Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Рышков, Прямое геометрическое описание n -мерных параллелоэдров второго типа Вороного, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 1, 263–264

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm129>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 12:19:40

ПРЯМОЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ n -МЕРНЫХ ПАРАЛЛЕЛОЭДРОВ ВТОРОГО ТИПА ВОРОНОГО

С. С. Рышков

0°. В заметке [1] изучались n -мерные параллелепипеды. В ней, в частности, исследование всех примитивных n -мерных параллелепипедов было сведено к исследованию параллелепипедов нового класса: “коренных параллелепипедов”, были приведены примеры таких параллелепипедов, дано прямое геометрическое описание произвольного n -мерного параллелепипеда первого типа Вороного, а также всех четырехмерных параллелепипедов.

Была анонсирована теорема 1:

Для чисел $n_1 = 1, n_2 = 4, n_3 = 5, \dots, n_k = k + 2, \dots$ в евклидовых пространствах $\mathbb{E}^{n_k}$ определены, вообще говоря, не примитивные параллелепипеды (которые названы коренными), удовлетворяющие следующим условиям:

1) при каждом натуральном n для любого n -мерного примитивного параллелепипеда $\mathcal{P} \subset \mathbb{E}^n$ найдется не менее чем $n(n+1)/2$ коренных параллелепипедов $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_\sigma$, имеющих размерность, не превосходящую n , и расположенных в $\mathbb{E}^n$ таким образом, что

$$(*) \quad \mathcal{P} = \lambda_1 \mathcal{P}_1 \oplus \lambda_2 \mathcal{P}_2 \oplus \dots \oplus \lambda_\sigma \mathcal{P}_\sigma,$$

где через $\oplus$ обозначено векторное сложение (суммирование по Минковскому), а $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\sigma$ — положительные числа;

2) каждый n -мерный примитивный параллелепипед $\mathcal{P}' \subset \mathbb{E}^n$ того же типа, что и $\mathcal{P}$ представим (с точностью до движения параллелепипеда $\mathcal{P}'$ в пространстве $\mathbb{E}^n$ и аффинного преобразования всего пространства $\mathbb{E}^n$) в виде суммы $(*)$, но, быть может, с другим набором чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\sigma$.

1°. В предлагаемой заметке для каждого $n \geq 4$ приводится (3°) в качестве еще одного примера n -мерного коренного параллелепипеда некоторый многогранник $\overline{M}_n$.

На основе многогранника $\overline{M}_n$ дается (4°) простое геометрическое описание (при любом $n \geq 4$) произвольного параллелепипеда второго типа Вороного.

Обсуждается (5°) вопрос о “толщине” области Вороного–Дирихле в данном направлении.

Ставится ряд задач (6°) различного характера и, по-видимому, различной трудности.

2°. Обозначим через $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{E}^n$ некоторый куб. Дуальный к нему многогранник, т.е. выпуклое замыкание $\mathbb{O}^n$ совокупности центров всех $(n-1)$ -мерных граней куба $\mathbb{Q}^n$, мы называем n -мерным правильным ортаэдром. (Очевидным способом определяются аффинный и комбинаторный ортаэдр.) Общий центр многогранников $\mathbb{Q}^n$ и $\mathbb{O}^n$ обозначим через C .

В каждом n -мерном ортаэдре естественно выделяются n пар взаимно противоположных вершин. В правильном и аффинном ортаэдре каждой такой паре отвечает $(n-1)$ -мерный диаметральный ортаэдр — выпуклая оболочка всех вершин n -мерного ортаэдра, кроме вершин из этой пары.

Пусть ортаэдр $\mathbb{Q}^n$ имеет центр в начале координат, а его вершины лежат в точках $\pm e_i$. Тогда каждому вектору $\pm(e_i \pm e_j)$ естественно ставится в соответствие пара ребер ортаэдра $\mathbb{Q}^n$, взятых без направления. Рассмотрим набор всех векторов вида $e_i \pm e_j$, где $i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j$, и множество $\mathcal{D}$ всех отвечающих этому набору ребер ортаэдра $\mathbb{Q}^n$.

Назовем антисимплициальным подграфом реберного графа (1-мерного скелета) правильного ортаэдра $\mathbb{Q}^n$ любой такой его подграф, который получается из множества $\mathcal{D}$ произвольным совмещением ортаэдра $\mathbb{Q}^n$ с собой.

3°. Рассмотрим вторую совершенную форму (т.е. форму V_n по Коркину и Золотареву [2], $\phi_1^{(n)}$ по Вороному [3], или D_n по Коксетеру [4]). Обозначим через $\overline{M}_n$ область Вороного–Дирихле решетки Γ , соответствующей форме, взаимной к V_n . Как область Вороного–Дирихле решетки, многогранник $\overline{M}_n$ есть параллелепипед.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00166).

ЛЕММА 1. *С точностью до движения и подобия многогранник $\overline{M}_n$ совпадает с многогранником $\mathbb{Q}^n \cap \mu\mathbb{O}^n$, где $\mu\mathbb{O}^n$ – многогранник гомотетичный ортаэдру $\mathbb{O}^n$ с коэффициентом гомотетии $\mu = n/2$ и центром гомотетии в точке C .*
(Лемма доказывается конструктивно с использованием геометрической структуры решетки Γ .)

4°. Пусть теперь L – произвольный антисимплициальный подграф реберного графа произвольного диаметрального ортаэдра исходного ортаэдра $\mathbb{O}^n$ (имеющий $(n-1)(n-2)$ ребер).

Обозначим через R_n любое такое подмножество ребер реберного графа ортаэдра $\mathbb{O}^n$, которое не содержит ребер из L , а из каждых двух параллельных ребер ортаэдра $\mathbb{O}^n$, разумеется, не лежащих в L , содержит только одно.

В нижеследующей теореме под словами “параллелоэдр второго типа” понимается быть может и вырожденная область Вороного–Дирихле решетки второго типа.

ТЕОРЕМА 1. *Для любого $n \geq 4$ многогранник $\overline{M}_n$ является коренным параллелоэдром.*

Каждый n -мерный параллелоэдр $\mathcal{P} \subset \mathbb{E}^n$ второго типа представим (с точностью до движения параллелоэдра $\mathcal{P}$ в пространстве $\mathbb{E}^n$ и аффинного преобразования всего пространства $\mathbb{E}^n$) в виде суммы $()$, где $\mathcal{P}_1 = \overline{M}_n$, а $\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \dots, \mathcal{P}_\sigma$ – ребра графа R_n . (В случае вырожденного параллелоэдра некоторые из чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\sigma$ равны нулю.)*

Обратим внимание, что многогранники M_4 , см. [1], и $\overline{M}_4$ с точностью до движения и подобия совпадают между собой и являются правильными 24-гранниками в пространстве $\mathbb{E}^4$.

5°. Пусть $\mathbb{P} \subset \mathbb{E}^n$ – замкнутое выпуклое тело и $\mathbb{E}^k \subset \mathbb{E}^n$, где $0 < k < n$, фиксированная плоскость. Говорят [5], что тело $\mathbb{P}$ имеет ненулевую толщину в направлении $\mathbb{E}^k$, если его пересечение с произвольной плоскостью $\mathbb{E}_1^k$, параллельной плоскости $\mathbb{E}^k$, либо пусто, либо k -мерно.

Следующая теорема достаточно очевидна, кроме того она срззу вытекает из теоремы 2 работы Б. А. Венкова [5], а также из исследований работы [1].

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы параллелоэдр $\mathcal{P}^n \subset \mathbb{E}^n$, имел ненулевую толщину в направлении $\mathbb{E}^1 \subset \mathbb{E}^n$ необходимо и достаточно, чтобы $\mathcal{P}^n = \mathcal{P}^l \oplus \mathcal{P}^1$, где $n-1 \leq l \leq n$ и $\mathcal{P}^1 \subset \mathbb{E}^1$.*

В формулировке этой теоремы мы под словом r -мерный параллелоэдр, где r принимает указываемые значения, понимаем параллелоэдр ($\mathcal{P}^r \subset \mathbb{E}^r \subset \mathbb{E}^n$), являющийся областью Вороного–Дирихле r -мерной решетки.

6°. ПРОБЛЕМЫ.

1. *Найти все коренные 5-мерные параллелоэдры. Дать описание всех типов и областей типов 5-мерных параллелоэдров через коренные.*
2. *Найти подход к описанию (алгоритм разыскания) всех n -мерных коренных параллелоэдров.*
3. *Верно ли обобщение теоремы 2 на k -мерное направление?*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Рышков С. С. // УМН. 1998. Т. 53. № 2. С. 161–162. [2] Вороной Г. Ф. // Собр. сочинений. Т. 2. Киев: Изд-во АН УССР, 1952. С. 239–368. [3] Korkine A., Zolotareff G. // Math. Ann. 1877. V. 11. P. 242–292 (см. также Е. И. Золотарев, Полное собр. сочинений, вып. 1, Изд-во АН, 1931, С. 375–434). [4] Coxeter H. S. M. // Canad. J. Math. 1951. V. 3. P. 391–441. [5] Венков Б. А. // Избранные труды. Л.: Наука, 1981. С. 362–379 (оригинал в Матем. сб., 1959, Т. 49, № 2, С. 207–224).