Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. И. Архипов, В. И. Благодатских, В. С. Владимиров, С. М. Воронин, О. Б. Лупанов, Е. Ф. Мищенко, Ю. В. Прохоров, В. Н. Чубариков, А. Б. Шидловский, Анатолий Алексеевич Карацуба (к шестидесятилетию со дня рождения), *УМН*, 1998, том 53, выпуск 2, 173–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm13>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 15:21:27

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

АНАТОЛИЙ АЛЕКСЕЕВИЧ КАРАЦУБА

(к шестидесятилетию со дня рождения)

Анатолий Алексеевич Карацуба родился 31 января 1937 г. в г. Грозном.

В 1954 г. он поступил на механико – математический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, где под руководством А.Н. Колмогорова написал свои известные работы по теории конечных автоматов и “быстрому” умножению многозначных чисел. В 1959 г. А.А. Карацуба поступил в аспирантуру отделения математики механико–математического факультета МГУ. В 1962 г. он защитил кандидатскую диссертацию на тему “Тригонометрические суммы специального вида и их приложения” и был оставлен для работы в МГУ. В 1966 г. он защитил докторскую диссертацию “Метод тригонометрических сумм и теоремы о среднем”. По приглашению И.М. Виноградова в 1966 г. перешел на работу в Математический институт им. В.А. Стеклова АН СССР (МИАН) в отдел теории чисел, оставаясь одновременно сотрудником механико–математического факультета МГУ. С 1969 г. Анатолий Алексеевич – профессор кафедры теории чисел механико – математического факультета МГУ. В 1973 г. ему присуждается премия им. П.Л. Чебышева АН СССР за исследования по многомерной проблеме делителей Дирихле. С 1983 г. А.А. Карацуба возглавляет отдел теории чисел МИАН. А.А. Карацуба – член редколлегии нескольких центральных математических журналов, член ряда ученых советов, участник многих международных конференций и конгрессов.

Анатолий Алексеевич является автором известного учебника “Основы аналитической теории чисел” (1975, 1983 г.); а также автором монографий “Кратные тригонометрические суммы” (1980 г., совм. с Г.И. Архиповым, В.Н. Чубариковым); “Теория кратных тригонометрических сумм” (1987 г., совм. с Г.И. Архиповым, В.Н. Чубариковым); “Дзета-функция Римана” (1994 г., совм. с С.М. Ворониным); “Complex analysis in number theory” (1995 г.)

Им опубликовано 115 научных работ по математике. Список работ А.А. Карацубы опубликован в Трудах МИАН, 1997, Т.218.

Характеризуя в общих чертах основные направления исследований А.А. Карацубы, следует отметить, что он внес фундаментальный вклад в теорию тригонометрических сумм и тригонометрических интегралов (проблема Терри, p -адический метод, кратные тригонометрические суммы, оценка функции Харди в проблеме Варинга, проблема Артина о локальном представлении нуля формой, проблема Хуа Ло-кена о показателе сходимости особого интеграла, оценки неполных коротких сумм Клоостермана); теорию дзета-функции Римана (проблема Сельберга, распределение нулей функции Дэвенпорта–Хейльбронна, распределение нулей дзета-функции Римана на коротких отрезках критической прямой); теорию характеров Дирихле (оценки сумм

характеров по “сдвинутым” простым числам и сумм характеров от многочленов второй степени с простым аргументом); теорию конечных автоматов (проблема точной оценки наименьшей длины эксперимента для распознавания состояний автомата); теорию быстрых вычислений (первый общий метод и алгоритм быстрого умножения многозначных чисел, историческое исследование возникновения арифметических операций, сложность вычислений функций).

Начальный период деятельности А. А. Карацубы в теории тригонометрических сумм завершился разработкой p -адического метода. Он впервые реализует в p -адической форме “принцип вложения” Эйлера – Виноградова и строит p -адический аналог u -чисел И. М. Виноградова при оценке числа решений сравнения варинговского типа [1].

Этот новый подход привел к новому p -адическому доказательству теоремы о среднем И. М. Виноградова, играющей центральную роль в методе тригонометрических сумм Виноградова. А. А. Карацуба неоднократно возвращался к этой теореме и совершенствовал ее доказательство. В наиболее общем виде результат приведен в работе [2].

Далее отметим, что p -адический метод А. А. Карацубы включает в себя способы оценок меры множества точек с малыми значениями функций через значения их параметров (коэффициенты и т.п.) и обратно, оценок этих параметров через меру множества в вещественной и p -адической метриках. Эта сторона p -адического метода отчетливо проявилась при оценках тригонометрических интегралов, что привело к решению проблемы Хуа Ло-кена о показателе сходимости несобственного интеграла в проблеме Тэрри [3].

Все эти исследования А. А. Карацубы включают в себя p -адическую форму кругового метода Харди – Литтлвуда – Рамануджана – Виноградова. Ярким примером применения этого метода явились исследования по оценкам тригонометрических сумм, в которых суммирование ведется по числам с малыми простыми делителями [4]. Используя результаты этих исследований, он получил новую оценку известной функции Харди $G(n)$ в проблеме Варинга [5].

В 1970-71 гг. А. А. Карацуба [6], развивая метод И. М. Виноградова оценок сумм по простым числам, получил степенное уменьшение длины промежутка изменения переменной суммирования, на котором имеет место нетривиальная оценка суммы значений неглавного характера Дирихле на последовательности сдвинутых простых чисел. Постановка этой проблемы и наилучшие результаты в ней принадлежали И. М. Виноградову.

В 1971-72 гг. Анатолий Алексеевич провел исследования по многомерной проблеме делителей Дирихле. Как известно, наилучшие на сегодняшний день оценки порядка роста дзета-функции Римана в критической полосе вблизи прямой $\Re s = 1$ получаются методом Виноградова. Эти оценки позволили А. А. Карацубе получить существенно более точную оценку остаточного члена в проблеме делителей Дирихле для k -мерной функции делителей в случае, когда число k велико. Наиболее замечательным результатом здесь является оценка остатка в этой проблеме, равномерная по отношению ко всем параметрам [7].

Несколько особняком стоят исследования А. А. Карацубы по проблеме Артина о p -адическом представлении нуля формой произвольной степени. Здесь вместо предполагавшегося степенного роста числа переменных для нетривиального представления нуля формой было доказано, что это число переменных должно расти почти экспоненциальным образом в зависимости от степени [8].

В 1968 г. А. А. Карацуба поставил задачу о создании теории кратных тригонометрических сумм Г. Вейля, подобной теории И. М. Виноградова. Центральным моментом ее является теорема о среднем, подобная теореме И. М. Виноградова в случае однократных сумм. Эта теорема была доказана в [9]. Теорема о среднем и лемма о кратности пересечения специальных многомерных параллелепипедов лежат в основе оценки кратной тригонометрической суммы [10].

Завершая тему, связанную с тригонометрическими суммами, скажем об исследованиях А. А. Карацубы последнего времени по оценкам сумм Клоостермана. Он установил равномерность распределения обратных величин некоторой подпоследовательности для очень короткого отрезка натурального ряда по произвольному модулю, тем самым доказал справедливость аналога проблемы И. М. Виноградова о наименьшем квадратичном невычете.

Обратимся теперь к работам А. А. Карацубы по теории дзета-функции Римана и по исследованиям других арифметических рядов Дирихле.

Как известно, центральной задачей современной теории дзета-функции Римана является гипотеза Римана. Дзета-функция обладает рядом замечательных свойств: эйлеровским произве-

дением, функциональным уравнением. Если же рассматривать ряды Дирихле, то многое будет зависеть от арифметической природы последовательности коэффициентов этих рядов. В работах А. А. Карацубы проводятся исследования самой дзета-функции Римана, а также рядов Дирихле, у которых указанные выше характеристические свойства как имеются, так и отсутствуют.

В 1914 г. Г. Харди доказал бесконечность количества нулей дзета-функции Римана на критической прямой, а в 1921 г. Г. Харди и Д. Литтлвуд получили оценку снизу этого количества нулей. В 1942 г. А. Сельберг доказал, что каждый промежуток на критической прямой, длина которого по порядку превосходит корень квадратный от величины его нижней границы, содержит “правильную” часть от числа всех нулей в соответствующем прямоугольнике критической полосы. Тогда же А. Сельберг высказал гипотезу, что порядок длины этого промежутка можно уменьшить степенным образом.

В 1983 г. А. А. Карацуба [12] доказал гипотезу А. Сельберга с длиной рассматриваемого там промежутка, даже меньшей корня кубического от его длины.

Отметим также, что в 1981 г. за счет принципиально нового метода оценок тригонометрических сумм А. А. Карацуба доказал [13], что на отрезке критической прямой длины $T^{5/32} \log^2 T$, где T – нижняя граница промежутка, лежит хотя бы один нуль нечетного порядка дзета-функции Римана.

Еще один интересный результат А. А. Карацубы относится к функции Дэвенпорта – Хейлбронна $f(s)$. Эта функция удовлетворяет функциональному уравнению риманова типа, но не имеет эйлерова произведения. Аналог гипотезы Римана для $f(s)$ не имеет места, т.е. утверждение о том, что все комплексные нули $f(s)$ лежат на прямой $\Re s = \frac{1}{2}$ – неверно. Тем не менее в 1980 г. С. М. Воронин доказал, что прямая $\Re s = \frac{1}{2}$ является исключительным множеством для нулей $f(s)$, т.е. любая другая прямая содержит меньшее количество нулей этой функции. А. А. Карацуба получил существенно более точный результат [14].

Отметим, что работы, рассмотренные в этой статье не охватывают полностью всех направлений математической деятельности А. А. Карацубы, но мы надеемся, что они отражают существо его научного творчества.

А. А. Карацуба создал известную у нас в стране и за рубежом свою школу аналитической теории чисел. Среди его учеников 6 докторов и 12 кандидатов наук. Говоря о разносторонней деятельности А. А. Карацубы, необходимо упомянуть и о его серьезном увлечении альпинизмом. На счету Анатолия Алексеевича десятки сложных восхождений на высочайшие вершины Памира и Тянь-Шаня, Кавказа и Фанских гор. От души пожелаем ему новых горных экспедиций и новых научных открытий.

Список литературы

1. Карацуба А. А. Проблема Варинга для сравнения по модулю, равному степени простого числа. Вестник МГУ, серия I. - 1962, N 4. - 28 - 38.
2. Архипов Г. И., Карацуба А. А. Новая оценка интеграла И. М. Виноградова. Изв. АН СССР, сер. матем. - 1978. - т. 42, N 4. - с. 751 - 762.
3. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Тригонометрические интегралы. Изв. АН СССР, сер. матем. - 1979. - т. 43, N 5. - с. 971 - 1003.
4. Карацуба А. А. О некоторых арифметических задачах с числами, имеющими малые простые делители. Acta Arithmetica, 1975, т. 27, 489 - 492.
5. Карацуба А. А. О функции $G(n)$ в проблеме Варинга. Изв. АН СССР, сер. матем. - 1985. - т. 49, N 5. - 935 - 947.
6. Карацуба А. А. Суммы характеров с простыми числами. Изв. АН СССР, сер. матем. - 1970. - т. 34, N 2. - 299 - 321.
7. Карацуба А. А. Равномерная оценка остаточного члена в проблеме делителей Дирихле. Изв. АН СССР, сер. матем. - 1972. - т. 36, N 3. - 475 - 483.
8. Архипов Г. И., Карацуба А. А. О локальном представлении нуля формой. Изв. АН СССР, сер. матем. - 1981. - т. 45, N 5. - с. 948 - 961.
9. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Кратные тригонометрические суммы и их приложения. Изв. АН СССР, сер. матем. - 1980. - т. 44, N 4. - с. 723 - 781.

10. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Кратные тригонометрические суммы. Труды МИ АН СССР. - 1980. - т.151. - с.1 - 128.
11. Карацуба А. А. Аналогии сумм Клоостермана. Изв. РАН, сер. матем. - 1995. - т.59, в.5. - 93-102.
12. Карацуба А. А. О нулях функции $\zeta(s)$ на коротких промежутках критической прямой. Изв. АН СССР, сер. матем. - 1984. - т.48, N 3. - 569 - 584.
13. Карацуба А. А. О расстоянии между соседними нулями дзета-функции Римана, лежащими на критической прямой. Труды МИ АН СССР. - 1981. - т.157. - с.49 - 63.
14. Карацуба А. А. О нулях функции Дэвенпорта – Хейльбронна, лежащих на критической прямой. Изв. АН СССР, сер. матем. - 1990. - т.54, N 2. - 303 - 315.

*Г. И. Архипов, В. И. Благодатских, В. С. Владимиров,
С. М. Воронин, О. Б. Лупанов, Е. Ф. Мищенко,
Ю. В. Прохоров, В. Н. Чубариков, А. Б. Шидловский*