Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Д. Пустыльников, Об одном свойстве классической дзета-функции, связанном с гипотезой Римана о нулях, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 1, 259–260

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm128>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 13:55:17

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ КЛАССИЧЕСКОЙ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ, СВЯЗАННОМ С ГИПОТЕЗОЙ РИМАНА О НУЛЯХ

Л. Д. ПУСТЫЛЬНИКОВ

В настоящей работе обнаружено представляющееся важным в связи с гипотезой Римана о нулях (теорема 2) свойство хорошо известной функции $\xi(s)$, полученной из дзета-функции Римана $\zeta(s)$ с помощью равенства $\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)$, где $\Gamma(s)$ – гамма функция Эйлера. А именно, здесь доказана следующая

ТЕОРЕМА 1. *Все четные производные функции $\xi(s)$ в точке $s = \frac{1}{2}$ строго положительные.*

ЗАМЕЧАНИЕ. В силу равенства $\xi(s) = \xi(1-s)$ все нечетные производные функции $\xi(s)$ в точке $s = \frac{1}{2}$ равны нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 1.

ЛЕММА. Пусть n – произвольное натуральное число. Тогда при любом натуральном $r \geq 3$ выполнено неравенство

$$\int_1^\infty (16r(r-1) \ln^{r-2} x - \ln^r x) x^{-\frac{3}{4}} e^{-\pi n^2 x} dx > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем числа $x_r = e^{4\sqrt{r(r-1)}}$, $\tilde{x}_r = \sqrt{x_r}$, $x_r^* = e^r$ и докажем, что

$$(1) \quad 12r(r-1) \int_{x_{r-2}^*}^{\tilde{x}_r} (\ln^{r-2} x) x^{-\frac{3}{4}} e^{-\pi n^2 x} dx > \int_{\tilde{x}_r}^\infty (\ln^r x) x^{-\frac{3}{4}} e^{-\pi n^2 x} dx.$$

В области $x \geq 1$ функция $\frac{\ln x}{x^{1/r}}$ имеет единственный экстремум в точке $x = x_r^*$, являющийся максимумом, и поэтому в силу неравенства $\tilde{x}_r > x_r^*$ при $x \geq \tilde{x}_r$ справедливо неравенство $\ln^r x < \frac{\ln^r \tilde{x}_r}{e^{\tilde{x}_r}} e^x$, из которого получаем неравенство

$$(2) \quad x^{-\frac{3}{4}} e^{-\pi n^2 x} \ln^r x \leq A(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\ln^r \tilde{x}_r}{e^{\tilde{x}_r} \tilde{x}_r^{\frac{3}{4}}} e^{-(\pi n^2 - 1)x} \quad (x \geq \tilde{x}_r).$$

Точно также в области $x_{r-2}^* \leq x \leq \tilde{x}_r$ справедливо неравенство

$$(3) \quad x^{-\frac{3}{4}} e^{-\pi n^2 x} \ln^{r-2} x \geq B(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\ln^{r-2} \tilde{x}_r}{e^{\tilde{x}_r} \tilde{x}_r^{\frac{3}{4}}} e^{-(\pi n^2 - 1)x}.$$

Далее, в силу определений $\tilde{x}_r$ и x_r^* получаем:

$$(4) \quad \frac{3}{4} \int_{x_{r-2}^*}^{\tilde{x}_r} e^{-(\pi n^2 - 1)x} dx > \int_{\tilde{x}_r}^\infty e^{-(\pi n^2 - 1)x} dx.$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-01-00268).

Поэтому согласно определению чисел x_r , $\tilde{x}_r$ и соотношению $\frac{A(x)}{B(x)} = \ln^2 \tilde{x}_r < 16r(r-1)$ из (2), (3) и (4) следует неравенство (1). Заметим теперь, что в области $x_{r-2}^* \leq x \leq \tilde{x}_r$ справедливо неравенство $\ln^2 x \leq 4r(r-1)$, и поэтому

$$\begin{aligned} & 16r(r-1) \int_{x_{r-2}^*}^{\tilde{x}_r} (\ln^{r-2} x) x^{-\frac{3}{4}} e^{-\pi n^2 x} - \int_{x_{r-2}^*}^{\tilde{x}_r} (\ln^r x) x^{-\frac{3}{4}} e^{-\pi n^2 x} dx \\ & \geq 12r(r-1) \int_{x_{r-2}^*}^{\tilde{x}_r} (\ln^{r-2} x) x^{-\frac{3}{4}} e^{-\pi n^2 x} dx. \end{aligned}$$

Из этого неравенства и неравенства (1) очевидным образом следует лемма.

Введем функцию $\omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}$ и, используя интегральное представление для функции $\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$ (см. [1], [2]), получим для любого четного $r \geq 4$ равенство

$$\frac{d^r \xi}{ds^r} \left(\frac{1}{2} \right) = 2^{-(r+2)} \int_1^{\infty} (16r(r-1) \ln^{r-2} x - \ln^r x) x^{-\frac{3}{4}} \omega(x) dx.$$

Из этого равенства и леммы при $r \neq 2$ очевидно следует утверждение теоремы 1. Что же касается второй производной функции $\xi(s)$ в точке $s = \frac{1}{2}$, то непосредственная проверка показывает, что она положительная и приближенно равна величине 0,02997. Теорема 1 доказана.

ТЕОРЕМА 2. Если хотя бы одна четная производная функции $\xi(s)$ в точке $s = \frac{1}{2}$ была бы не положительная, то гипотеза Римана о нулях функции $\zeta(s)$ была бы неверна: в этом случае существует комплексный нуль функции $\zeta(s)$, не лежащий на прямой $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию $\Xi(t) = \xi\left(\frac{1}{2} + it\right)$ комплексного переменного t , где i — мнимая единица. Известно [3], что $\Xi(t)$ — четная целая функция первого порядка, принимающая вещественные значения при вещественных значениях t , и любой невещественный нуль z функции $\zeta(s)$ имеет вид $z = \frac{1}{2} + i\rho$, где ρ — любой нуль функции $\Xi(t)$. Поэтому из формулы Вейерштрасса для целых функций [1], [2] следует, что функцию $\Xi(t)$ можно представить в виде

$$(5) \quad \Xi(t) = e^{a+bt} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t}{\rho_n}\right) e^{\frac{t}{\rho_n}},$$

где a и b — константы, а числа ρ_n ($n = 1, 2, \dots$) пробегает все нули функции $\Xi(t)$. Так как для каждого нуля ρ_n среди нулей функции $\Xi(t)$ содержится нуль $-\rho_n$, то, предполагая, что гипотеза Римана верна, в силу (5) и четности $\Xi(t)$ имеем равенство

$$(6) \quad \Xi(t) = e^a \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t}{\tilde{\rho}_n^2}\right),$$

где произведение распространено на все положительные нули $\tilde{\rho}_n$ функции $\Xi(t)$. Если теперь разложить функцию (6) в ряд Тейлора $\Xi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{2k}$ в точке $t = 0$, то из равенства (6) будет следовать, что при всех k соседние коэффициенты c_k и c_{k+1} имеют противоположные знаки, а это согласно определению $\Xi(t)$ означает, что все четные производные функции $\xi(s)$ в точке $s = \frac{1}{2}$ имеют тот же знак, что и величина $\xi\left(\frac{1}{2}\right)$. Поэтому утверждение теоремы 2 вытекает из неравенства $\xi\left(\frac{1}{2}\right) > 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Karatsuba A. A., Voronin S. M. The Riemann Zeta-Function. Berlin: de Gruyter, 1992. [2] Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1975. [3] Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана. М.: ИЛ, 1953.