Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. П. Новиков, А. С. Шварц, Дискретные лагранжевы системы на графах.
Симплекто-топологические свойства, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 1, 257–258

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm126>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 11:51:25

ДИСКРЕТНЫЕ ЛАГРАНЖЕВЫ СИСТЕМЫ НА ГРАФАХ. СИМПЛЕКТО-ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА

С. П. Новиков, А. С. Шварц

Данная работа развивает [1]–[3], где конструкция Симплектического “Вронскиана” была развита для линейных систем на графах и применялась в теории рассеяния для графов с хвостами.

Рассмотрим одномерный симплициальный комплекс Γ (граф), без концов и локально конечный, т.е. в любой вершине $P \in \Gamma$ сходится лишь конечное число ребер T_k . Зададим в каждой вершине P гладкое многообразие N_P с локальными координатами x_P . Пусть задано семейство S конечных подмножеств α вершин графа Γ . Вершины далее занумерованы индексом j , $P \rightarrow j(P)$.

Пусть задан также набор гладких функций $\Lambda^\alpha: N_{j_1} \times \dots \times N_{j_{|\alpha|}} \rightarrow \mathbb{R}$, от всех вершин подмножества $\alpha \in S$. Рассмотрим функции $\psi(P) = x_P$, сопоставляющие вершине $P \in \Gamma$ точку многообразия N_P ; для них определен “Лагранжиан” и “Уравнение Эйлера–Лагранжа”:

$$(1) \quad L\{\psi\} = \sum_{\alpha \in S} \Lambda^\alpha(x_{j_1}, \dots, x_{j_{|\alpha|}}), \quad \frac{\partial L}{\partial x_P} = 0, \quad P \in \Gamma.$$

Дискретные лагранжевы системы изучали Обри и Веселов (см. [4]), где $\Gamma = \mathbb{Z}$ (дискретизированная прямая), и все Λ^α , N_P одинаковы: $\Lambda^\alpha = \Lambda$, $N_P = N$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Мы назовем лагранжиан (1) *локальным*, если диаметр всех множеств $\alpha \in S$ конечен и ограничен сверху единой константой $d(\alpha) < M$ в естественной геодезической метрике графа, где длина каждого ребра равна единице.

ЛЕММА 1. Для каждого множества $\alpha \in S$ можно построить односвязный подграф $\Gamma_\alpha \subset \Gamma$ (дерево) диаметра не более чем M , содержащий все вершины множества $\alpha \in S$.

Доказательство леммы несложно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Мы назовем лагранжиан (1) “древеснопредставленным”, если каждое множество α есть множество вершин дерева Γ_α диаметра не более чем M .

ЛЕММА 2. Каждая локальная лагранжева задача может быть записана как древесно представленная.

Для каждой пары вершин $P, Q \in \alpha$ с индексами (j, k) , соответственно, мы обозначим через l_{jk}^α единственный минимальный путь из P в Q , лежащий в дереве $\Gamma_\alpha \ni l_{jk}^\alpha$, $\partial[l_{jk}^\alpha] = Q - P$.

Определим 2-форму Ω на бесконечном прямом произведении $N^\infty = \prod_{P \in \Gamma} N_P$ с локальными координатами $(\bigcup_j x_j)$:

$$(2) \quad \Omega = \sum_{\substack{\alpha \in S \\ P, Q \in \alpha}} \frac{\partial^2 \Lambda^\alpha}{\partial x_j \partial x_k} [l_{jk}^\alpha] dx_j \wedge dx_k = \sum_{\alpha} \Omega^\alpha,$$

где j, k – индексы, отвечающие вершинам $P, Q \in S$, $[l_{jk}^\alpha]$ – одномерная цепь в дереве Γ_α , указанная выше.

Мы рассматриваем только локальные древесно представленные вариационные задачи.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00166).

ТЕОРЕМА. 1) Форма Ω корректно определена, т.е. каждому ребру $T \subset \Gamma$ отвечает обычная конечномерная 2-форма, зависящая от конечного числа переменных x_j ;
 2) Эта форма замкнута: $d\Omega = 0$;
 3) На подмногообразии решений уравнения Эйлера–Лагранжа $\delta L = 0$, форма Ω принимает значения в группе открытых циклов $H_1^{\text{open}}(\Gamma; \mathbb{R})$ графа Γ , т.е. $\partial\Omega = 0$ в группе 1-цепей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО пункта 1) очевидно из построения. Для доказательства утверждения 2) следует использовать факт, что каждое Γ_α – это дерево. Здесь нужно подсчитать вклад в $d\Omega^\alpha$ для любого заданного ребра $T \subset \Gamma_\alpha$. Заметим, что уравнение Эйлера–Лагранжа на этом этапе не используется. Для доказательства утверждения 3) мы должны рассмотреть $\partial\Omega$, где граница берется в группе 1-цепей.

Зафиксируем вершину P с номером j и рассмотрим границу (k -номера точек $Q \in \alpha$):

$$\partial\Omega|_P = \sum_{\alpha} \sum_k \frac{\partial^2 \Lambda^\alpha}{\partial x_j \partial x_k} dx_j \wedge dx_k = \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{\alpha} \frac{\partial \Lambda^\alpha}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_k.$$

Из уравнений Эйлера–Лагранжа мы имеем:

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial \Lambda^\alpha}{\partial x_j} dx_j = dx_j \left(\sum_{\alpha} \Lambda^\alpha \right) = 0.$$

Теорема доказана.

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ. 1. Пусть $\Gamma = \mathbb{Z}$. В этом случае можно проверить, что формула (2) совпадает с симплектической структурой, введенной Веселовым в [4], хотя это не сразу очевидно. Здесь $H_1^{\text{open}}(\mathbb{R}; \mathbb{R}) = \mathbb{R}$ и форма Ω числовая.

2. Пусть лагранжева задача (1) задается парным взаимодействием, т.е. Λ^α зависит лишь от пар точек $\Lambda^\alpha(P, Q)$, $d(P, Q) < M$. Древесное представление задается выбором минимального пути l_{PQ} , соединяющего две взаимодействующие точки, $\Gamma_\alpha = l_{PQ}$. В этом случае пункт 2) теоремы очевиден, так как все третьи производные по переменным трех разных точек тождественно равны нулю.

ЗАДАЧА. Исследовать 2-форму $\Omega/\delta L = 0$, заданную в виде ряда (2), для нелокальных парных взаимодействий, убывающих с расстоянием, особенно для $\Gamma = \mathbb{Z}^n$ или для Γ – однородного дерева? Для $\Gamma = \mathbb{Z}^n$ сходимость ряда может зависеть от древесного представления, которое неединственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Новиков С. П. // УМН. 1997. Т. 52. №6. С. 177–178. [2] Novikov S. // Arnoldfest, Additional Volume, Fields Institute, Toronto (to appear in the additional volume dedicated to the 60th birthday of V. Arnold). [3] Novikov S. // Asian J. Math. (to appear in the special volume dedicated to the 70th birthday of Mikio Sato). [4] Веселов А. // УМН. 1991. Т. 46. №6. С. 3–45.