Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Пухликов, Бирационально жесткие многообразия с пучком гиперповерхностей Фано, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 1, 261–262

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm127>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 16:26:51

БИРАЦИОНАЛЬНО ЖЕСТКИЕ МНОГООБРАЗИЯ С ПУЧКОМ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ ФАНО

А. В. Пухликов

1. Мы доказываем бирациональную жесткость общих Фано-расслоений $\pi: V \rightarrow \mathbb{P}^1$, каждый слой которых есть гиперповерхность $W_M \subset \mathbb{P}^M$ степени $M \geq 5$. Для $M = 3, 4$ этот факт был установлен в [1]. Доказательство проводится методом максимальных особенностей, начало которому положила работа В. А. Исковских и Ю. И. Манина [2], с использованием новых идей, введенных в [1], [3]. Основной результат настоящей статьи может рассматриваться как частный случай общего принципа: если Фано-расслоение $\pi: V \rightarrow S$ “достаточно закручено” по базе, то бирациональная геометрия многообразия V сводится к бирациональной геометрии общего слоя F_η – многообразия Фано над незамкнутым полем $\mathbb{C}(S)$. Возможно более полная реализация этого принципа определяет одно из основных направлений в современной бирациональной геометрии.

2. Опишем явную конструкцию многообразий с пучком гиперповерхностей Фано. Пусть $\mathcal{E}$ – локально-свободный пучок ранга $M + 1$ на проективной прямой $\mathbb{P}^1$, $\mathcal{E} = \bigoplus_{i=0}^M \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)$, $a_0 = 0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_M$, $X = \mathbb{P}(\mathcal{E})$ – соответствующее проективное расслоение. Символом $\mathbb{P}$ будем обозначать проективное пространство $\mathbb{P}^M$ – слой канонической проекции $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$. Пусть $L \in \text{Pic } X$ – класс тавтологического пучка и $G \in \text{Pic } X$ – класс слоя $\cong \mathbb{P}$. Для произвольного $m \in \mathbb{Z}$ определим семейство $\mathcal{V}(m)$ подмногообразий коразмерности 1 в X как подмножество линейной системы $|ML + mG|$, состоящее из гладких дивизоров. Здесь параметр m определяет “степень закрученности” Фано-расслоения $V \in \mathcal{V}(m)$ над базой $\mathbb{P}^1$. Проекцию V на $\mathbb{P}^1$ обозначим тем же символом π . Общий слой F_η Фано-расслоения $\pi: V \rightarrow \mathbb{P}^1$ – гиперповерхность Фано индекса 1 в $\mathbb{P}_{\mathbb{C}(t)}^M$, где t – линейный параметр на прямой. При $m \geq 1$ по теореме Лефшеца $\text{Pic } V = \text{Pic } X|_V$, так что $\text{Pic } V = \mathbb{Z}K_V \oplus \mathbb{Z}F$, где $F = G|_V$ – класс слоя. Конкретный слой $\pi^{-1}(t)$ над точкой $t \in \mathbb{P}^1$ будет обозначаться символом F_t .

Очевидно, $K_V = -L_V + (a_1 + \dots + a_M - 2 + m)F$, так что чем больше m , тем “меньше” антиканоническая линейная система $|-K_V|$.

3. Теперь введем точные условия “закрученности” V по базе и одно необходимое нам условие общности положения. Пусть $g \in A^2(V)$ – класс гиперплоского сечения слоя $F_t \subset \mathbb{P}$. Фано-расслоение $\pi: V \rightarrow \mathbb{P}^1$ удовлетворяет K^2 -условию, если численный класс циклов коразмерности 2 на V $NK_V^2 - g$ не является эффективным для любого $N \in \mathbb{Z}$. Поскольку линейная система $|L_V|$ свободна, K^2 -условие выполнено для V , если справедливо неравенство $(K_V^2 \cdot L_V^{M-2}) \leq 0$. Последний индекс пересечения, как нетрудно подсчитать, равен $M(4 - a_1 - \dots - a_M) - m(2M - 1)$. Поэтому неравенство $m \geq \frac{M}{2M-1}(4 - \sum_{i=1}^M a_i)$ гарантирует выполнение K^2 -условия.

Рассмотрим произвольную гиперповерхность $W \subset \mathbb{P}$ степени M . Пусть $p \in W$, $z_* = (z_1, \dots, z_M)$ – система линейных координат на $\mathbb{P}$ с центром в точке p , $q = q_1 + q_2 + \dots + q_M$ – уравнение гиперповерхности W относительно координат z_* , разложенное на однородные компоненты q_i степени i .

Точка $p \in W$ называется *регулярной неособой точкой* гиперповерхности W , если последовательность $(q_1, \dots, q_{M-1})$ регулярна. Точка p называется *регулярной особой точкой* гиперповерхности W , если $q_1 \equiv 0$, последовательность $(q_2, \dots, q_M)$ регулярна, квадрика $q_2 = 0$ в $\mathbb{P}^{M-1} = T_p \mathbb{P}$ неособа и, более того, система уравнений $q_2 = \dots = q_M = 0$ определяет в $\mathbb{P}^{M-1} = T_p \mathbb{P}$ конечное множество, состоящее из ровно $M!$ различных точек, любые M из которых линейно независимы.

Фано-расслоение $\pi: V \rightarrow \mathbb{P}^1$ назовем *регулярным*, если любой его слой F_t – $\mathbb{Q}$ -факториальное многообразие (при этом группа классов дивизоров Вейля, тензорно умноженная на $\mathbb{Q}$, изоморфна $\mathbb{Z}$ и порождена гиперплоским сечением $F_t \subset \mathbb{P}$), любая точка которого $p \in F_t$ регулярна.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-15-96013).

Можно показать, что достаточно общее многообразие V есть регулярное Фано-расслоение.

Определение *бirationальной (сверх) жесткости* и другие необходимые определения см. в [1], [3].

Основной результат настоящей работы –

ТЕОРЕМА. Пусть $\pi: V \rightarrow \mathbb{P}^1$ – Фано-расслоение, построенное выше. Предположим, что оно регулярно и удовлетворяет K^2 -условию. Тогда оно бирационально сверхжесткое.

Следствия. (i) Любое бирациональное отображение $\chi: V \dashrightarrow W$ на Фано-расслоение $\rho: W \rightarrow S$ является послойным, т.е. $S = \mathbb{P}^1$ или точка, и в первом случае существует изоморфизм $\alpha: \mathbb{P}^1 \rightarrow S$ такой, что $\alpha \circ \pi = \rho \circ \chi$. (ii) Группа бирациональных автоморфизмов многообразия V совпадает с группой его бирегулярных автоморфизмов: $\text{Bir } V = \text{Aut } V$. Для общего члена семейства $\mathcal{V}(m)$ эта группа тривиальна. (iii) Многообразие V не рационально.

4. Опишем теперь схему доказательства теоремы. Зафиксируем $\chi: V \dashrightarrow W$, где $\rho: W \rightarrow S$ – Фано-расслоение, и предположим, что для некоторой подвижной системы $|D'|$ на W условие монотонности для порогов канонического присоединения не выполнено: $n = c(D, V) > c(D', W) \geq 0$. Наша цель – привести это предположение к противоречию. Линейная система $|\chi| = |D|$, $D \sim -nK_V + lF$, $l \geq 0$, не имеет неподвижных компонент. Напомним, что геометрическое дискретное нормирование $\nu \in \mathcal{N}(V)$ называется *максимальной особенностью*, если оно удовлетворяет *неравенству Нетера–Фано (–Манина–Исковских)* $e(\nu) = \nu(|\chi|) - na(\nu, V) > 0$, где $a(\cdot)$ – дискрепантность нормирования относительно заданной модели. Пусть $D_i \in |\chi|$ – общие дивизоры, $Z = (D_1 \bullet D_2)$ – алгебраический цикл их теоретико-схемного пересечения, $Z = Z^v + Z^h$ – его разложение на вертикальную (т.е. содержащуюся в слоях) и горизонтальную (т.е. накрывающую базу $\mathbb{P}^1$) компоненты, соответственно. Для Z^v имеем дальнейшее разложение $Z^v = \sum_{t \in \mathbb{P}^1} Z_t^v$, $\text{Supp } Z_t^v \subset F_t$. Можно показать [1], что существует максимальная особенность $\nu \in \mathcal{M}$, центр которой лежит в слое, $\text{centre}(\nu) \subset F = F_t$, такая, что $e = e(\nu) > \frac{\nu(F)}{2Mn} \deg Z_t^v$. Мы назовем ее *сверхмаксимальной* [1] и зафиксируем.

5. Главная часть доказательства – исключение сверхмаксимальной особенности. Это делается с помощью *техники подсчета кратностей* в форме [1], которая восходит к технике *пробного класса* В. А. Исковских и Ю. И. Манина [2]. Самый трудный случай – когда центр сверхмаксимальной особенности есть особая точка $p \in F$ слоя. Здесь противоречие достигается с помощью следующего ключевого факта. Пусть $\sigma: \tilde{F} \rightarrow F$ – раздутие особенности p , $E \subset \tilde{F}$ – исключительный дивизор (неособая квадрика), $x \in E$ – некоторая точка. Пусть $Y \subset F$ – простой дивизор Вейля, $\tilde{Y} \subset \tilde{F}$ – его собственный прообраз. Тогда

$$\frac{\text{mult}_x \tilde{Y}}{\deg Y} \leq \frac{2}{M}.$$

Предположение о существовании максимальной особенности приводит к противоречию. Значит, условие монотонности для порогов канонического присоединения выполнено, а это и означает бирациональную сверхжесткость. Полный текст доказательства см. в [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Пухликов А. В. // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. №1. С. 123–164. [2] Исковских В. А., Манин Ю. И. // Матем. сб. 1971. Т. 86. №1. С. 140–166. [3] Pukhlikov A. V. // Invent. Math. 1998. V. 134. №2. P. 401–426. [4] Pukhlikov A. V. Birationally rigid Fano fibrations // MPI-Preprint 1998-113.