Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Н. Андреев, Один сферический код, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 1, 255–256

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm123>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 10:10:15

ОДИН СФЕРИЧЕСКИЙ КОД

Н. Н. АНДРЕЕВ

Пусть $S^{d-1} = \{(x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2 = 1\}$ — единичная сфера в d -мерном евклидовом пространстве; для $x, y \in \mathbb{R}^d$ через xy обозначим скалярное произведение векторов.

Конечное подмножество W сферы $S^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$ называется τ -кодом, если $xy \leq \tau$ для всех $x, y \in W$, $x \neq y$. Представляет большой интерес вопрос отыскания при заданных d и τ кодов, содержащих наибольшее количество точек. При $\tau = 1/2$ это хорошо известная задача о контактном числе шаров, решение которой известно только при $d = 2, 3, 8, 24$ [1; с. 45]. В этой заметке будет рассматриваться $d = 4$, $\tau = \cos(\pi/5)$.

Через W_{120} будем обозначать множество вершин правильного многогранника в $\mathbb{R}^4$ с символом Шлефли $\{3, 3, 5\}$ [2; с. 494]. Его 120 вершин состоят из: 8 вершин вида $(\pm 1, 0, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0, 0)$, $(0, 0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, 0, \pm 1)$; 16 вершин вида $(\pm 1/2, \pm 1/2, \pm 1/2, \pm 1/2)$; и 96 вершин, полученных из 8 точек вида $(\pm(\sqrt{5} + 1)/4, \pm 1/2, \pm(\sqrt{5} - 1)/4, 0)$ четными перестановками координат. Множество скалярных произведений xy , $x, y \in W_{120}$, есть $\{-1, \cos(4\pi/5), \cos(2\pi/3), \cos(3\pi/5), 0, \cos(2\pi/5), \cos(\pi/3), \cos(\pi/5), 1\}$. Таким образом, W_{120} является $\cos(\pi/5)$ -кодом. Покажем, что он содержит максимальное количество точек, возможное для множества, являющегося таким кодом.

ТЕОРЕМА. Пусть $W = \{x^{(i)}\}_{i=1}^N \subset S^3$ — $\cos(\pi/5)$ -код с максимально возможным числом точек. Тогда $N = 120$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценку снизу дает приведенная конструкция W_{120} .

Для оценки сверху рассмотрим систему многочленов Гегенбауэра $\{P_\nu(t)\}_{\nu=0}^\infty$, ортогональную на интервале $(-1, 1)$, с весом $(1 - t^2)^{1/2}$ и с нормировкой $P_\nu(1) = 1$:

$$P_0(t) = 1, P_1(t) = t, \dots; (\nu + 2)P_{\nu+1}(t) = (2\nu + 2)tP_\nu(t) - \nu P_{\nu-1}(t).$$

В геометрических задачах, начиная с работы [3] Ф. Дельсарта, используется положительная определенность многочленов Гегенбауэра [1; с. 318]: для любого конечного множества точек $x^{(1)}, \dots, x^{(N)}$ из S^3 , любого $\nu \in \mathbb{N}$ и любых $p_k, p_l \in \mathbb{C}$ справедливо неравенство $\sum_{k,l=1}^N P_\nu(x^{(k)}x^{(l)})p_k\overline{p_l} \geq 0$. Получение оценки сверху будет проводиться по схеме Дельсарта, развивавшейся в работах [4]–[10], где она применялась для оценок плотности упаковок, контактных чисел и в некоторых других задачах, связанных с экстремальным расположением точек на сфере.

Для доказательства теоремы потребуется полином 17-й степени

$$h(t) = t^2(t+1)^2(t^2 - 1/4)^2(t^2 - (3 - \sqrt{5})/8)^2(t + (1 + \sqrt{5})/4)^2(t - (1 + \sqrt{5})/4) \\ \times (65536(232\sqrt{5} - 303)t^2 + 8192(3079 - 2990\sqrt{5})t + 2048(4255\sqrt{5} - 1777)).$$

В его разложении по многочленам Гегенбауэра $h(t) = \hat{h}_0 P_0(t) + \hat{h}_1 P_1(t) + \dots + \hat{h}_{17} P_{17}(t)$, все $\hat{h}_\nu$ неотрицательны и для полноты рассуждений приведены в конце доказательства.

В дальнейшем будут использоваться следующие свойства этого полинома:

- 1) $\hat{h}_0 > 0$, $\hat{h}_\nu \geq 0$ для $\nu = 1, 2, \dots, 17$;
- 2) $h(t) \leq 0$ при $t \in [-1, \cos(\pi/5)]$ (следует из вида полинома, так как $\cos(\pi/5) = (1 + \sqrt{5})/4$, а последний множитель не имеет действительных корней и положителен);
- 3) $h(1)/\hat{h}_0 = 120$.

Так как конструкция полинома существенно опирается на схему доказательства, приведем схему Дельсарта в том виде, который потребует для дальнейшего. Пусть на S^3 дан $\cos(\pi/5)$ -код $W = \{x^{(i)}\}_{i=1}^N$, состоящий из N точек. Используя первое отмеченное свойство полинома $h(t)$ и положительную определенность многочленов Гегенбауэра, имеем:

$$\sum_{k,l=1}^N h(x^{(k)}x^{(l)}) = \sum_{\nu=0}^\infty \hat{h}_\nu \sum_{k,l=1}^N P_\nu(x^{(k)}x^{(l)}) \geq \hat{h}_0 \sum_{k,l=1}^N 1 = N^2 \hat{h}_0.$$

Так как многочлен $h(t)$ неположителен на отрезке $[-1, \cos(\pi/5)]$, а $x^{(k)}x^{(l)} \leq \cos(\pi/5)$ для $x^{(k)}, x^{(l)} \in W$, то эту же сумму можно оценить с другой стороны:

$$\sum_{k,l=1}^N h(x^{(k)}x^{(l)}) = \sum_{k=1}^N h(x^{(k)}x^{(k)}) + \sum_{k,l=1, k \neq l}^N h(x^{(k)}x^{(l)}) \leq Nh(1).$$

Таким образом, $N \leq h(1)/\hat{h}_0$. Подставляя значения $h(1) = 505800$ и $\hat{h}_0 = 4215$, получаем требуемую оценку $N \leq 120$.

Значения коэффициентов Фурье полинома $h(t)$ по системе многочленов Гегенбауэра:

$$\begin{aligned} \hat{h}_0 &= 4215, & \hat{h}_1 &= 5(5941 + 319\sqrt{5})/2, & \hat{h}_2 &= 3(87653 + 1682\sqrt{5})/8, \\ \hat{h}_3 &= 49141 + 2581\sqrt{5}, & \hat{h}_4 &= 5(105709 + 3886\sqrt{5})/8, & \hat{h}_5 &= 74982 + 2697\sqrt{5}, \\ \hat{h}_6 &= 7(43854 + 551\sqrt{5})/4, & \hat{h}_7 &= 68652 - 928\sqrt{5}, & \hat{h}_8 &= 9(24747 - 1682\sqrt{5})/4, \\ \hat{h}_9 &= 5(15737 - 2233\sqrt{5})/2, & \hat{h}_{10} &= 11(7887 - 1682\sqrt{5})/4, & \hat{h}_{11} &= 165(73 - 29\sqrt{5}), \\ \hat{h}_{12} &= 0, & \hat{h}_{13} &= 0, & \hat{h}_{14} &= 15(-2267 + 1682\sqrt{5})/8, \\ \hat{h}_{15} &= -3388 + 3132\sqrt{5}, & \hat{h}_{16} &= 85(-11 + 116\sqrt{5})/8, & \hat{h}_{17} &= -2727 + 2088\sqrt{5}. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Полином $h(t)$ строился по угаданной экстремальной конструкции. Из схемы доказательства видно, что $h(t)$ может иметь отличными от нуля только те коэффициенты $\hat{h}_\nu$, для номеров ν которых $\sum_{x,y} P_\nu(xy) = 0$, где сумма берется по x, y из экстремальной конструкции. Построение функций, неположительных на заданном отрезке и имеющих неотрицательные коэффициенты Фурье по системе многочленов Гегенбауэра с заданными номерами, и со всеми остальными коэффициентами равными нулю, является интересной и до конца не решенной задачей.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Существует целое семейство экстремальных многочленов 17-го порядка, минимизирующих функционал $h(1)/\hat{h}_0$ и удовлетворяющих свойствам 1, 2. Все они получаются заменой у рассмотренного многочлена $h(t)$ квадратного трехчлена, не имеющего корней на отрезке $[-1, 1]$, стоящего последним сомножителем в определении $h(t)$, на множитель $at^2 + bt + c$, где $c = (19603456 - 7790592\sqrt{5} + (4425 - 135\sqrt{5})a)/4260$, $b = (1441792\sqrt{5} - 3571712 + (27\sqrt{5} - 1737)a)/852$, $65536(232\sqrt{5} - 303)/4215 \leq a \leq 16384(1297 - 273\sqrt{5})/2685$. Такие квадратные трехчлены также не имеют корней на $[-1, 1]$, и, следовательно, свойство 2 выполняется, а соответствующий выбор a, b и c обеспечивает выполнение первого и третьего свойств многочлена $h(t)$.

Автор выражает искреннюю благодарность В. А. Юдину, из обсуждений с которым возникла эта заметка, а также А. Г. Бабенко за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Конвей Дж., Слоэн Н. Упаковки шаров, решетки и группы. Т. 1. М.: Мир, 1990.
 [2] Берже М. Геометрия. Т. 1. М.: Мир, 1984. [3] Delsarte Ph. // Philips Res. Rep. 1972. V. 2. P. 272–289. [4] Delsarte P., Goethals J. M., Seidel J. J. // Geom. Dedicata. 1977. V. 6. P. 363–388. [5] Кабатянский Г. А., Левенштейн В. И. // Проблемы передачи информации. 1978. Т. 14. № 1. С. 3–25. [6] Odlyzko A. M., Sloane N. J. A. // J. Combin. Theory. Ser. A. 1979. V. 26. P. 210–214. [7] Левенштейн В. И. // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245. С. 1299–1303. [8] Сидельников В. М. // Проблемы передачи информации. 1980. Т. 16. № 3. С. 17–30. [9] Юдин В. А. // Дискр. матем. 1992. Т. 4. № 2. С. 115–121. [10] Арестов В. В., Бабенко А. Г. // Труды МИРАН. 1997. Т. 219. С. 44–73.

Московский государственный
 университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: andreev@mech.math.msu.su
Home page: <http://mech.math.msu.su/~andreev>

Принято редколлегией
 10.12.1998