Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Г. Авербух, Формализация понятия “система счисления”, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 1, 253–254

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm124>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 14:49:33

ФОРМАЛИЗАЦИЯ ПОНЯТИЯ “СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ”

Б. Г. АВЕРБУХ

Понятие системы счисления, известное ныне в частных случаях, определяется ниже для тополого-алгебраической системы с одной ассоциативной операцией.

1. Пусть $(\mathcal{G}, \cdot)$ – хаусдорфова топологическая n -полугруппа, $\mathcal{B}$ – ее подмножество, называемое ниже вычислительным базисом, и $\langle \mathcal{B} \rangle$ – его линейная оболочка. Обозначим через $\widehat{\mathcal{D}}_0$ множество конечных или бесконечных сходящихся в $\mathcal{G}$ произведений элементов из $\mathcal{B}$. Если такое произведение конечно, то число его сомножителей имеет вид $s_k = 1 + k(n - 1)$, где $k \in \mathbb{N}_0$. Каждому произведению $b_1 b_2 \cdots$ сопоставим последовательность из элементов $a_k = b_1 \cdots b_{s_k}$, называемую его последовательностью приближений; для конечного произведения такая последовательность считается бесконечной, но стационарной. Пусть, далее, $(\widehat{\mathcal{D}}, \circ)$ есть свободная n -полугруппа, построенная на множестве $\widehat{\mathcal{D}}_0$. Каждый элемент из $\widehat{\mathcal{D}}$, называемый ниже разложением, это упорядоченный набор из s_k , $k \in \mathbb{N}_0$, произведений указанного выше вида, называемых его компонентами, и ему соответствует упорядоченный набор их последовательностей приближений. Разложение называется конечным, если каждая его компонента является конечным произведением; всюду плотная под- n -полугруппа конечных разложений обозначается ниже через $\widehat{\mathcal{D}}_f$.

Каждому s_k -компонентному разложению B с последовательностями приближений компонент $\{a_{ir}\}$ и каждому набору $\{r_i\}$, где $i \in \overline{1, s_k}$, неотрицательных целых чисел соответствует произведение $\prod_i a_{ir_i}$. Получается сходящаяся в $\mathcal{G}$ направленность элементов из $\langle \mathcal{B} \rangle$, называемая направленностью приближений разложения B . Она индексирована направленным множеством $\mathbb{N}_0^{s_k}$, где порядок задается условием: $(r'_1, r'_2, \dots) \leq (r''_1, r''_2, \dots)$, если $r'_i \leq r''_i$ для всех i . Сопоставляя каждому разложению предел его направленности приближений, получаем гомоморфизм n -полугрупп $\widehat{\pi}: (\widehat{\mathcal{D}}, \circ) \rightarrow (\mathcal{G}, \cdot)$; при этом $\widehat{\pi}(\widehat{\mathcal{D}}_f) = \langle \mathcal{B} \rangle$. Образ $\widehat{\pi}(\widehat{\mathcal{D}})$ обозначим через $\mathcal{X}$.

2. На множестве $\widehat{\mathcal{D}}$ вводится топология. Сначала каждому конечному набору $V = \{\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_r\}$ открытых подмножеств из $\mathcal{G}$ сопоставляется подмножество $\widehat{V} \subset \widehat{\mathcal{D}}_0$. Однокомпонентное разложение B с последовательностью приближений $\{a_k\}$ и предельным элементом g принадлежит $\widehat{V}$, если $a_k \in \mathcal{V}_k$ при $k < r$, $a_k, g \in \mathcal{V}_r$ при $k \geq r$. Семейство $\{\widehat{V}\}$ образует базу топологии в $\widehat{\mathcal{D}}_0$. Она распространяется на множество $\widehat{\mathcal{D}}_k$ s_k -компонентных разложений как на произведение $(\widehat{\mathcal{D}}_0)^{s_k}$, а на $\widehat{\mathcal{D}}$ как на сумму $\bigoplus_r \widehat{\mathcal{D}}_r$. Если топология в $\mathcal{G}$ равномерна, то равномерна и эта топология в $\widehat{\mathcal{D}}$. Операция $\circ$ в $\widehat{\mathcal{D}}$ непрерывна, а если в $\mathcal{G}$ задана равномерная структура, то и равномерно непрерывна в соответствующей структуре на $\widehat{\mathcal{D}}$. Гомоморфизм $\widehat{\pi}$ непрерывен, а если $(\mathcal{G}, \cdot)$ – равномерно непрерывная n -полугруппа, то он равномерно непрерывен.

3. Следующий шаг состоит во введении эквивалентности $\sim_a$, названной алгебраической. В классических случаях она соответствует той неоднозначности, с которой конечные отрезки записи чисел преобразуются в разложения по вычислительному базису. Она определяется как транзитивное замыкание отношения, состоящего из пар разложений, чьи направленности приближений имеют общую конфинальную подпоследовательность. Отношение $\sim_a$ является конгруенцией в $(\widehat{\mathcal{D}}, \circ)$, и мы обозначим через $(\mathcal{D}, *)$ фактор- n -полугруппу $(\widehat{\mathcal{D}}, \circ) / \sim_a$.

ТЕОРЕМА 1. Если операция $\cdot$ в $\mathcal{G}$ коммутативна, то коммутативна и операция $*$ в $\mathcal{D}$.

4. Тонким моментом является введение топологии в $\mathcal{D}$. Она зависит от того, в качестве объекта какой категории рассматривается $\mathcal{G}$. Основными (но не единственными и не взаимоисключающими) являются, вероятно, следующие три случая: случай U), охватывающий абелевы топологические группы, когда n -полугруппа $(\mathcal{G}, \cdot)$ равномерно непрерывна; затем включающий неабелевы группы случай CR), когда она только непрерывна, но топология на $\mathcal{G}$ равномерна, и

общий случай, обозначаемый через T). В случае U) топология вводится как факторная в категории UNIF, в случае CR) – как факторная в категории COMPL.REG. и в случае T) – как факторная в категории TOP. Алгебраически эквивалентные разложения имеют равные предельные элементы, а для конечных разложений это условие также и достаточно для их алгебраической эквивалентности. Значит, определено отображение $\pi: \mathcal{D} \rightarrow X$, индуцированное отображением $\hat{\pi}$.

5. Пространства $\hat{\mathcal{D}}$ и $\mathcal{D}$, вообще говоря, не отделимы, поэтому вводится еще одно отношение эквивалентности $\sim_t$, названное топологическим. Оно отождествляет элементы из $\mathcal{D}$, каждый из которых лежит в любой окрестности другого. Это конгруенция, и топология в фактор- n -полугруппе $(\mathcal{D}', \times)$ вводится как факторная в соответствующей категории. Отображение π индуцирует гомоморфизм $\pi': (\mathcal{D}', \times) \rightarrow (\mathcal{X}, \cdot)$. В случае U) операции в $\mathcal{D}$ и в $\mathcal{D}'$ равномерно непрерывны, в двух других случаях они непрерывны по каждому аргументу. Отображения π и π' являются морфизмами категории, соответствующей рассматриваемому случаю, причем их ограничения на подпространства классов конечных разложений биективны.

Ключевым является следующий пример. Пусть $(\mathcal{G}, \cdot) = (R_+, +)$ и $\mathcal{B} = \{b_k\}$, где $b_0 = 1$ и $b_i/b_{i+1} \in \mathbb{N}$; этот случай рассмотрен в четвертой главе “Общей топологии” Н. Бурбаки. Тогда каждое разложение любого числа алгебраически эквивалентно одному из названных “употребительными” в русском переводе трактата. Классы “употребительных” разложений одного и того же элемента топологически эквивалентны (например, десятичные дроби с девяткой в периоде эквивалентны соответствующим конечным дробям), а отображение π' является изоморфизмом равномерно непрерывных полугрупп.

6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. $\mathcal{B}$ -системой счисления в $(\mathcal{G}, \cdot)$ называется всякое сечение отображения π , определенное на $\mathcal{X}$ и сопоставляющее каждому элементу из $\langle \mathcal{B} \rangle$ класс его конечных разложений.

Естественным требованием к системе счисления является ее непрерывность в случаях CR) и T) и равномерная непрерывность в случае U).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $(\mathcal{G}, \cdot)$ – абелева топологическая группа (случай U)), а вычислительный базис $\mathcal{B}$ замкнут относительно перехода к обратным элементам. Тогда всякая $\mathcal{B}$ -система счисления либо равномерно непрерывна, либо разрывна на каждом элементе из $\langle \mathcal{B} \rangle$.

Пусть теперь C – вполне регулярное пространство в случае CR) или равномерное в случае U), а $\lambda: \langle \mathcal{B} \rangle \rightarrow C$ – некоторое отображение. Мы назовем его продолжаемым до морфизма на $\hat{\mathcal{D}}$, если существует такой морфизм $\mu: \hat{\mathcal{D}} \rightarrow C$, что $\mu|_{\hat{\mathcal{D}}_f} = \lambda \circ \hat{\pi}|_{\hat{\mathcal{D}}_f}$.

ТЕОРЕМА 3. В случаях CR) и U) следующие утверждения эквивалентны:

- i) непрерывная в случае CR) или равномерно непрерывная в случае U) $\mathcal{B}$ -система счисления существует;
- ii) отображение π' является изоморфизмом топологических (соответственно, равномерно непрерывных) n -полугрупп;
- iii) для любого C такого, как выше, всякое продолжаемое до морфизма на $\hat{\mathcal{D}}$ отображение само является морфизмом и допускает непрерывное продолжение на $\mathcal{X}$.

Автор благодарит А. В. Михалева за внимание к этой работе.