Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Б. Бродский, О продолжении компактнозначных отображений, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 1, 251–252

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm125>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 07:25:20

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

О ПРОДОЛЖЕНИИ КОМПАКТНОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Н. Б. Бродский

В настоящей заметке решается задача продолжения полунепрерывного сверху UV^n -значного отображения в сепарабельное гильбертово пространство l_2 . Аналогичная задача продолжения для непрерывных UV^n -значных отображений решена в работе [1].

Графиком многозначного отображения $\Phi: X \rightarrow Y$ называется подмножество $\Gamma_\Phi = \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in \Phi(x)\}$ произведения $X \times Y$. Для произвольного множества $\mathcal{U} \subset X \times Y$ обозначим через $\mathcal{U}(x)$ подмножество $\text{pr}_Y(\mathcal{U} \cap (\{x\} \times Y))$ пространства Y (при этом не исключается случай $\mathcal{U}(x) = \emptyset$). Тогда для графика Γ_Φ отображения $\Phi: X \rightarrow Y$ имеем $\Gamma_\Phi(x) = \Phi(x)$.

Пара пространств (U, V) , в которой V содержится в U , называется n -связной, если любое отображение сферы размерности $\leq n$ в V гомотопну нулю в U . Метризуемый компакт K называется аппроксимативно n -связным (кратко, UV^n -компактом), если для любого вложения K в ANR-пространство всякая его окрестность U содержит такую его окрестность V , что пара (U, V) является n -связной. Будем называть UV^n -значным полунепрерывное сверху многозначное отображение, при котором образы точек являются UV^n -компактами.

ЛЕММА 1. Пусть на замкнутом пространстве A метрического пространства X задано UV^n -значное отображение $\Psi: A \rightarrow l_2$. Тогда для любой окрестности $\mathcal{U} \subset X \times l_2$ графика Γ_Ψ найдется такая окрестность $\mathcal{V}$ этого графика, что пара $(\mathcal{U}(x), \mathcal{V}(x))$ является n -связной для любого $x \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем для каждой точки $x \in A$ ее открытую окрестность $O_x \subset X$ и открытую окрестность $O_{\Psi(x)} \subset l_2$ множества $\Psi(x)$ так, что $O_x \times O_{\Psi(x)}$ содержится в $\mathcal{U}$. Аппроксимативная n -связность компакта $\Psi(x)$ позволяет найти окрестность $V_{\Psi(x)}$ множества $\Psi(x)$, для которой пара $(O_{\Psi(x)}, V_{\Psi(x)})$ будет n -связной. Пусть U_x — такая окрестность точки x , что $\Psi(U_x) \subset V_{\Psi(x)}$.

Впишем в открытое покрытие $\{U_x\}_{x \in X}$ множества $U = \bigcup_{x \in X} U_x$ локально конечное открытое покрытие $\{W_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ и сопоставим каждому W_λ некоторое множество $V_\lambda = V_{\Psi(x)}$ такое, что $W_\lambda \subset U_x$. Звездно впишем в $\{W_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ локально конечное открытое покрытие Ω множества U . Наконец, определим множество $\mathcal{V} \subset X \times l_2$, положив для каждого $x \in X$

$$\mathcal{V}(x) = \bigcap \{V_\lambda \mid \text{St}(x, \Omega) \subset W_\lambda\}.$$

Здесь через $\text{St}(x, \Omega)$ обозначена звезда точки x относительно покрытия Ω . Свойство n -связности пары $(\mathcal{U}(x), \mathcal{V}(x))$ очевидно. В силу локальной конечности Ω для любой точки $x \in U$ существует ее окрестность $\mathcal{O}_x$ такая, что для любого $x' \in \mathcal{O}_x$ выполняется $\text{St}(x, \Omega) \subset \text{St}(x', \Omega)$. Поэтому

для любого $x' \in \mathcal{O}_x$ выполнено включение $\mathcal{V}(x) \subset \mathcal{V}(x')$, откуда следует открытость множества $\mathcal{V}$.

ЛЕММА 2. Пусть на замкнутом подмножестве A метрического пространства X размерности $\dim X \leq n+1$ задано UV^n -значное отображение $\Psi: A \rightarrow l_2$. Тогда существует UV^n -значное отображение $\Psi': X \rightarrow l_2$, которое однозначно и непрерывно на множестве $X \setminus A$ и совпадает с Ψ при ограничении на A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь леммой 1, построим последовательность $\{\mathcal{U}_i\}_{i=1}^\infty$ открытых в произведении $X \times l_2$ окрестностей графика Γ_Ψ , для которой $\mathcal{U}_0 = X \times l_2$ и пара $(\mathcal{U}_i(x), \mathcal{U}_{i+1}(x))$ является n -связной для любых $x \in X$ и $i \geq 0$. Мы будем считать, что для любого $i \geq 1$ множество $\mathcal{U}_i$ содержится в $1/2^{i+1}$ -окрестности графика Γ_Ψ (произведение $X \times Y$ метрических пространств (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) рассматривается с метрикой $\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{\rho_X(x_1, x_2), \rho_Y(y_1, y_2)\}$).

Выберем последовательность $\{F_k\}_{k=n+1}^\infty$ замкнутых окрестностей множества A таких, что $F_k \subset \text{pr}_X(\mathcal{U}_k)$ и $F_{k+1} \subset \text{Int}(F_k)$ для любого $k \geq 1$. Определим многозначные отображения $\{\Phi_m: F_n \setminus A \rightarrow l_2\}_{m=0}^{n+1}$, положив $\Phi_m(x) = \mathcal{U}_{k-m}(x)$, если $x \in F_k \setminus F_{k+1}$. Применяя к этим отображениям селекционную теорему (теорему 1.1 из [2] или фильтрационную теорему селекции из [3]), мы получим непрерывную однозначную селекцию $f: F_{n+1} \setminus A \rightarrow l_2$ отображения Φ_{n+1} . Продолжим f до непрерывного однозначного отображения $f': X \setminus A \rightarrow l_2$. Доопределив Ψ отображением f' на множестве $X \setminus A$, мы получим искомое отображение Ψ' . Полунепрерывность сверху Ψ' в точках множества A следует из того, что график отображения f над множеством $F_k \setminus A$ содержится в $\mathcal{U}_{k-n-1}$ и, следовательно, в $1/2^{k-n}$ -окрестности графика Γ_Ψ .

ТЕОРЕМА 3. Пусть на замкнутом подмножестве A сепарабельного метрического пространства X задано UV^n -значное отображение $\Psi: A \rightarrow l_2$. Тогда существует UV^n -значное отображение $\Psi': X \rightarrow l_2$, ограничение которого на A совпадает с Ψ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f: Y \rightarrow X$ – непрерывное отображение сепарабельного метрического пространства Y размерности $\dim Y \leq n+1$, все слои которого являются UV^n -компактами [4]. Обозначим через A' множество $f^{-1}(A) \subset Y$. Лемма 2 позволяет продолжить UV^n -значное отображение $\Psi \circ f: A' \rightarrow l_2$ до UV^n -значного отображения $F: Y \rightarrow l_2$, которое однозначно и непрерывно на $Y \setminus A'$. Рассмотрим положительную непрерывную функцию $\beta(y) = \text{dist}(f(y), A)$ на множестве $Y \setminus A'$. Предложения 4.7 и 4.8 из работы [1] позволяют изменить отображение F на множестве $Y \setminus A'$ таким образом, чтобы новое отображение $F': Y \rightarrow l_2$ являлось вложением на каждом слое $f^{-1}(x)$ при $x \in X \setminus A$ и удовлетворяло соотношению $\text{dist}(F(y), F'(y)) < \beta(y)$ для любого $y \in Y \setminus A'$. Последнее соотношение легко влечет полунепрерывность сверху отображения F' . Определим искомое отображение Ψ' равенством $\Psi'(x) = F' \circ f^{-1}(x)$ для любого $x \in X \setminus A$. Поскольку F' является вложением на слое $f^{-1}(x)$ для $x \in X \setminus A$, то $\Psi'(x)$ гомеоморфно $f^{-1}(x)$ и является UV^n -компактом. Полунепрерывность сверху Ψ' легко следует из полунепрерывности сверху и компактнозначности отображений f^{-1} и F' .

Автор выражает глубокую благодарность Е.В. Шепину за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ageev S. M., Repovš D., Ščepin E. V. The extension problem for complete UV^n -preimages // Preprint. [2] Bielawski R. // Fund. Math. 1989. V. 133. P. 97–100. [3] Шепин Е. В., Бродский Н. Б. // Труды МИАН. 1996. Т. 212. С. 220–240. [4] Дранишников А. Н. // УМН. 1984. Т. 39. № 5. С. 55–96.

Принято редколлегией
14.11.1998