$ обозначает универсальную обертывающую алгебру соответствующей алгебры Ли. $U(\widehat{\mathfrak{b}})$ действует на V с помощью представления $\tau_{\lambda,\gamma,\delta}$. Набор λ называется *весом* модуля Верма, элементы $\gamma_p \in \gamma$ ($p = 1, \dots, N$) называются *твистами*, а комплексное число δ называется *уровнем* модуля Верма. Вектор $v_{\lambda,\gamma,\delta} = v_1 \otimes \cdots \otimes v_N$ называется *вектором старшего веса* модуля $V_{\lambda,\gamma,\delta}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. *$\widehat{\mathfrak{g}}$ -модуль $\widehat{V}_{\lambda,\gamma,\delta}$ является $\mathfrak{g}$ -модулем и содержит модуль*

$$V_{\lambda,\gamma} := V_{\lambda_1} \otimes V_{\lambda_2} \otimes \cdots \otimes V_{\lambda_N},$$

где для каждого $p = 1, \dots, N$ V_{λ_p} является модулем старшего веса λ_p алгебры $\mathfrak{g}_p$, а $\mathfrak{g}$ действует на $V_{\lambda,\gamma}$, будучи подкручена автоморфизмом $\text{Ad } \gamma_p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что $\mathfrak{g}$ вложена как подалгебра в $\widehat{\mathfrak{g}}$ с помощью отображения $x \mapsto x \otimes 1 = \sum_{p=1}^N x \otimes A_{0,p}$. Следовательно, модуль $\widehat{V}_{\lambda,\gamma,\delta}$ является также $\mathfrak{g}$ -модулем. $\mathfrak{g}$ -подмодуль, порожденный вектором старшего веса $v_{\lambda,\gamma,\delta}$, — это модуль $V_{\lambda,\gamma}$. Из определения действия $\mathfrak{g}$ на $V_{\lambda,\gamma,\delta}$ следует, что действие на $V_{\lambda,\gamma}$ для тензоров вида $w = w_1 \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_n$ дается соотношением

$$g.w := (\varphi_1(g).w_1) \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_N + \cdots + w_1 \otimes \cdots \otimes (\varphi_N(g).w_N).$$

В пространстве представления имеются следующие важные подпространства. Напомним, что $\widehat{\mathfrak{g}}'_+$ является подалгеброй Ли алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$ (см. лемму 3.1). Подпространство в $\widehat{V}_{\lambda,\gamma,\delta}$, порожденное как $\widehat{\mathfrak{g}}'_+$ -подмодуль элементом $v_{\lambda,\gamma,\delta}$, называется *подпространством нулевой степени*. Оно обозначено $\widehat{V}_{(\lambda,\gamma,\delta),0}$. Очевидно, $V_{\lambda,\gamma} \subseteq \widehat{V}_{(\lambda,\gamma,\delta),0}$. Заметим также, что $\widehat{\mathfrak{g}}_+$ аннулирует пространство $\widehat{V}_{(\lambda,\gamma,\delta),0}$.

Алгебра $\widehat{\mathfrak{g}}$ также содержит подалгебру $\widehat{\mathfrak{g}}^*_- \cong \widehat{\mathfrak{g}}^*_-$. Заметим, что эта подалгебра уже определена в разделе 2 как подалгебра элементов вида $x \otimes f$, где $f \in \mathcal{A}$ и f регулярна в P_∞ . То же верно для $\widehat{\mathfrak{g}}'_- \cong \widehat{\mathfrak{g}}'_-$, для которой мы требуем, чтобы функции имели в P_∞ нули. Возможно следующее определение *конформных блоков*: это пространство коинвариантов

$$(3.6) \quad \widehat{V}_{\lambda,\gamma,\delta} / \widehat{\mathfrak{g}}^*_- \widehat{V}_{\lambda,\gamma,\delta}.$$

Мы отложим обсуждение конформных блоков, их структуры и прочего до следующей, второй, части статьи. Возможна также замена в (3.6) алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}^*_-$ алгеброй $\widehat{\mathfrak{g}}'_-$, в результате чего будет получено большее пространство.

Рассмотрим более общие модули над $\widehat{\mathfrak{g}}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.5. Модуль $\widehat{V}$ над алгеброй Ли $\widehat{\mathfrak{g}}$ (соответственно, представление $\widehat{\mathfrak{g}}$) называется *допустимым модулем* (соответственно, *допустимым представлением*), если центральный элемент t действует как $c \cdot \text{Id}$, где $c \in \mathbb{C}$, и если для каждого $v \in \widehat{V}$ $x(n)v = 0$ для всех $x \in \mathfrak{g}$ и $n \gg 0$.

Очевидно, что каждый модуль Верма (3.5) является допустимым модулем.

Для каждого допустимого представления аффинной алгебры Кричевера–Новикова $\widehat{\mathfrak{g}}$ (аффинная) конструкция Сугавара дает представление центрально расширенной алгебры Кричевера–Новикова векторных полей $\widehat{\mathcal{L}}$ (алгебры типа Вирасоро). Это представление называется *представлением Сугавара*. Абелева версия для двухточечного случая была введена в [17]. Неабелев случай позже рассматривался в [4], [30]. В [30] была дана также многоточечная версия конструкции.

Пусть $\widehat{V}$ — фиксированный допустимый модуль. Для $u \otimes A_{n,p}$, где $A_{n,p}$ — базисный элемент алгебры $\widehat{\mathcal{A}}$ и $u \in \mathfrak{g}$, будем обозначать соответствующий оператор в $\widehat{V}$ через $u(n,p)$, точно так же как и через $u(A_{n,p})$.

Напомним, что мы предполагаем, что $\mathfrak{g}$ — конечномерная простая алгебра Ли. Мы выбираем базис u_i , $i = 1, \dots, \dim \mathfrak{g}$, алгебры $\mathfrak{g}$ и соответствующий дуальный базис u^i , $i = 1, \dots, \dim \mathfrak{g}$, по отношению к инвариантной невырожденной симметрической

билинейной форме $(\cdot | \cdot)$. Элемент Казимира $\Omega^0 = \sum_{i=1}^{\dim \mathfrak{g}} u_i u^i$ универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$ не зависит от выбора базиса. Для упрощения мы обозначим $\sum_i u_i(n, p) u^i(m, q)$ просто $u(n, p) u(m, q)$.

Определим *оператор Сугавара* высшего рода (называемый также *оператором Сигала* или *тензором энергии-импульса*) следующим образом:

$$(3.7) \quad T(Q) := \frac{1}{2} \sum_{n,m} \sum_{p,s} :u(n, p) u(m, s): \omega^{n,p}(Q) \omega^{m,s}(Q).$$

Через $:\cdot\cdot:$ мы обозначим некоторое нормальное упорядочение. Здесь в будущем суммирование для первой пары индексов n, m ведется по $\mathbb{Z}$, а для второй пары p, s — по $\{1, \dots, N\}$. Конкретный вид нормального упорядочения не играет роли. В качестве примера можно взять следующее “стандартное нормальное упорядочение” ($x, y \in \mathfrak{g}$)

$$(3.8) \quad :x(n, p) y(m, r): := \begin{cases} x(n, p) y(m, r), & n \leq m, \\ y(m, r) x(n, p), & n > m. \end{cases}$$

Выражение $T(Q)$ можно рассматривать как формальный ряд квадратичных дифференциалов по переменной Q с операторнозначными коэффициентами. Раскладывая его по базису $\Omega^{k,r}$ квадратичных дифференциалов, мы получим

$$(3.9) \quad T(Q) = \sum_k \sum_r L_{k,r} \cdot \Omega^{k,r}(Q),$$

где

$$(3.10) \quad \begin{aligned} L_{k,r} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} T(Q) e_{k,r}(Q) = \frac{1}{2} \sum_{n,m} \sum_{p,s} :u(n, p) u(m, s): l_{(k,r)}^{(n,p)(m,s)}, \\ l_{(k,r)}^{(n,p)(m,s)} &:= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} \omega^{n,p}(Q) \omega^{m,s}(Q) e_{k,r}(Q). \end{aligned}$$

Следующая теорема доказана в [30].

ТЕОРЕМА 3.6. Пусть $\mathfrak{g}$ — конечномерная абелева или простая алгебра Ли и $2k$ — собственное значение ее оператора Казимира в присоединенном представлении. Пусть V — допустимое представление, где центральный элемент t действует как $c \cdot \text{Id}$. Если $c + k \neq 0$, то нормированные моды

$$(3.11) \quad L_{k,r}^* = \frac{-1}{2(c+k)} \sum_{n,m} \sum_{p,s} :u(n, p) u(m, s): l_{(k,r)}^{(n,p)(m,s)}$$

оператора Сугавара являются корректно определенными операторами на V и определяют представление центрального расширения $\widehat{\mathcal{L}}$ алгебры векторных полей (алгебры типа Вирасоро).

Мы называем $L_{k,r}^*$, соответственно, $L_{k,r}$, также операторами Сугавара. Представление, полученное таким путем, — это представление Сугавара алгебры Ли $\widehat{\mathcal{L}}$, соответствующее данному допустимому представлению $\widehat{V}$ алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$.

4. Модули кривых с отмеченными точками и общая форма уравнений KZ

(а) Пространство модулей. Пусть $\mathcal{M}_{g,N}$ (соответственно, $\mathcal{M}_{g,N+1}$) – пространство модулей гладких, проективных кривых рода g (над $\mathbb{C}$) с N (соответственно, $N+1$) различными упорядоченными отмеченными точками. Эквивалентно, оно может быть описано как пространство модулей компактных римановых поверхностей с отмеченными точками. Точки в $\mathcal{M}_{g,N+1}$ задаются классами эквивалентности данных $(M, P_1, P_2, \dots, P_N, P_\infty)$, где M – гладкая проективная кривая и $P_i \in M$, $i = 1, \dots, N, \infty$. Два таких набора отождествляются, если они изоморфны (относительно алгебраических отображений) как кривые с отмеченными точками. Обозначим класс эквивалентности через $[\cdot]$. Чтобы избежать специальных рассуждений, мы, как правило, будем предполагать в этом разделе $g \geq 2$. В данной статье мы имеем дело лишь с локальной ситуацией в окрестности общей кривой M с проколами $(P_1, P_2, \dots, P_N, P_\infty)$ общего положения.⁴ Следовательно, достаточно рассматривать малое открытое подмножество $\widetilde{W}$ вокруг точки $\tilde{b} = [(M, P_1, P_2, \dots, P_N, P_\infty)]$. Кривая общего положения с $g \geq 2$ не допускает нетривиальных инфинитезимальных автоморфизмов, и мы можем предполагать, что над $\widetilde{W}$ существует универсальное семейство кривых с отмеченными точками. В частности, над $\widetilde{W}$ существует допустимое плоское семейство гладких кривых

$$(4.1) \quad \mathcal{U} \rightarrow \widetilde{W}$$

такое, что для точек $\tilde{b} = [(M, P_1, P_2, \dots, P_N, P_\infty)] \in \widetilde{W}$ имеем $\pi^{-1}(\tilde{b}) = M$ и что сечения, определенные соотношениями

$$(4.2) \quad \sigma_i: \widetilde{W} \rightarrow \mathcal{U}, \quad \sigma_i(\tilde{b}) = P_i, \quad i = 1, \dots, N, \infty,$$

голоморфны. Путем “забывания проколов” получаем (локальное) отображение $\tilde{\nu}: \widetilde{W} \subseteq \mathcal{M}_{g,N+1} \rightarrow \mathcal{M}_{g,0}$. Заметим, что семейство (4.1) – это подъем универсального семейства над $\mathcal{M}_{g,0}$ при отображении $\tilde{\nu}$. Дальнейшую информацию общего характера см. в [39; гл. 1.2, гл. 1.3], в частности, см. теорему 1.2.9 в [39].

Зафиксируем сечение $\hat{\sigma}_\infty$ универсального семейства классов изоморфных кривых (без проколов). Таким образом, для каждой кривой выбрана точка, гладко зависящая от модулей (напомним, мы работаем только с локальной ситуацией общего положения). Аналитическое подмножество

$$(4.3) \quad W' := \{\tilde{b} = [(M, P_1, P_2, \dots, P_N, P_\infty)] \mid P_\infty = \hat{\sigma}_\infty([M])\} \subseteq \widetilde{W}$$

можно отождествить с открытым подмножеством W пространства $\mathcal{M}_{g,N}$ с помощью отображения

$$(4.4) \quad \tilde{b} = [(M, P_1, P_2, \dots, P_N, \hat{\sigma}_\infty([M]))] \rightarrow b = [(M, P_1, P_2, \dots, P_N)].$$

(В точках общего положения это отображение взаимно однозначно.)

⁴Иногда под пометкой кривой понимают выбор симплектического базиса гомологий. Нов этой статье пометка относится всегда к выбору (упорядоченных) точек на кривой.

Размерности пространств модулей хорошо известны (см. также ниже в этом разделе):

$$(4.5) \quad \dim_b(\mathcal{M}_{g,N}) = \begin{cases} 3g - 3 + N, & g \geq 2, \\ \max(1, N), & g = 1, \\ \max(0, N - 3), & g = 0. \end{cases}$$

Заметим, что при $N \geq 3 - 2g$ первое выражение справедливо для любого рода.

Над точками $b \in W$ мы можем применить конструкции раздела 2 и раздела 3 и построить объекты над подмножествами W пространства $\mathcal{M}_{g,N}$

$$(4.6) \quad \mathcal{A}_b, \widehat{\mathcal{A}}_b, \mathcal{L}_b, \widehat{\mathcal{L}}_b, \widehat{\mathfrak{g}}_b, \mathcal{F}_b^\lambda,$$

зависящие от точек $b \in W \subseteq \mathcal{M}_{g,N}$. Нам потребуется описание некоторых из них в терминах теории пучков. Рассмотрим универсальное семейство $\pi: \mathcal{U} \rightarrow W$. Сначала введем обозначение $S_b = \sum_{i=1}^N P_i$ для дивизора на M , соответствующего точке $b = [(M, P_1, P_2, \dots, P_N)]$ пространства модулей. При изменении b это даст дивизор сечений $S = \sum_{i=1}^N \sigma_i(W)$ в семействе $\mathcal{U}$. Мы должны увеличить дивизоры, добавляя контрольную точку $P_\infty = \widehat{\sigma}_\infty([M])$, соответственно, сечение $\widehat{\sigma}_\infty$. Обозначим через $\nu: W \subseteq \mathcal{M}_{g,N} \rightarrow \mathcal{M}_{g,0}$ отображение, полученное путем забывания проколов. Мы полагаем

$$(4.7) \quad \widetilde{S}_b = \sum_{i=1}^N P_i + \widehat{\sigma}_\infty(M), \quad \widetilde{S} = \sum_{i=1}^N \sigma_i(W) + \widehat{\sigma}_\infty(\nu(W)).$$

Обозначим через $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ пучок регулярных функций на $\mathcal{U}$. Пусть, как обычно, $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}(k\widetilde{S})$, $k \in \mathbb{Z}$, обозначает пучок функций, имеющих нули порядка не менее $-k$ вдоль дивизора $\widetilde{S}$. В частности, для $k \in \mathbb{N}$ это означает, что функции имеют полюсы порядка не более k в точках дивизора $\widetilde{S}$. Под $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}(*\widetilde{S})$ мы понимаем пучок функций, которые имеют полюсы в точках дивизора $\widetilde{S}$. Положим также

$$(4.8) \quad \pi_* \mathcal{O}_{\mathcal{U}}(*\widetilde{S}) := \lim_{k \rightarrow \infty} \pi_*(\mathcal{O}_{\mathcal{U}}(k\widetilde{S})).$$

Это локально свободный $\mathcal{O}_W$ -пучок (где $\mathcal{O}_W$ — структурный пучок пространства W). Его слой над $b \in W$ можно отождествить с векторным пространством

$$H^0(M_b, \mathcal{O}_{M_b}(*\widetilde{S})) = \mathcal{A}_b, \quad M_b = \pi^{-1}(b).$$

Послойное умножение превращает пучок $\pi_* \mathcal{O}_{\mathcal{U}}(*\widetilde{S})$ в пучок коммутативных ассоциативных $\mathcal{O}_W$ -алгебр. Обозначим его $\mathcal{A}_W$. Как пучок абелевых алгебр Ли он имеет центральное расширение до $\mathcal{O}_W$ -пучка

$$\widehat{\mathcal{A}}_W := \widehat{\pi_* \mathcal{O}_{\mathcal{U}}(*\widetilde{S})} := \pi_* \mathcal{O}_{\mathcal{U}}(*\widetilde{S}) \oplus \mathcal{O}_W \cdot t,$$

где t — центральный элемент, и структура определена следующим образом. Элементы $f, g \in \mathcal{A}_W(U)$ могут быть представлены как функции на $\pi^{-1}(U)$ с полюсами только вдоль $\widetilde{S}$. Пусть γ — коцикл (2.14). Напомним, что его можно вычислить, суммируя вычеты вдоль S . Тогда для $r, s \in \mathcal{O}_W(U)$ скобка

$$[f + r \cdot t, g + s \cdot t] := \gamma(f, g) \cdot t$$

является элементом $\widehat{\mathcal{A}}_W(U)$. Заметим, что $\gamma(f, g) \in \mathcal{O}_W(U)$.

Эта конструкция может быть обобщена на аффинные алгебры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Если дана конечномерная алгебра Ли $\mathfrak{g}$, можно следующим образом определить *пучок ассоциированных алгебр петель* (или алгебр токов) $\bar{\mathfrak{g}}_W$ и *пучок ассоциированных аффинных алгебр* $\hat{\mathfrak{g}}_W$:

$$(4.9) \quad \bar{\mathfrak{g}}_W := \mathcal{A}_W \otimes \mathfrak{g}, \quad \hat{\mathfrak{g}}_W := \bar{\mathfrak{g}}_W \oplus \mathcal{O}_W \cdot t,$$

где структура Ли задается с помощью естественного обобщения соотношения (2.17) (без центрального члена для $\bar{\mathfrak{g}}_W$).

Очевидно, это $\mathcal{O}_W$ -пучки. Пусть $b \in W$, $\mathcal{O}_{W,b}$ – локальное кольцо в точке b и M_b – его максимальный идеал. Положим $\mathbb{C}_b \cong \mathcal{O}_{W,b}/M_b$, тогда получим следующие канонические изоморфизмы:

$$\mathbb{C}_b \otimes \mathcal{A}_W \cong \mathcal{A}_b, \quad \mathbb{C}_b \otimes \hat{\mathcal{A}}_W \cong \hat{\mathcal{A}}_b, \quad \mathbb{C}_b \otimes \bar{\mathfrak{g}}_W \cong \bar{\mathfrak{g}}_b, \quad \mathbb{C}_b \otimes \hat{\mathfrak{g}}_W \cong \hat{\mathfrak{g}}_b.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Пучок $\mathfrak{V}$ $\mathcal{O}_W$ -модулей называется *пучком представлений* аффинной алгебры $\hat{\mathfrak{g}}_W$, если $\mathfrak{V}(U)$ – модули над $\hat{\mathfrak{g}}_W(U)$.

Для пучка представлений $\mathfrak{V}$ получаем, что $\mathfrak{V}_b$ – модуль над $\hat{\mathfrak{g}}_b$ для всех точек в W .

Нам придется увеличить пространства модулей, вводя в рассмотрение также инфинитезимальные окрестности первого порядка вокруг точек P_i , $i = 1, \dots, N, \infty$. Мы обозначим эти пространства модулей $\mathcal{M}_{g,N}^{(1)}$, соответственно, $\mathcal{M}_{g,N+1}^{(1)}$. Элементы пространства $\mathcal{M}_{g,N+1}^{(1)}$ задаются как

$$\tilde{b}^{(1)} = [(M, P_1, P_2, \dots, P_N, P_\infty, z_1, \dots, z_N, z_\infty)],$$

где для $i = 1, \dots, N, \infty$ дополнительные данные z_i представляют собой координату в P_i , $z_i(P_i) = 0$. Два таких набора $\tilde{b}^{(1)}$ и $\tilde{b}^{(1)'$ отождествляются, если они эквивалентны как усеченные элементы в $\mathcal{M}_{g,N+1}$; после этого отождествления мы имеем

$$z'_i = z_i + O(z_i^2), \quad i = 1, \dots, N, \infty.$$

Умножение координат в окрестностях P_i над точкой $\tilde{b}$ пространства модулей на ненулевые постоянные дает дополнительные степени свободы в точке $\tilde{b}$. Обозначим $\tilde{W}^{(1)}$ соответствующее пространство, лежащее над $\tilde{W}$.

Снова, после фиксации инфинитезимальной окрестности первого порядка возле сечения $\hat{\sigma}_\infty$ мы можем отождествить подпространство, определенное аналогично (4.3), с открытым подпространством в $\mathcal{M}_{g,N}^{(1)}$, содержащим окрестность точки, которую мы рассматриваем. Обозначим это подпространство $W^{(1)}$. Очевидно, мы имеем N дополнительных степеней свободы и, таким образом, из (4.5) следует

$$(4.10) \quad \dim_{b^{(1)}}(\mathcal{M}_{g,N}^{(1)}) = \begin{cases} 3g - 3 + 2N, & g \geq 2, \\ 2N, & g = 1, \\ \max(0, 2N - 3), & g = 0. \end{cases}$$

Отображение $\eta : W^{(1)} \rightarrow W$, полученное забыванием координат, – сюръективное аналитическое отображение. Следовательно, путем подъема в силу η объектов (4.6) и

пучков $\mathcal{A}_W, \widehat{\mathcal{A}}_W, \bar{\mathfrak{g}}_W, \widehat{\mathfrak{g}}_W$ мы получим пучки $\mathcal{A}_{W^{(1)}}, \widehat{\mathcal{A}}_{W^{(1)}}, \bar{\mathfrak{g}}_{W^{(1)}}, \widehat{\mathfrak{g}}_{W^{(1)}}$ над $W^{(1)}$. Более того, над $W^{(1)}$ базисные элементы $f_{n,p}^\lambda$ также корректно определены. Это и было мотивировкой расширения пространства модулей. Напомним, что для фиксации базисных элементов необходим выбор координат z_i вокруг точек P_i . Заметим также, что важен только класс координаты z_i относительно эквивалентности в $\mathcal{M}_{g,N}^{(1)}$. Из явного описания [24] заключаем, что они аналитически зависят от модулей. Поднимая пучок представлений $\mathfrak{V}$ над W , мы получим пучок представлений $\mathfrak{V}^{(1)} = \eta^* \mathfrak{V}$ для $\widehat{\mathfrak{g}}_{W^{(1)}}$. Вообще, мы можем непосредственно определить пучки представлений над $W^{(1)}$. В частности, для этих пучков представлений корректно определены операторы, зависящие от базиса KN.

Мы хотим изучить, как различный выбор координат выразить в терминах $\mathcal{M}_{g,N}$. Возьмем $b \in \mathcal{M}_{g,N}$ и выберем координаты z_i в точках P_i . Имеют значение только классы координат. Следовательно, мы можем выразить это как подъем $W \rightarrow W^{(1)}$ в силу η . Из конструкции базисных элементов KN Кричевера–Новикова в разделе 2 немедленно следует следующая лемма.

ЛЕММА 4.3. Пусть $z'_p = \alpha_p \cdot z_p + O(z_p^2)$ – другая координата в точке P_p . Пусть $f_{n,p}^\lambda$ ($f_{n,p}^{\lambda'}$) – базисный элемент KN пространства $\mathcal{F}^\lambda$, построенный по z_p (соответственно, по z'_p). Тогда

$$(4.11) \quad f_{n,p}^{\lambda'} = (\alpha_p)^n f_{n,p}^\lambda, \quad u \quad f_{n,s}^{\lambda'} = f_{n,s}^\lambda, \quad s \neq p.$$

Заметим, что α_p – не обращающаяся в ноль локальная функция на $\mathcal{M}_{g,N}$. Это поведение имеет важные следствия.

(1) Градуировка в $\widehat{\mathfrak{g}}$ дана по отношению к базисным элементам $A_{n,p}$ в $\mathcal{A}$. Из (4.11) следует, что степень не меняется при переходе от одной системы координат к другой. Очевидно, это свойство глобально на W . Следовательно, мы можем снабдить $\mathcal{A}_W, \widehat{\mathcal{A}}_W, \bar{\mathfrak{g}}_W$ и $\widehat{\mathfrak{g}}_W$ почти градуировкой. Это позволяет определить пучок допустимых представлений как пучок представлений, в котором все представления допустимы. Вдобавок, мы обычно будем требовать (если не оговорено другое), чтобы центральный элемент t действовал как $c \cdot \text{id}$, где c – функция на W . Эта функция называется функцией уровня. Часто мы даже будем предполагать, что c равна постоянной s , которая называется уровнем представления.

(2) Благодаря возможности глобализовать градуировку на $\widehat{\mathfrak{g}}_W$, можно определить пучок модулей Верма, непосредственно обобщая определение 3.3:

$$(4.12) \quad \widehat{V}_{(\lambda,\gamma,\delta),W} := U(\widehat{\mathfrak{g}}_W) \otimes_{U(\widehat{\mathfrak{b}}_W)} V.$$

На первый взгляд, пучок модулей Верма определен только на $W^{(1)}$, поскольку играют роль базисные элементы $A_{0,p}$. Но из (4.11) следует, что на самом деле они не зависят от классов координат. Пучки модулей Верма – это пучки допустимых представлений. Заметим, что можно даже варьировать данные $(\lambda, \gamma, \delta)$ над пространством модулей.

Подпространство степени нуль слоя определяет подпучок. То же верно для подпространства, которое аннулируется подалгеброй $\widehat{\mathfrak{g}}_+$, и для подпространства $\widehat{\mathfrak{g}}_-^* \widehat{V}_{\lambda,\gamma,\delta}$, см. (3.6). Одна из возможностей определить пучок конформных блоков – это взять фактор-пучок по последнему подпучку. Обсуждение этих объектов отложим до следующей части II этой статьи.

(3) Для каждого пучка допустимых представлений над $W^{(1)}$ корректно определены операторы Сугавара. Заметим, что операторы $u(n, p)$ (см. раздел 3) зависят от координат. Рассмотрим пучок допустимых представлений над W и выберем координаты. Из (4.11) мы знаем, как преобразуются операторы при переходе к другим координатам $z'_p = \alpha_p z_p + O(z_p^2)$. Имеем $(u(n, p))' = (\alpha_p)^n u(n, p)$. Множитель уничтожится за счет вклада от $\omega^{n, p'} = (\alpha_p)^{-n} \omega^{n, p}$. Следовательно, из (3.7) для операторов Сугавара вытекает, что $T(Q)' = T(Q)$. Операторы $L_{k, s}$, разумеется, зависят от координат. Они корректно определены только над $W^{(1)}$. Они преобразуются как векторные поля $e_{k, s}$, как это видно из (3.9), (3.10). Если мы предположим, что функция уровня c удовлетворяет условию $(c + k) \neq 0$ (см. теорему 3.6), и сопоставим векторному полю $l \in L$ оператор

$$(4.13) \quad T[l] := \frac{-1}{c + k} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} T(Q)l(Q),$$

мы увидим, что этот оператор не зависит от координат. Очевидно, это представление Сугавара. Мы имеем $T[e_{n, p}] = L_{n, p}^*$, см. (3.10).

Рассмотрим касательное пространство к пространству модулей. Отображение Кодаира–Спенсера для версального семейства комплексных аналитических многообразий $Y \rightarrow B$ с базой B в точке базы $b \in B$

$$(4.14) \quad T_b(B) \rightarrow H^1(Y_b, T_{Y_b})$$

является изоморфизмом (см., например, [15]). Здесь $T_b(B)$ обозначает касательное пространство к B в точке b , Y_b – слой над b и T_{Y_b} – (голоморфный) касательный пучок на Y_b . Мы находимся в локальной ситуации общего положения, где рассматриваемые семейства универсальны. Следовательно, мы можем применить (4.14). Пусть M – кривая над b , соответственно, над $b^{(1)}$. Имеем

$$T_{[M]}(\mathcal{M}_{g, 0}) \cong H^1(M, T_M).$$

Более общо (см. также [39], [38]),

$$(4.15) \quad T_b(\mathcal{M}_{g, N}) \cong H^1(M, T_M(-S_b)), \quad T_{b^{(1)}}(\mathcal{M}_{g, N}^{(1)}) \cong H^1(M, T_M(-2S_b)).$$

Условия обращения в нуль первого порядка в точках $P_1, \dots, P_N$ вытекают из того, что векторные поля, которые не порождают нетривиальных комплексных деформаций кривой, не должны также двигать точек, чтобы давать тривиальные деформации и помеченной кривой. Условия обращения в нуль второго порядка соответствуют тому, что они не должны изменять и инфинитезимальных окрестностей первого порядка. Благодаря дуальности Серра [10], [22] имеем

$$(4.16) \quad \begin{aligned} H^1(M, T_M) &\cong H^0(M, \mathcal{K}^2), \\ H^1(M, T_M(-S_b)) &\cong H^0(M, \mathcal{K}^2(S_b)), \\ H^1(M, T_M(-2S_b)) &\cong H^0(M, \mathcal{K}^2(2S_b)). \end{aligned}$$

Заметим, что существует также версия отображения Кодаира–Спенсера для пучков [39; Cor. 1.2.5]

$$(4.17) \quad T_W \cong R^1 \pi_* T_{\mathcal{U}/W}(-S).$$

(b) Алгебры Кричевера–Новикова и касательные векторы к пространству модулей. Мы хотим показать, что элементы групп когомологий в (4.15) можно отождествить с элементами критической полосы алгебры векторных полей Кричевера–Новикова. Следовательно, последние могут быть отождествлены с касательными векторами к пространству модулей.

Пусть M – риманова поверхность, с которой мы имеем дело, и пусть U_∞ – координатный диск вокруг P_∞ такой, что $P_1, \dots, P_N \notin U_\infty$. Пусть $U_1 = M \setminus \{P_\infty\}$. Поскольку U_1 и U_∞ – аффинные (соответственно, Штейновы) многообразия [10; с. 297], мы имеем $H^1(U_j, F) = 0$, $j = 1, \infty$, для всех когерентных пучков F . Следовательно, пучок когомологий может быть задан с помощью когомологий Чеха относительно покрытия $\{U_1, U_\infty\}$. Положим $U_\infty^* = U_1 \cap U_\infty = U_\infty \setminus \{P_\infty\}$. 2-кошиклы могут быть заданы с помощью $s_{1,\infty} \in F(U_\infty^*)$ ($s_{0,0} = s_{\infty,\infty} = 0$) – произвольного сечения над проколотым координатным диском U_∞^* .

Вернемся к голоморфному касательному расслоению T_M . Для любого элемента f алгебры векторных полей КН его ограничение на U_∞^* голоморфно и определяет элемент группы $H^1(M, T_M)$. Заметим также, что он определяет элемент группы $H^1(M, T_M(D))$, где D – дивизор с носителем вне U_∞^* . Введем отображение

$$(4.18) \quad \theta_D: \mathcal{L} \rightarrow H^1(M, T_M(D)), \quad f \mapsto \theta_D(f) := [f|_{U_\infty^*}].$$

Если из контекста ясно о каком дивизоре D идет речь, мы будем опускать его в обозначениях. Мы рассматриваем только дивизоры $D = -kS_b$ с $k \in \mathbb{N}_0$.

Напомним обсуждение в разделе 2 редуцированной критической полосы. Она была разложена как

$$(4.19) \quad \mathcal{L}'_{(0)} = \langle e_{0,p}, p = 1, \dots, N \rangle \oplus \langle e_{-1,p}, p = 1, \dots, N \rangle \oplus \mathcal{L}_{(0)}^* \oplus \mathcal{L}_{(0)}^\infty.$$

Здесь $\mathcal{L}_{(0)}^*$ – подпространство, порожденное базисными элементами (после объясненной там замены базиса) с полюсами в точках P_i , $i = 1, \dots, N, \infty$, и $\mathcal{L}_{(0)}^\infty$ – двумерное пространство, порожденное базисом векторных полей порядка ровно 1, соответственно, порядка 0, в P_∞ . Заметим, что (в предположении $g \geq 2$)

$$\dim \mathcal{L}_{(0)}^* = 3g - 3.$$

Напомним, что подалгебра $\mathcal{L}_-^*$ была введена как алгебра векторных полей (в $\mathcal{L}$), регулярных в P_∞ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. Положим $S_b = \sum_{i=1}^N P_i$. Отображение

$$(4.20) \quad \theta_{-kS_b}: \mathcal{L} \rightarrow H^1(M, T_M(-kS_b)), \quad k \geq 0,$$

является сюръективным. Оно дает изоморфизм

$$(4.21) \quad \mathcal{L}_{k-2} \oplus \mathcal{L}_{k-3} \oplus \dots \oplus \mathcal{L}_{-1} \oplus \mathcal{L}_{(0)}^* \cong H^1(M, T_M(-kS)).$$

Ядро отображения дается соотношением

$$(4.22) \quad \ker \theta_{-kS_b} = \mathcal{L}_-^* \oplus \bigoplus_{n \geq k-1} \mathcal{L}_n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение θ_{-kS_b} линейно. Пользуясь дуальностью Серра, находим

$$\dim H^1(M, T_M(-kS_b)) = \dim H^0(M, K^2(kS_b)).$$

Но $\deg(K^2(kS_b)) = 2(2g - 2) + kN \geq 2g - 1$ для $g \geq 2$. По теореме Римана–Роха (в неспециальной области) [22] находим

$$\dim H^1(M, T_M(-kS_b)) = \dim H^0(M, K^2(kS_b)) = 3(g - 1) + kN.$$

Это совпадает с размерностями пространства в левой части соотношения (4.21). Сначала докажем (4.22). Предположим, что $\theta_{-kS_b}(f) = 0$. Тогда мы можем записать

$$f|_{U_\infty^*} = f_1|_{U_\infty^*} - f_0|_{U_\infty^*},$$

где f_0 определено и регулярно на U_∞ , f_1 определено вне P_∞ и имеет порядок не менее k в каждой из точек P_i , $i = 1, \dots, N$. Так как f_0 регулярно в P_∞ , векторное поле f_1 должно иметь ту же сингулярную часть, что и f в P_∞ . В частности, его можно продолжить до глобального мероморфного векторного поля. Отсюда следует, что $f_1 \in \mathcal{L}$. Из $\text{ord}_{P_i}(f_1) \geq k$, $i = 1, \dots, N$, вытекает, что $f_1 \in \bigoplus_{n \geq k-1} \mathcal{L}_n$. Далее, $f_0|_{U_\infty^*} = (f_1 - f)|_{U_\infty^*}$. Но $f_1 - f$ — всюду определенное мероморфное векторное поле с полюсами только в $\{P_1, \dots, P_N, P_\infty\}$. Следовательно, то же самое верно для продолжения f_0 (которое мы обозначим тем же символом). В частности, $f_0 \in \mathcal{L}$. Ввиду регулярности в точке P_∞ имеем $f \in \mathcal{L}_-^*$. Этим показано, что $\ker \theta_{-kS_b} \subseteq \mathcal{L}_-^* \oplus \bigoplus_{n \geq k-1} \mathcal{L}_n$.

Для $f \in \bigoplus_{n \geq k-1} \mathcal{L}_n$ положим $f_1 = f|_{U_1}$, $f_0 = 0$, а для $f \in \mathcal{L}_-^*$ положим $f_1 = 0$, $f_0 = -f|_{U_\infty}$. Мы видим, что классы когомологий этих элементов — нулевые. Следовательно, доказано (4.22).

Из (4.22) вытекает, что θ_{-kS_b} , будучи ограничено на дополнительное пространство, становится инъективным. Из равенства размерностей вытекает сюръективность и (4.21).

Заметим, что пространства $\ker \theta_{-kS_b}$ инвариантно определены. Следующие (линейные) изоморфизмы представляют для нас особый интерес:

$$\begin{aligned} H^1(M, T_M) &\cong \mathcal{L}_{(0)}^*, \\ (4.23) \quad H^1(M, T_M(-S_b)) &\cong \mathcal{L}_{-1} \oplus \mathcal{L}_{(0)}^*, \\ H^1(M, T_M(-2S_b)) &\cong \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_{-1} \oplus \mathcal{L}_{(0)}^*. \end{aligned}$$

Используя отображение Кодаира–Спенсера (4.15), получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4.5. *Касательные пространства к пространствам модулей $\mathcal{M}_{g,0}$, $\mathcal{M}_{g,N}$ и $\mathcal{M}_{g,N}^{(1)}$ в точках, отвечающих кривой M с множествами отмеченных точек $I = (P_1, P_2, \dots, P_N)$ и $O = (P_\infty = \hat{\sigma}_\infty(M))$, можно отождествить с подпространствами критической полосы алгебры векторных полей Кричевера–Новикова, отвечающей этой отмеченной кривой, следующим образом:*

$$(4.24) \quad T_{[M]} \mathcal{M}_{g,0} \cong \mathcal{L}_{(0)}^*, \quad T_b \mathcal{M}_{g,N} \cong \mathcal{L}_{-1} \oplus \mathcal{L}_{(0)}^*, \quad T_{b^{(1)}} \mathcal{M}_{g,N}^{(1)} \cong \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_{-1} \oplus \mathcal{L}_{(0)}^*,$$

где $b = [(M, P_1, P_2, \dots, P_N)]$ и $b^{(1)} = [(M, P_1, P_2, \dots, P_N, z_1, \dots, z_N)]$.

Поскольку векторные поля из $\ker \theta \subset \mathcal{L}$ соответствуют тривиальным деформациям модулей, мы иногда называем эти векторные поля *вертикальными*. Их не следует смешивать с сечениями относительного касательного пучка универсального семейства. Следует иметь в виду также следующее. Как уже отмечалось, $\ker \theta$ инвариантно определено. Но определение критической полосы, а следовательно, и дополнительного подпространства к $\ker \theta$ зависит от упорядочения базиса. Другой порядок даст другое отождествление касательных векторов к пространству модулей с векторными полями в слое.

Итак, мы описали связи между базисными элементами Кричевера–Новикова и инфинитезимальными модулярными параметрами, используя когомологии Чеха. Другой (эквивалентный) подход в случае $N = 1$ см. в [9].

В заключение этого раздела обсудим изменения, необходимые для рода 0 и 1. В этих случаях существуют глобальные голоморфные векторные поля. Следовательно, разложение критической полосы (4.19) и ее отождествление (4.23) более не имеют места. Пространство $\mathcal{L}_{(0)}^* \oplus \mathcal{L}_{(0)}^\infty$ (соответственно, для $g = 1$ – его часть) возникает уже как подпространство $\mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_{-1}$. Это находится в полном соответствии со скорректированными размерностями пространств модулей.

Рассмотрим сначала $g = 0$. С помощью автоморфизма $\mathbb{P}^1$ всегда можно перевести три различные точки в тройку $(0, 1, \infty)$. Если это сделано, то других автоморфизмов не существует. Следовательно, пространство модулей $\mathcal{M}_{0,N}$ имеет ненулевую размерность в точности для $N \geq 4$. Его размерность равна $\min(0, N - 3)$. Весьма полезно всегда отображать контрольную точку P_∞ в ∞ . Однако следует обратить внимание на то, что отображение (4.4) более не взаимно однозначно. Другими словами, замена W' на W невозможна. Заметим, что $\dim W' = N - 2 = \dim \mathcal{M}_{0,N} + 1$ для $N \geq 3$. В этом случае лучше работать (и это обычно делается) с “конфигурационным пространством”

$$\widehat{W} := \{(P_1, P_2, \dots, P_N) \mid P_i \in \mathbb{C}, P_i \neq P_j \text{ для } i \neq j\}$$

N точек и изучать все остающиеся инвариантности в конце.

Для $g = 1$ ситуация аналогична. Для общей эллиптической кривой E всегда имеются автоморфизмы – сдвиги на элементы кривой E . После фиксации некоторой точки как нуля группы E (который можно выбрать в контрольной точке P_∞) эти автоморфизмы пропадают. Единственный нетривиальный автоморфизм, который остается для кривой общего положения, – это инволюция $x \rightarrow -x$. Снова отображение (4.4) не взаимно однозначно. К примеру, для $N = 1$ имеем $\dim W' = 2$, но $\dim \mathcal{M}_{1,1} = 1$. Приходится работать в $\mathcal{M}_{1,N+1}$. Снова оказывается удобнее работать с “конфигурационным пространством”. Заметим, что для высшего рода в ситуации общего положения пространство модулей локально совпадает с “конфигурационным пространством”.

(с) Формальные уравнения KZ. Пусть $\mathfrak{V}$ – пучок допустимых представлений аффинной алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$ над W , соответственно, над $W^{(1)}$, как определено выше. Мы предположим, что уровень s – постоянная величина, удовлетворяющая условию $(s + k) \neq 0$. По теореме 4.5 элементы (фиксированной) критической полосы (соответственно, подпространства критической полосы) соответствуют касательным

векторам на пространстве модулей $\mathcal{M}_{g,N}$, соответственно, на $\mathcal{M}_{g,N}^{(1)}$. В частности, отображения θ , введенные соотношением (4.18), при ограничении на подпространства являются изоморфизмами. Обозначим касательные векторы $X_k, k = 1, \dots, 3g - 3 + N$ (соответственно, $k = 1, \dots, 3g - 3 + 2N$), и положим $l_k = \theta^{-1}(X_k)$ для соответствующих элементов критической полосы. Предположим, что X_k действует линейно как оператор ∂_k на пространстве сечений. Далее предположим, что ∂_k действует как производная

$$\partial_k(s\Phi) = (X_k(s))\Phi + s\partial_k(\Phi),$$

где Φ – сечение $\mathfrak{V}$ и s – локальная функция на базе W , соответственно, на $W^{(1)}$.

Сосредоточимся на пучках представлений, определенных на $\mathcal{M}_{g,N}$. Примерами являются пучки модулей Верма. Как отмечалось в разделе 3, элементы (центрального расширения) алгебры векторных полей действуют вертикально на слое пучка представлений с помощью представления Сугавара. Напомним определение (4.13) оператора $T[l]$, справедливое для каждого векторного поля $l \in \mathcal{L}$. Этот оператор не зависит от координат.

Определим для сечений Φ пучка $\mathfrak{V}$ и для всех k оператор

$$(4.25) \quad \nabla_k \Phi := (\partial_k + T[l_k])\Phi.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.6. *Формальные уравнения KZ* определяются как система уравнений

$$(4.26) \quad \begin{aligned} \nabla_k \Phi &= 0 \\ \text{для } k &= 1, \dots, 3g - 3 + N. \end{aligned}$$

Применяя (3.10) и полагая

$$l_k^{(n,p)(m,s)} := \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} \omega^{n,p} \omega^{m,s} l_k,$$

это можно переписать как

$$(4.27) \quad \left(\partial_k - \frac{1}{c+k} \sum_{\substack{n,m \\ p,s}} l_k^{(n,p)(m,s)} :u(n,p)u(m,s): \right) \Phi = 0, \quad k = 1, \dots, 3g - 3 + N.$$

Ввиду разложений (4.24) все уравнения делятся на две части, которые имеют разную интерпретацию. Мы имеем N уравнений для движущихся точек. Они связаны с $e_{-1,p}, p = 1, \dots, N$. Остальные соответствуют $3g - 3$ элементам $l_k \in \mathcal{L}_{(0)}^*$ (для $g \geq 2$). Они отвечают за изменение комплексной структуры на кривой.

Иногда мы будем рассматривать сечения со значениями в определенных подпространствах. К примеру, для пучка модулей Верма – подпучок, состоящий из элементов $\mathfrak{V}$ степени ноль, или пучок подпространств элементов, которые аннулируются подалгеброй $\hat{\mathfrak{g}}_+$ (пучком таких подалгебр). Рассматриваются также индуцированные действия на факторах по пучкам подпространств, инвариантных относительно оператора ∇_k . Все это будет рассмотрено в части II настоящей работы.

Для вычислений часто полезно выразить (4.25) (соответственно, (4.26)) в терминах базиса $e_{n,p}$ векторных полей КН и положить $X_{n,p} = \theta(e_{n,p})$. Но определение $e_{n,p}$ зависит от координат: $e'_{n,p} = (\alpha_p)^n e_{n,p}$. Поэтому имеем $X'_{n,p} = \theta(e'_{n,p}) = (\alpha_p)^n X_{n,p}$ и $T[e'_{n,p}] = (\alpha_p)^n T[e_{n,p}]$. Для операторов мы получаем $\nabla'_{n,p} = (\alpha_p)^n \nabla_{n,p}$. В частности, формальные уравнения КЗ, выраженные в терминах базисных элементов КН, при замене координат дадут эквивалентные уравнения. Заметим также, что базисные элементы КН фиксируют касательные направления.

Соответствующие системы формальных уравнений КЗ для пучков представлений над $\mathcal{M}_{g,N}^{(1)}$ получаются добавлением N дополнительных уравнений, соответствующих векторным полям $e_{0,p}$, $p = 1, \dots, N$. Они деформируют локальные координаты в отмеченных точках. В этом случае операторы $\nabla_{n,p}$ будут корректно определены.

Следует иметь в виду, что, к примеру, нельзя говорить о замене комплексной структуры и “фиксации точек”. Равно невозможно двигать точки (в $\mathcal{M}_{g,N}^{(1)}$), но “фиксировать координаты”. Несмотря на это, если мы имеем глобальные координаты, то для каждого перемещения точек также имеется и определенная замена координат. Другими словами, мы рассматриваем специальное подпространство $W^{(1)} \subseteq \mathcal{M}_{g,N}^{(1)}$, изоморфное $W \subseteq \mathcal{M}_{g,N}$. В этом случае можно рассматривать пучки представлений и соответствующие операторы Сугавара, которые определены над $\mathcal{M}_{g,N}^{(1)}$, как пучки представлений и операторы над $\mathcal{M}_{g,N}$ и опустить соответствующую часть уравнений. Однако, подчеркнем, что это зависит только от выбора координат.

Такие координаты существуют для $g = 0$ (квази-глобальная координата z) и для $g = 1$ (координата на универсальной накрывающей). В разделах 5 и 6 мы имеем дело в точности с этой ситуацией. Для высших родов все униформизации имеют свои недостатки. Мы могли бы реализовать кривую как фактор верхней полуплоскости по фуксовой группе или вложить ее в якобиан. В первом случае нет хорошего поведения при деформациях комплексной структуры. Во втором случае получаем многомерные координаты.

5. Случай малых родов: $g = 0$

Покажем, как получить из (4.27) оригинальные уравнения Книжника–Замолдчикова (1.1) для $g = 0$. Пусть z_i ($i = 1, \dots, N$) — N отмеченных точек, зафиксируем контрольную точку z_∞ в ∞ . Для определенности возьмем в качестве пучка представлений пучок модулей Верма, введенный в (4.12), (3.5). Мы полагаем $\alpha(i) := \prod_{l=1, l \neq i}^N (z_i - z_l)^{-1}$ для $i = 1, \dots, N$. Для каждой точки z_i ($i = 1, \dots, N$) элементы базиса КН степени (-1) для квадратичных дифференциалов, соответственно, для векторных полей, даются формулами

$$\Omega^i(z) := \Omega^{-1,i} = \frac{dz^2}{z - z_i}, \quad \text{соответственно,} \quad e_i(z) := e_{-1,i} = \left(\alpha(i) \prod_{j \neq i} (z - z_j) \right) \frac{\partial}{\partial z}.$$

Векторное поле e_i равно $\frac{\partial}{\partial z}$ в точке z_i и обращается в 0 во всех других точках z_j , $j \neq i$. Следовательно, e_i соответствует базисному направлению ∂_i на конфигурационном пространстве, отвечающему за сдвиг точки z_i . С другой стороны, e_i — в точности дуальное по Кричеверу–Новикову векторное поле к квадратичному дифференциалу Ω^i . Это вытекает из подсчета вычетов, см. (2.6).

Коэффициенты $l_k^{(m,i)(n,j)}$ даются формулой

$$(5.1) \quad l_k^{(m,i)(n,j)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} \omega^{(m,i)} \omega^{(n,j)} e_k.$$

Напомним, что из (2.9)

$$(5.2) \quad \omega^{(m,i)} = \frac{\alpha(i)^{-m} dz}{(z - z_i) \prod_{s=1}^N (z - z_s)^m}.$$

Следовательно, подынтегральное выражение в (5.1) равно

$$(5.3) \quad \frac{\alpha(i)^{-m} \alpha(j)^{-n} \alpha(k) dz}{(z - z_i)(z - z_j)(z - z_k) \prod_{s=1}^N (z - z_s)^{m+n-1}}.$$

Коэффициенты (5.1) могут быть получены суммированием вычетов в точках $z_1, \dots, z_N$ (или путем взятия вычета в точке z_∞ с обратным знаком). Заметим, что если $m + n \leq -2$ или $m + n = -1$, но неверно, что $i = j = k$, то все вычеты в точках $z_1, \dots, z_N$ равны нулю. Если $m + n > 0$, вычет обращается в нуль в z_∞ . Здесь мы рассматриваем только случай, когда Φ в (4.27) – это вектор, который аннулируется подалгеброй $\widehat{\mathfrak{g}}_+$; заметим, что оригинальные уравнения KZ были получены при том же предположении в [14]. Но тогда если $m + n = 0$ и $m, n \neq 0$, то либо m , либо n положительно и, следовательно, $:u(m,i)u(n,j): \Phi = 0$, так как благодаря нормальному упорядочению элементы положительной степени окажутся справа. Ненулевые коэффициенты в (4.27) для данного $k = 1, \dots, N$ таковы:

$$(5.4) \quad \begin{aligned} l_k^{(0,i)(0,i)} &= \frac{\alpha(i)^{-1} \alpha(k)}{z_i - z_k} \quad (i \neq k), & l_k^{(0,i)(0,k)} &= l_k^{(0,k)(0,i)} = \frac{1}{z_k - z_i} \quad (i \neq k), \\ l_k^{(0,k)(0,k)} &= \sum_{i \neq k} \frac{1}{z_k - z_i}, & l_k^{(-1,k)(0,k)} &= l_k^{(0,k)(-1,k)} = \alpha(k)^2. \end{aligned}$$

В оставшейся части раздела мы покажем, что, модифицируя базисные векторные поля e_k с помощью добавления вертикальных векторных полей (т.е. векторных полей, имеющих нули во всех точках z_i и, следовательно, не сдвигающих точек), применяя некоторый процесс факторизации и вычисляя структурные постоянные по отношению к этому базису, можно обратить в нуль все коэффициенты, кроме тех, для которых $m = n = 0$, а верхние индексы различны. Следовательно, уравнения (4.27) (выписанные уже в модифицированном базисе) будут иметь следующий вид:

$$(5.5) \quad \left(\partial_i - \frac{1}{c+k} \sum_{j \neq i} \frac{:u(0,i)u(0,j): + :u(0,j)u(0,i):}{z_i - z_j} \right) \Phi = 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Заметим, что коэффициенты $l_k^{(0,i)(0,j)}$ ($i \neq j$) могут быть также получены из разложения

$$\begin{aligned} \omega^{0,i}(z) \omega^{0,j}(z) &= \frac{dz^2}{(z - z_i)(z - z_j)} = \frac{1}{z_i - z_j} \left(\frac{dz^2}{z - z_i} - \frac{dz^2}{z - z_j} \right) \\ &= \frac{1}{z_i - z_j} (\Omega^i - \Omega^j) \quad (i \neq j), \end{aligned}$$

откуда следует

$$l_k^{(0,i)(0,j)} = \begin{cases} 0, & k \neq i \text{ и } k \neq j, \\ \frac{1}{z_k - z_j}, & k = i, \\ -\frac{1}{z_i - z_k}, & k = j. \end{cases}$$

Изменим векторные поля $e_k, k = 1, \dots, N$, так, чтобы обратить в 0 вклад членов с $i = j, m = n = 0$ (не меняя при этом коэффициентов с $i \neq j$). Положим

$$\tilde{\Omega}^i := \omega^{0,i} \omega^{0,i} = \frac{dz^2}{(z - z_i)^2}.$$

Обозначим форму Кричевера–Новикова (2.2), задающую двойственность между 2-дифференциалами и векторными полями, угловыми скобками $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Тогда

$$(5.6) \quad \langle \tilde{\Omega}^i, e_k \rangle = \frac{1}{z_k - z_i} \prod_{s \neq i, k} \frac{z_i - z_s}{z_k - z_s}, \quad (k \neq i), \quad \langle \tilde{\Omega}^k, e_k \rangle = \sum_{s \neq k} \frac{1}{z_k - z_s}.$$

Перейдем от набора векторных полей $\{e_k \mid k = 1, \dots, N\}$ к набору векторных полей $\{e'_k \mid k = 1, \dots, N\}$, где

$$(5.7) \quad e'_k := e_k + \sum_{i=1}^N \lambda_{ki} E_i, \quad \lambda_{ki} \in \mathbb{C},$$

и $\{E_s \mid s = 1, \dots, N\}$ – базисные элементы Кричевера–Новикова нулевой степени для векторных полей, т.е.

$$(5.8) \quad E_i := e_{0,i} = (z - z_i) \prod_{s \neq i} \frac{(z - z_s)^2}{(z_i - z_s)^2} \frac{\partial}{\partial z}.$$

ЛЕММА 5.1. (а) E_i – вертикальное векторное поле ($i = 1, \dots, N$).

(б) $\langle \tilde{\Omega}^i, E_j \rangle = \delta_{ij}$ ($i, j = 1, \dots, N$).

(с) $\langle \Omega^i, E_j \rangle = 0$ ($i, j = 1, \dots, N$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) следует из того, что векторные поля E_k имеют нули во всех точках $\{z_s \mid s = 1, \dots, N\}$.

(б) По определению

$$\langle \tilde{\Omega}^i, E_j \rangle = \sum_{p=1}^N \operatorname{res}_{z_p} \frac{(z - z_j)}{(z - z_i)^2} \prod_{s \neq j} \frac{(z - z_s)^2}{(z_j - z_s)^2} dz.$$

Если $i \neq j$, то 1-форма в правой части последнего соотношения голоморфна и все ее вычеты равны нулю. Если $i = j$, то все вычеты равны нулю, кроме вычета в точке z_i , где он равен 1.

(с) Все 1-формы $\Omega^i E_j, i, j = 1, \dots, N$, голоморфны, что доказывает утверждение, см. также (2.6).

По лемме 5.1(a) векторные поля $\{e'_k \mid k = 1, \dots, N\}$, так же как и векторные поля $\{e_k \mid k = 1, \dots, N\}$, соответствуют базисным инфинитезимальным деформациям ∂_i . По лемме 5.1(c) коэффициенты $l_k^{(m,i)(n,j)}$ ($i \neq j$) не меняются при замене векторных полей $\{e_k \mid k = 1, \dots, N\}$ полями $\{e'_k \mid k = 1, \dots, N\}$.

Теперь найдем коэффициенты λ_{ki} в (5.7) такие, что

$$(5.9) \quad \langle e'_k, \tilde{\Omega}^i \rangle = 0, \quad i, k = 1, \dots, N.$$

Это означает, что $l_k^{(0,i)(0,i)} = 0$ ($i = 1, \dots, N$), если эти коэффициенты вычислены по отношению к векторным полям $\{e'_k \mid k = 1, \dots, N\}$. Напомним, что $\tilde{\Omega}^i = \omega^{0,i} \omega^{0,i}$.

Уравнение (5.9) означает, что

$$(5.10) \quad \left\langle e_k + \sum_{s=1}^N \lambda_{ks} E_s, \tilde{\Omega}^i \right\rangle = 0, \quad i, k = 1, \dots, N.$$

По лемме 5.1(b) это эквивалентно $\langle e_k, \tilde{\Omega}^i \rangle + \lambda_{ki} = 0$. Следовательно, (5.9) выполняется тогда и только тогда, когда $\lambda_{ki} = -\langle e_k, \tilde{\Omega}^i \rangle$.

Принимая во внимание (5.6), получаем явные выражения для измененных e'_k :

$$e'_k = e_k + \sum_{i \neq k} \frac{\prod_{s=1}^N (z - z_s)^2}{z_k - z_i} \cdot \alpha(k) \left(\frac{\alpha(i)}{z - z_i} - \frac{\alpha(k)}{z - z_k} \right) \frac{\partial}{\partial z},$$

где $i, k = 1, \dots, N$. Заметим, что теперь могут встретиться ненулевые коэффициенты с $m + n = 1$. Но используя снова предположение, что $\hat{\mathfrak{g}}_+$ аннулирует Φ , и нормальное упорядочение, получим, что соответствующие операторные члены не войдут в окончательное уравнение.

Наконец, член $l_k^{(0,k)(-1,k)} (:u(0, k)u(-1, k): + :u(-1, k)u(0, k):)$ уравнения Книжника–Замолодчикова может быть устранен либо оставлением в результирующем уравнении только элементов нулевой степени, либо переходом к фактор-пучку $\hat{V}_{\lambda, \gamma, \delta} / \hat{\mathfrak{g}}^* \hat{V}_{\lambda, \gamma, \delta}$ (см. (3.6)). Разумеется, для этого надо предположить, что $:u(0, k)u(-1, k): = :u(-1, k)u(0, k): = u(-1, k)u(0, k)$. Но для стандартного нормального упорядочения (3.8) это верно.

Из (5.5) может быть получено в точности уравнение (1.1), если взять Φ из $\mathfrak{g}$ -модуля $V_{\lambda, \gamma}$ (см. предложение 3.4), который является тензорным произведением отдельных представлений V_{λ_i} . Если предположить, что u_a – автодуальный базис алгебры $\mathfrak{g}$, и взять стандартное нормальное упорядочение, то

$$u_a(0, i)\Phi = t_i^a \Phi \quad \text{и, далее,} \quad u_a(0, j)u_a(0, i)\Phi = t_j^a t_i^a \Phi = t_i^a t_j^a \Phi \quad \text{для } j \neq i.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_i} - \frac{2}{c+k} \sum_{j \neq i} \frac{t_i^a t_j^a}{z_i - z_j} \right) \Phi = 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

6. Случай малых родов: $g = 1$

Цель этого раздела – получить явные выражения для коэффициентов уравнений KZ через σ -функцию Вейерштрасса.

1. Возьмем следующее множество векторных полей, соответствующих движениям точек $z_1, \dots, z_N$: $e_k(z) = A_{0,k}(z) \frac{\partial}{\partial z} (k = 1, \dots, N, \text{ см. раздел 7})$, или, явно,

$$(6.1) \quad e_k(z) = \prod_{s \neq k} \frac{\sigma(z - z_s)}{\sigma(z_k - z_s)} \cdot \frac{\sigma(z_k - z_0)^N}{\sigma(z - z_0)^N} \cdot \frac{\sigma(z + \sum_{s \neq k} z_s - Nz_0)}{\sigma(\sum_{s=1}^N z_s - Nz_0)} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Здесь z_0 – фиксированная контрольная точка. Наша первая цель – найти вклад в уравнения KZ членов вида $l_k^{(m,i)(n,j)} : u(m,i)u(n,j) :$. Заметим, что в силу соотношений двойственности $\omega^{m,i} = A_{-m-1,i} dz$. Рассмотрим несколько случаев. Как и для рода нуль, пусть Φ – элемент пространства представления, аннулируемый подалгеброй $\hat{\mathfrak{g}}_+$.

1.1. $m \neq 0, n \neq 0$. Определим $\tilde{\omega}^{m,i}, \tilde{\omega}^{n,j}, \tilde{e}_k$ соотношениями

$$\omega^{m,i} = \sigma(z - z_i)^{-1} \tilde{\omega}^{m,i}, \quad \omega^{n,j} = \sigma(z - z_j)^{-1} \tilde{\omega}^{n,j}, \quad e_k = \sigma(z - z_k)^{-1} \tilde{e}_k.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \text{ord}_{z_s} \tilde{\omega}^{m,i} &= -m, & \text{ord}_{z_s} \tilde{\omega}^{n,j} &= -n, & \text{ord}_{z_s} \tilde{e}_k &= 1 \quad (s = 1, \dots, N), \\ \text{ord}_{z_0} \tilde{\omega}^{m,i} &= Nm, & \text{ord}_{z_0} \tilde{\omega}^{n,j} &= Nn, & \text{ord}_{z_0} \tilde{e}_k &= -N. \end{aligned}$$

Положим $\tilde{\omega}_k^{(m,i)(n,j)} := \tilde{\omega}^{m,i} \tilde{\omega}^{n,j} \tilde{e}_k$. Следовательно,

$$(6.2) \quad \omega^{m,i} \omega^{n,j} e_k = \frac{\tilde{\omega}_k^{(m,i)(n,j)}}{\sigma(z - z_i) \sigma(z - z_j) \sigma(z - z_k)}$$

и $\text{ord}_{z_s} \tilde{\omega}_k^{(m,i)(n,j)} = -m - n + 1$ для всех $s = 1, \dots, N$. Если $m + n \geq 1$, то (6.2) голоморфно в точке z_0 . Если $m + n = 0$, то либо $m > 0$, либо $n > 0$. В обоих случаях $:u(m,i)u(n,j): \Phi = 0$. По той же причине в случае $m + n = -1$ имеем $m = 0, n = -1$ (или наоборот). Но в этом разделе мы предполагаем $m \neq 0, n \neq 0$, таким образом, этот случай не возникает. Остается $m + n \leq -2$. Тогда для порядка числителя в (6.2) имеем $\text{ord}_{z_s} \tilde{\omega}_k^{(m,i)(n,j)} = -m - n + 1 \geq 3$ ($s = 1, \dots, N$), следовательно, 1-форма голоморфна во всех отмеченных точках, даже если некоторые или все точки z_i, z_j, z_k совпадают.

Следовательно, рассматриваемый случай не дает вклада в уравнения KZ.

1.2. $m = 0, n \neq 0$ (или наоборот). Согласно (7.4)

$$\omega^{0,i} = \hat{\omega}^{0,i} - \sum_{s=1}^N \gamma_{i,s} \omega^{-1,s},$$

где $\hat{\omega}^{0,i} = A'_{-1,i} dz$ (см. (7.7)). Порядок суммы в правой части последнего соотношения в любой из движущихся точек определен порядком его первого слагаемого, потому что другие члены имеют большие порядки. Если $n > 0$, то $:u(0,i)u(n,j): \Phi = 0$.

Используя определение e_k и соотношения $\omega^{m,i} = A_{-m-1,i} dz$, получаем $\widehat{\omega}^{0,i} \omega^{n,j} e_k = A'_{-1,i} A_{-1-n,j} A_{0,k} dz$. Из явных выражений (6.1), (7.6)–(7.8) получается следующее: если $n \leq -2$, то $-n + 1 \geq 3$ и $\widehat{\omega}^{0,i} \omega^{n,j} e_k$ голоморфно в любой отмеченной точке. Так как $n \neq 0$, остается только рассмотреть случай $n = -1$. В этом случае $\widehat{\omega}^{0,i} \omega^{n,j} e_k$ имеет полюсы в движущихся точках порядка не более 1. Так будет, только если $i = j = k$. В частности, члены с γ голоморфны и не дают вклада в результат. Простое вычисление вычетов дает

$$(6.3) \quad l_k^{(0,k)(-1,k)} = 1 \quad (k = 1, \dots, N).$$

Тем же путем мы получаем симметричное выражение $l_k^{(-1,k)(0,k)} = 1$.

1.3. $m = n = 0$. Чтобы найти $l_k^{(0,i)(0,j)}$, нужно рассмотреть 1-формы $\omega^{0,i} \omega^{0,j} e_k$, где

$$\omega^{0,i} = \widehat{\omega}^{0,i} - \sum_{s=1}^N \gamma_{is} \omega^{-1,s}, \quad \omega^{0,j} = \widehat{\omega}^{0,j} - \sum_{r=1}^N \gamma_{jr} \omega^{-1,r}.$$

Члены $\omega^{-1,s} \omega^{-1,r} e_k$ голоморфны, так как таковы все их множители. Член вида $\omega^{-1,s} \widehat{\omega}^{0,j} e_k$ может иметь полюс (причем обязательно порядка 1), только если $s = j = k$ (и в остальных случаях он голоморфен). Таким образом,

$$l_k^{(0,i)(0,j)} = \langle \widehat{\omega}^{0,i} \widehat{\omega}^{0,j}, e_k \rangle - (\gamma_{jk} \delta_i^k + \gamma_{ik} \delta_j^k) \langle \omega^{-1,k} \widehat{\omega}^{0,k}, e_k \rangle.$$

Второе скалярное произведение уже было найдено и равно $l_k^{(0,k)(-1,k)}$, что есть просто 1. Для первого члена $\widehat{\omega}^{0,i} \widehat{\omega}^{0,j} e_k = A'_{-1,i} A'_{-1,j} A_{0,k} dz$. В случае $i \neq j$ эта 1-форма имеет вычет в точке z_i , если $i = k$, и в точке z_j , если $j = k$ (если i, j, k попарно различны, то 1-форма голоморфна). Для $i = k \neq j$ имеем

$$(6.4) \quad l_k^{(0,i)(0,j)} = \frac{1}{\sigma(z_k - z_j)} \frac{\sigma(z_k - w_1) \sigma(z_k - w_2) \sigma(z_j - z_0)}{\sigma(z_j - w_1) \sigma(z_j - w_2) \sigma(z_k - z_0)} - \gamma_{jk}$$

и аналогичное выражение для $i \neq k = j$. В (6.4) $w_1 + w_2 = z_i + z_0$ и w_1 то же, что и в (7.8). Заметим, что в случае $i = k \neq j$ этот коэффициент стоит при операторнозначном множителе $:u(0, k)u(0, j):$, а в случае $i \neq k = j$ — при множителе $:u(0, i)u(0, k):$.

Точно так же, как в случае $g = 0$, добавляя к e_k определенные векторные поля степени 0, мы можем обратить в нуль вклад от $\omega^{0,i} \omega^{0,i}$. Таким образом, мы приходим к следующей форме уравнений KZ, соответствующих движущимся точкам ($k = 1, \dots, N$):

$$(6.5) \quad \begin{aligned} \partial_k \Phi - \frac{1}{c+k} \sum_{i \neq k} l_k^{(0,k)(0,i)} (:u(0, k)u(0, i): + :u(0, i)u(0, k):) \Phi \\ - \frac{1}{c+k} \sum_{i=1}^N (:u(0, i)u(-1, i): + :u(-1, i)u(0, i):) \Phi = 0. \end{aligned}$$

2. Теперь рассмотрим уравнения KZ, соответствующие деформациям комплексной структуры (т.е. изменению модулярных параметров). Рассмотрим следующее векторное поле:

$$e_0 = \sigma(z - E)^{N+1} \sigma(z - z_0)^{-1} \prod_{s=1}^N \sigma(z - z_s)^{-1} \frac{\partial}{\partial z},$$

где $E = (N + 1)^{-1}(z_0 + z_1 + \dots + z_N)$.

Векторное поле e_0 имеет простые полюсы во всех точках $z_1, \dots, z_N, z_0$. Из следующей леммы вытекает, что соответствующий касательный вектор на пространстве модулей нетривиален и что он не зависит от касательных векторов, порожденных векторными полями $e_1, \dots, e_N$. Следовательно, он соответствует деформации комплексной структуры. В лемме вертикальные векторные поля рассматриваются по отношению к пространству модулей $\mathcal{M}_{g,N}$.

ЛЕММА 6.1. *Для точек $z_1, \dots, z_n, z_0$ в общем положении векторное поле e_0 не может быть представлено как линейная комбинация векторных полей $e_1, \dots, e_N$ и вертикальных векторных полей.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как векторные поля $e_1, \dots, e_N$ регулярны в точках $z_1, \dots, z_N$, их вычеты в точке z_0 — нулевые (на эллиптической кривой можно говорить о вычетах векторных полей). Все вертикальные векторные поля также имеют нулевой вычет в z_0 . Это очевидно для тех из них, которые регулярны в точке z_0 . Но те, которые имеют нули в точках $z_1, \dots, z_N$, также имеют нулевой вычет в точке z_0 , поскольку сумма всех их вычетов обращается в нуль. Напротив, векторное поле e_0 имеет простой полюс в точке z_0 с ненулевым вычетом в общей точке рассматриваемого пространства модулей. Этим лемма доказана.

Рассмотрим несколько случаев, как и раньше.

2.1. $m, n \neq 0$. Определим $\tilde{\omega}_0^{(m,i)(n,j)}$ из соотношения

$$(6.6) \quad \omega^{m,i} \omega^{n,j} e_0 = \frac{\tilde{\omega}_0^{(m,i)(n,j)}}{\sigma(z - z_i) \sigma(z - z_j)}.$$

Тогда $\text{ord}_{z_s} \tilde{\omega}_0^{(m,i)(n,j)} = -m - n - 1$ ($s = 1, \dots, N$). Так как порядок знаменателя в (6.6) может равняться самое большее двум, 1-форма (6.6) голоморфна в точках $z_1, \dots, z_N$, только если $-m - n - 1 \geq 2$, т.е. если $m + n \leq -3$. Если $m > 0$ или $n > 0$, то $:u(m, i)u(n, j): \Phi = 0$. Таким образом, либо $m + n = -1$, либо $m + n = -2$. Так как $m, n \neq 0$, первый случай отпадает, а во втором случае остается только $m = n = -1$. В этом случае также $i = j$, поскольку в противном случае (6.6) голоморфно. Используя явные формулы, получим

$$(6.7) \quad l_0^{(-1,i)(-1,i)} = \sigma(z_i - E)^{N+1} \sigma(z_i - z_0)^{-1} \prod_{s \neq i} \sigma(z_i - z_s)^{-1}$$

для $i = 1, \dots, N$.

2.2. $m = 0, n \neq 0$ (или наоборот). В этом случае в (6.6) следует положить $m = 0$. Тогда $\text{ord}_{z_s} \tilde{\omega}_0^{(0,i)(n,j)} = -(n + 1)$ ($s = 1, \dots, N$). Если $n > 0$, то $:u(0, i)u(n, j): \Phi = 0$.

Если $-(n+1) \geq 2$, т.е. $n \leq -3$, 1-форма (6.6) голоморфна. Следовательно, остается только рассмотреть случаи $n = -1$ и $n = -2$.

Если $n = -1$, то

$$\omega^{0,i}\omega^{-1,j}e_0 = \widehat{\omega}^{0,i}\omega^{-1,j}e_0 - \sum_{s=1}^N \gamma_{i,s}\omega^{-1,s}\omega^{-1,j}e_0.$$

Если $s \neq j$, то 1-формы $\omega^{-1,s}\omega^{-1,j}e_0$ голоморфны во всех движущихся точках (см. выше). Если $s = j$, то вклад от этих 1-форм равен $l_0^{(-1,j)(-1,j)}$ (см. раздел 2.1). Более того,

$$\widehat{\omega}^{0,i}\omega^{-1,j}e_0 = \frac{F(z)}{\sigma(z-z_i)\sigma(z-z_j)} dz,$$

где

$$F(z) := A'_{-1,i}(z)A_{0,j}(z)\sigma(z-z_0)^{-1}\sigma(z-E)^{N+1}\sigma(z-z_i)\prod_{s \neq j}\sigma(z-z_s)^{-1}$$

и $A'_{-1,i}(z)$, $A_{0,j}(z)$ введены в разделе 7. Как следует из раздела 7, $F(z)$ имеет порядок 0 в точках $z_1, \dots, z_N$. Если $i \neq j$, то имеется два вычета: в точке z_i и в точке z_j . Таким образом, мы получаем

$$(6.8) \quad l_0^{(0,i)(-1,j)} = \frac{F(z_i) - F(z_j)}{\sigma(z_i - z_j)} - \gamma_{ij}l_0^{(-1,j)(-1,j)} \quad \text{для } i \neq j.$$

Этот вычет входит в уравнения KZ с операторнозначным коэффициентом $:u(0,i)u(-1,j):$. Более того, $l_0^{(-1,i)(0,j)} = l_0^{(0,j)(-1,i)}$, но он входит с операторнозначным коэффициентом $:u(-1,i)u(0,j):$. В случае $i = j$ возникают полюсы 2-го порядка и

$$l_0^{(0,i)(-1,i)} = \frac{d}{dz}((z-z_i)^2 F(z)) \Big|_{z=z_i} - \gamma_{ii}l_0^{(-1,i)(-1,i)}.$$

Рассмотрим теперь случай $n = -2$. Тогда порядок числителя в (6.6) равен 1 во всех отмеченных точках. Таким образом, вычет может быть ненулевым, только если $i = j$. Дополнительные члены $\gamma_{is}\omega^{-1,s}\omega^{-2,i}e_0$ голоморфны и не дают вклада в уравнение. Из явных формул имеем

$$(6.9) \quad l_0^{(0,i)(-2,i)} = \sigma(z_i - E)^{N+1}\sigma(z_i - z_0)^{-1}\prod_{s \neq i}\sigma(z_i - z_s)^{-1}.$$

2.3. $m = n = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \omega^{0,i}\omega^{0,j}e_0 &= \widehat{\omega}^{0,i}\widehat{\omega}^{0,j}e_0 - \sum_{s=1}^N \gamma_{is}\omega^{-1,s}\widehat{\omega}^{0,j}e_0 \\ &\quad - \sum_{r=1}^N \gamma_{jr}\omega^{-1,r}\widehat{\omega}^{0,i}e_0 + \sum_{s,r=1}^N \gamma_{is}\gamma_{jr}\omega^{-1,s}\omega^{-1,r}e_0. \end{aligned}$$

Вклады членов с γ могут быть выражены через коэффициенты, вычисленные в разделах 2.1 и 2.2. Для первого члена рассматриваемой суммы имеем $\widehat{\omega}^{0,i}\widehat{\omega}^{0,j}e_0 = F_{ij}(z)dz$, где

$$F_{ij}(z) = C_{-1,i}^{-1}C_{-1,j}^{-1} \frac{\sigma(z-w_1)^2\sigma(z-w_2)^2}{\sigma(z-z_i)\sigma(z-z_j)} \prod_{s=1}^N \sigma(z-z_s)^{-1}\sigma(z-E)^{N+1}\sigma(z-z_0)^{-3}$$

и коэффициенты даются соотношениями (7.8). Он имеет полюсы 2-го порядка, а если $i = j$, то даже 3-го порядка, в точках z_i, z_j . Соответствующие коэффициенты выглядят так:

$$l_0^{(0,i)(0,j)} = \langle \widehat{\omega}^{0,i}\widehat{\omega}^{0,j}, e_0 \rangle - \sum_{s=1}^N (\gamma_{is}l_0^{(0,j)(-1,s)} + \gamma_{js}l_0^{(0,i)(-1,s)} + \gamma_{is}\gamma_{js}l_0^{(-1,s)(-1,s)}),$$

где

$$\begin{aligned} \langle \widehat{\omega}^{0,i}\widehat{\omega}^{0,j}, e_0 \rangle &= \frac{d}{dz}((z-z_i)^2 F_{ij}(z)) \Big|_{z=z_i} + \frac{d}{dz}((z-z_j)^2 F_{ij}(z)) \Big|_{z=z_j} \quad (i \neq j), \\ \langle \widehat{\omega}^{0,i}\widehat{\omega}^{0,i}, e_0 \rangle &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2}((z-z_i)^3 F_{ij}(z)) \Big|_{z=z_i}. \end{aligned}$$

Все члены уравнений KZ, которые содержат $u(n, j)$, $n < -1$, могут быть уничтожены при помощи факторизации по $\bar{\mathfrak{g}}_-^*$, как в разделе 5, и мы получим уравнения, соответствующие деформации комплексной структуры, в следующем виде:

$$\begin{aligned} \partial_0 \Phi - \frac{1}{c+k} \sum_{i,j=1}^N l_0^{(0,i)(0,j)} :u(0,i)u(0,j): \Phi \\ - \frac{1}{c+k} \sum_{i,j=1}^N l_0^{(0,i)(-1,j)} (:u(0,i)u(-1,j): + :u(-1,j)u(0,i):) \Phi \\ - \frac{1}{c+k} \sum_{i=1}^N l_0^{(-1,i)(-1,i)} :u(-1,i)u(-1,i): \Phi = 0. \end{aligned}$$

7. Дополнение: Базис Кричевера–Новикова для эллиптического случая

В эллиптическом случае (т.е. при $g = 1$) каноническое расслоение $\mathcal{K}$ и, следовательно, все его степени тривиальны. Из этого следует, что для всех весов λ здесь необходимы другие условия на часть базисных элементов. В этом дополнении приведены измененные условия. Более того, для базисных элементов даны явные выражения в терминах σ -функции Вейерштрасса.

Из тривиальности канонического расслоения мы имеем следующее соотношение между базисными элементами пространства $\mathcal{F}^\lambda$:

$$(7.1) \quad f_{n,p}^\lambda = A_{n-\lambda,p} dz^\lambda.$$

В частности, фиксация базиса в $\mathcal{F}^0$ дает базис в $\mathcal{F}^\lambda$. Стандартное условие в ситуации $(N, 1)$ с входящими точками $\{P_1, P_2, \dots, P_N\}$ и выходящими точками $\{P_\infty\}$ таково:

$$\text{ord}_{P_p}(A_{n,p}) = n, \quad \text{ord}_{P_i}(A_{n,p}) = n + 1 \quad \text{для } i \neq p, \quad \text{ord}_{P_\infty}(A_{n,p}) = -N(n + 1).$$

Для ситуации $(1, 1)$ положим, как и выше, $A_0 = 1$ и $A'_{-1}dz = \rho = (\omega^0)'$. Чтобы выполнялись соотношения двойственности, следует модифицировать эти элементы. Положив

$$(7.2) \quad A_{-1} := A'_{-1} - \frac{c}{2}A_0,$$

где

$$(7.3) \quad c = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} A'^2_{-1} dz,$$

получим требуемые соотношения, именно, $\langle A_{-1}, \omega^0 \rangle = 0$. Заметим, что $\omega^0 = A_{-1}dz$ теперь не обязательно имеет чисто мнимые периоды.

В ситуации $(N, 1)$ с $N > 1$ мы накладываем стандартные условия на $A_{0,p}$ и, следовательно, на $\omega^{-1,p}$ и следующие модифицированные условия при $n = -1$

$$\text{ord}_{P_p}(A'_{-1,p}) = -1, \quad \text{ord}_{P_i}(A'_{-1,p}) = 0 \quad \text{для } i \neq p, \quad \text{ord}_{P_\infty}(A'_{-1,p}) = -1.$$

Добавляя к $A'_{-1,p}$ определенные линейные комбинации функций $A_{0,s}$, мы снова получаем базис, удовлетворяющий условиям дуальности. Более подробно, положим

$$(7.4) \quad \gamma_{r,p} := \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} A'_{-1,r} A'_{-1,p} dz.$$

Модифицированные базисные элементы даются формулой

$$(7.5) \quad A_{-1,r} := A'_{-1,r} - \sum_{s=1}^N \gamma_{r,s} A_{0,s}.$$

Явные представления базисных элементов для $g = 1$ в терминах σ -функции Вейерштрасса таковы [24].

Пусть тор задан как $T = \mathbb{C} \pmod{L}$ с нормализованной решеткой $L = \langle 1, \tau \rangle_{\mathbb{Z}}$. Пусть $z_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, N$, – фиксированные подъемы точек $P_i \in T$ в $\mathbb{C}$, т.е. $z_i \pmod{L} = P_i$, а z_0 – фиксированный подъем точки $P_\infty \in T$. Пусть $n \in \mathbb{Z}$ фиксировано. Для $p = 1, \dots, N$ положим

$$b_{n,p} := b_{n,p}(z_1, \dots, z_N, z_0) := -(n + 1) \sum_{i=1}^N z_i + z_p + N(n + 1)z_0.$$

Если $n \neq -1$ и $N > 1$ или $n \neq 0, -1$ и $N = 1$, то для точек z_i и z_0 в общем положении $b_{n,p}$ не сравнимо с ними по модулю L даже при малом шевелении последних. Однако

заметим, что точки $b_{n,p}$ меняются при изменении точек z_i и z_0 . В точках P_i в качестве координаты мы выберем $z_i = (z - z_i)$, $i = 0, 1, \dots, N$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1 [26; с. 53]. Пусть точки P_i , $i = 1, \dots, N$, и P_∞ — общего положения. Тогда базисные элементы $A_{n,p}$ при $n \neq 0, -1$ и $N = 1$ (и при $n \neq -1$ и $N > 1$) задаются формулой:

$$(7.6) \quad A_{n,p}(z) = C_{n,p}^{-1} \left(\prod_{i=1}^N \sigma(z - z_i) \right)^{n+1} \sigma(z - z_p)^{-1} \sigma(z - z_0)^{-N(n+1)} \sigma(z - b_{n,p}),$$

где

$$C_{n,p} := \left(\prod_{i \neq p} \sigma(z_p - z_i) \right)^{n+1} \sigma(z_p - z_0)^{-N(n+1)} \sigma(z_p - b_{n,p}).$$

В частности, это корректно определенные функции на торе.

Точка $b_{n,p} \pmod{L}$ — дополнительный нуль базисного элемента $A_{n,p}$. Заметим, что постоянные $C_{n,p}$ также зависят от точек $z_0, \dots, z_N$.

Для исключительных степеней результаты таковы. Пусть $n = 0$. Если $N = 1$, полагаем $A_0 := 1$. Для $N > 1$ вышеприведенная формула остается справедливой. Она превращается в

$$(7.7) \quad A_{0,p} = C_{0,p}^{-1} \left(\prod_{i \neq p} \sigma(z - z_i) \right) \sigma(z - z_0)^{-N} \sigma \left(z + \sum_{i \neq p} z_i - Nz_0 \right),$$

где

$$C_{0,p} := \left(\prod_{i \neq p} \sigma(z_p - z_i) \right) \sigma(z_p - z_0)^{-N} \sigma \left(z_p + \sum_{i \neq p} z_i - Nz_0 \right).$$

Пусть $n = -1$. В этом случае порядок в точке P_∞ равен -1 . Нужно найти элементы $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ такие, что $w_1 + w_2 = z_p + z_0$, но $w_1, w_2 \neq z_i \pmod{L}$, $i = 0, \dots, N$. Можно выбрать w_1 произвольно и этим зафиксировать w_2 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.2 [26]. Для общего выбора точек

$$(7.8) \quad A_{-1,p} = C_{-1,p}^{-1} \sigma(z - z_p)^{-1} \sigma(z - z_0)^{-1} \sigma(z - w_1) \sigma(z - (z_p + z_0 - w_1)),$$

где

$$C_{-1,p} := \sigma(z_p - z_0)^{-1} \sigma(z_p - w_1) \sigma(w_1 - z_0).$$

Произвольность выбора w_1 происходит из того, что функция определяется своими порядками в P_i и P_∞ с точностью до добавления произвольной постоянной.

Теперь $(\omega^{0,p})' = A'_{-1,p} dz$ и $\omega^{-1,p} = A_{0,p} dz$. Однако заметим, что соотношения двойственности еще не выполнены. В частности, не выполняется условие $\langle \omega^{0,p}, A'_{-1,s} \rangle = 0$. Чтобы это условие выполнялось, следует добавить к $A'_{-1,s}$ комбинацию элементов $A_{0,r}$ такую же, как в (7.4), (7.5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Belavin A. A., Polyakov A. M., Zamolodchikov A. B. Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory // Nuclear Phys. B. 1984. V. 241. P. 333–380.
- [2] Bernard D. On the Wess–Zumino–Witten models on the torus // Nuclear Phys. B. 1988. V. 303. P. 77–93.
- [3] Bernard D. On the Wess–Zumino–Witten models on Riemann surfaces // Nuclear Phys. B. 1988. V. 309. P. 145–174.
- [4] Bonora L., Rinaldi M., Russo J., Wu K. The Sugawara construction on genus g Riemann surfaces // Phys. Lett. B. 1988. V. 208. P. 440–446.
- [5] Bremner M. R. Universal central extensions of elliptic affine Lie algebras // J. Math. Phys. 1994. V. 35. P. 6685–6692.
- [6] Eguchi T., Ooguri H. Conformal and current algebras on a general Riemann surfaces // Nuclear Phys. B. 1987. V. 282. P. 308–328.
- [7] Felder G. The KZB equations on Riemann surfaces // hep-th/9609153.
- [8] Felder G., Wieczorkowski C. Conformal blocks on elliptic curves and the Knizhnik–Zamolodchikov–Bernard equation // Comm. Math. Phys. 1996. V. 176. P. 133–161.
- [9] Grinevich P. G., Orlov A. Yu. Flag Spaces in KP Theory and Virasoro Action on $\det D$ and Segal–Wilson τ -function // Preprint CLNS 945/89: Cornell University, 1989.
- [10] Hartshorne R. Algebraic Geometry. Berlin: Springer-Verlag, 1977.
- [11] Hitchin N. Flat connections and geometric quantization // Comm. Math. Phys. 1990. V. 131. P. 347–380.
- [12] Ivanov D. Knizhnik–Zamolodchikov–Bernard equations on Riemann surfaces // Internat. J. Modern Phys. 1995. V. A10. P. 2507; // hep-th/9410091.
- [13] Кас В. Г., Раина А. К. Highest Weight Representations of Infinite Dimensional Lie Algebras. Adv. Ser. in Math. Phys. V. 2. Singapore: World Scientific, 1987.
- [14] Knizhnik V. G., Zamolodchikov A. B. Current algebra and Wess–Zumino model in two dimensions // Nuclear Phys. B. 1984. V. 247. P. 83–103.
- [15] Kodaira K. Complex Manifolds and Deformation of Complex Structures. Berlin: Springer-Verlag, 1986.
- [16] Кричевер И. М., Новиков С. П. Алгебры типа Вирасоро, римановы поверхности и структуры теории солитонов // Функц. анализ и его прил. 1987. Т. 21. № 2. С. 46–63.
- [17] Кричевер И. М., Новиков С. П. Алгебры типа Вирасоро, римановы поверхности и струны в пространстве Минковского // Функц. анализ и его прил. 1987. Т. 21. № 4. С. 47–61.
- [18] Кричевер И. М., Новиков С. П. Алгебры типа Вирасоро, тензор энергии-импульса и операторные разложения на римановых поверхностях // Функц. анализ и его прил. 1989. Т. 23. № 1. С. 24–40.
- [19] Новиков С. П. Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса // УМН. 1982. Т. 37. № 5. С. 3–49.
- [20] Ruffing A., Deck Th., Schlichenmaier M. String branchings on complex tori and algebraic representations of generalized Krichever–Novikov algebras // Lett. Math. Phys. 1992. V. 26. P. 23–32.
- [21] Sadov V. A. Bases on multipunctured Riemann surfaces and interacting strings amplitudes // Comm. Math. Phys. 1991. V. 136. P. 585–597.
- [22] Schlichenmaier M. An Introduction to Riemann Surfaces, Algebraic Curves and Moduli Spaces. Lecture Notes in Phys. V. 322. Berlin: Springer-Verlag, 1989.
- [23] Schlichenmaier M. Krichever–Novikov algebras for more than two points // Lett. Math. Phys. 1990. V. 19. P. 151–165.
- [24] Schlichenmaier M. Krichever–Novikov algebras for more than two points: explicit generators // Lett. Math. Phys. 1990. V. 19. P. 327–336.
- [25] Schlichenmaier M. Central extensions and semi-infinite wedge representations of Krichever–Novikov algebras for more than two points // Lett. Math. Phys. 1990. V. 20. P. 33–46.
- [26] Schlichenmaier M. Verallgemeinerte Krichever–Novikov Algebren und deren Darstellungen // Ph.D. Thesis. Universität Mannheim, Germany, 1990.

- [27] Schlichenmaier M. Degenerations of generalized Krichever–Novikov algebras on tori // J. Math. Phys. 1993. V. 34. P. 3809–3824.
- [28] Schlichenmaier M. Differential operator algebras on compact Riemann surfaces // Generalized Symmetries in Physics / ed. H.-D. Doebner et al. Singapore: World Scientific, 1994. P. 425–435.
- [29] Schlichenmaier M. Zwei Anwendungen algebraisch-geometrischer Methoden in der theoretischen Physik: Berezin–Toeplitz–Quantisierung und globale Algebren der zweidimensionalen konformen Feldtheorie // Habilitationsschrift, Universität Mannheim, Juni 1996.
- [30] Schlichenmaier M., Sheinman O. K. Sugawara construction and Casimir operators for Krichever–Novikov algebras. Mannheimer Manuskripte Nr. 201 (q-alg/9512016), 1995 // J. Math. Sci. 1998. V. 92. №2. P. 3807–3834; рус. перев.: Шлихенмайер М., Шейнман О. К. Конструкция Сугавара и операторы Казимира для алгебр Кричеве–Новикова // Итоги науки и техники. Совр. матем. и ее прилож. Тематические обзоры. Т. 38. Комплексный анализ и теория представлений, 1. М.: ВИНТИ.
- [31] Schlichenmaier M., Sheinman O. K. The Wess–Zumino–Witten–Novikov theory, Knizhnik–Zamolodchikov equations, and Krichever–Novikov algebras. II. in preparation.
- [32] Segal G. B. Conformal field theory // Proceedings of IXth International Congress of Mathematical Physics, Swansea, 17–27 July 1988 / ed. B. Simon et al.
- [33] Шейнман О. К. Эллиптические аффинные алгебры Ли // Функц. анализ и его прил. 1990. Т. 24. №3. С. 51–61.
- [34] Шейнман О. К. Модули старшего веса над некоторыми квазиградуированными алгебрами Ли на эллиптических кривых // Функц. анализ и его прил. 1992. Т. 26. №3. С. 65–71.
- [35] Шейнман О. К. Аффинные алгебры Ли на римановых поверхностях // Функц. анализ и его прил. 1993. Т. 27. №4. С. 54–62.
- [36] Шейнман О. К. Модули со старшим весом для аффинных алгебр Ли на римановых поверхностях // Функц. анализ и его прил. 1995. Т. 29. №1. С. 56–71.
- [37] Sheinman O. K. Representations of Krichever–Novikov algebras // Topics in Topology and Mathematical Physics / ed. S. P. Novikov. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1995. P. 185–197.
- [38] Tsuchiya A., Ueno K., Yamada Y. Conformal field theory on universal family of stable curves with gauge symmetries // Adv. Stud. Pure Math. 1989. V. 19. P. 459–566.
- [39] Ueno K. Introduction to conformal field theory with gauge symmetries // Geometry and Physics, Proceedings Aarhus conference 1995 / ed. J. E. Andersen et al. New York: Marcel Dekker, 1997. P. 603–745.

Университет города Маннгейм, Германия
E-mail: schlichenmaier@math.uni-mannheim.de

Поступила в редакцию
 15.12.1998

Независимый московский университет, Москва
E-mail: sheinman@landau.ac.ru