Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Степин, Особые точки дифференциальных уравнений второго порядка: решения с логарифмическими членами, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 1, 265–266

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm130>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 15:12:57

**ОСОБЫЕ ТОЧКИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ВТОРОГО ПОРЯДКА:
РЕШЕНИЯ С ЛОГАРИФМИЧЕСКИМИ ЧЛЕНАМИ**

С. А. СТЕПИН

Особая точка линейного обыкновенного дифференциального уравнения может оказаться для него точкой ветвления конечного порядка, либо логарифмической точкой ветвления. В настоящей работе рассматривается уравнение второго порядка

$$(1) \quad z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + za(z) \frac{dw}{dz} + b(z)w = 0,$$

для которого $z = 0$ является регулярной особой точкой, т.е. коэффициенты $a(z)$ и $b(z)$ аналитичны в окрестности $z = 0$, причем одно из чисел $a(0)$, $b(0)$, $b'(0)$ отлично от 0.

Пусть λ_1, λ_2 – корни определяющего уравнения

$$\lambda^2 + (a(0) - 1)\lambda + b(0) = 0,$$

$\operatorname{Re} \lambda_1 \geq \operatorname{Re} \lambda_2$. Известно (см., например, [1]), что при условии $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{Z}$, уравнение (1) имеет фундаментальную систему решений (ФСР) вида

$$w_1(z) = z^{\lambda_1} \varphi(z), \quad w_2(z) = z^{\lambda_2} \psi(z),$$

где $\varphi(z)$, $\psi(z)$ аналитичны в некоторой окрестности точки $z = 0$. Если же $\lambda_1 - \lambda_2 \in \mathbb{Z}$, то ФСР уравнения (1) имеет вид

$$(2) \quad w_1(z) = z^{\lambda_1} \varphi(z), \quad w_2(z) = z^{\lambda_2} \psi(z) + C w_1(z) \ln z,$$

причем постоянная C может “случайно” оказаться нулем и тогда ФСР выглядит так же как и в случае $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{Z}$.

Постановка и исследование вопроса о структуре решений обыкновенного дифференциального уравнения в окрестности регулярной особой точки восходят к работам Фробениуса и Фукса (см. [2; гл. 16]). Обзор результатов об условиях отсутствия логарифмических членов в ФСР имеется в [3]; см. также [4]. Ниже в терминах $a(z)$ и $b(z)$ найдено явное выражение для коэффициента C при логарифмическом слагаемом решения $w_2(z)$ в резонансном случае $\lambda_1 - \lambda_2 \in \mathbb{N}$.

Предварительно с помощью замены

$$w(z) = y(z) \exp\left(-\frac{1}{2} \int \frac{a(z)}{z} dz\right)$$

уравнение (1) преобразуется к виду

$$(3) \quad z^2 \frac{d^2 y}{dz^2} + q(z)y = 0,$$

где $q(z) = b(z) - a^2(z)/4 + (a(z) - za'(z))/2$ – аналитическая в окрестности $z = 0$ функция: $q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k z^k$. Структура ФСР уравнения (3) в окрестности $z = 0$ такая же, как и у (1), причем характеристические показатели μ_1, μ_2 преобразованного уравнения равны соответственно $\lambda_1 + a(0)/2$ и $\lambda_2 + a(0)/2$. Введем обозначение $F_k = k(k + \lambda_2 - \lambda_1)$, $k \in \mathbb{N}$.

ТЕОРЕМА. Пусть разность $\lambda_1 - \lambda_2 = n \in \mathbb{N}$. Тогда уравнение (1) имеет ФСР вида (2), где $\varphi(0) = \psi(0) = 1$ и

$$C = \frac{1}{n} \left\{ -q_n + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{q_{n-k} q_k}{F_k} - \sum_{k_2 < k_1} \frac{q_{n-k_1} q_{k_1-k_2} q_{k_2}}{F_{k_1} F_{k_2}} \right. \\ + \dots + (-1)^{j+1} \sum_{k_j < \dots < k_1} \frac{q_{n-k_1} q_{k_1-k_2} \dots q_{k_j}}{F_{k_1} F_{k_2} \dots F_{k_j}} \\ \left. + \dots + (-1)^{n-1} \frac{q_1^{n-1} q_2}{F_{n-1} \dots F_1} \sum_{k=1}^{n-1} F_k + (-1)^n \frac{q_1^n}{F_{n-1} \dots F_1} \right\}.$$

Пусть решение $y_1(z)$ уравнения (2), отвечающее характеристическому показателю μ_1 , нормировано условием $\lim_{z \rightarrow 0} y_1(z)/z^{\mu_1} = 1$. Второе решение ищется в виде

$$y_2(z) = z^{\mu_2} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k \right] + C y_1(z) \ln z.$$

Подставляя это выражение в уравнение (3) и, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях переменной z , последовательно находим все c_k и C . Введем матрицу $T = (t_{ij})_{i,j=1}^{n-1}$, где $t_{ij} = 0$ при $i + j < n$, $t_{ij} = F_i$, если $i + j = n$ и $t_{ij} = q_{i+j-n}$ для остальных i, j . Положим $v = (q_1, \dots, q_{n-1})$, тогда

$$\begin{aligned} C &= -\frac{1}{n} \{ q_n + (T^{-1}v, v) \} \\ &= -\frac{1}{n} \left\{ q_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{q_{n-k}q_k}{F_k} + \sum_{j=2}^{n-1} (-1)^j \sum_{k_j < \dots < k_1} \frac{q_{n-k_1}q_{k_1-k_2} \dots q_{k_j}}{F_{k_1}F_{k_2} \dots F_{k_j}} \right\}. \end{aligned}$$

Для того, чтобы решение $y_2(z)$ не содержало слагаемого с логарифмом, необходимым и достаточным является условие

$$(4) \quad q_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{q_{n-k}q_k}{F_k} + \sum_{j=2}^{n-1} (-1)^j \sum_{k_j < \dots < k_1} \frac{q_{n-k_1}q_{k_1-k_2} \dots q_{k_j}}{F_{k_1}F_{k_2} \dots F_{k_j}} = 0.$$

В этом случае решение $y_2(z)$ содержит произвольную постоянную c_n , а соответствующее слагаемое, у которого c_n будет множителем, пропорционально $y_1(z)$ (см. [1]); без потери общности (с точки зрения построения ФСР) можно положить $c_n = 0$.

СЛЕДСТВИЕ. *Общее решение уравнения (1) имеет в точке $z = 0$ не более чем алгебраическую особенность тогда и только тогда, когда характеристические показатели $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Q}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и, кроме того, должно быть выполнено условие (4), если $\lambda_1 - \lambda_2 = n \in \mathbb{N}$.*

Уравнение (1) можно свести к системе

$$z \frac{dY}{dz} = A(z)Y,$$

где $A(z)$ – матрица второго порядка, аналитическая в окрестности точки $z = 0$. Согласно общей теории (см. [5]), такая система имеет фундаментальное матричное решение вида

$$Y = P(z) \cdot z^G,$$

где $P(z)$ аналитична в окрестности $z = 0$, а разность собственных значений постоянной матрицы G не является положительным целым числом. Применительно к рассматриваемой ситуации условие (4) указывает те и только те случаи, когда матрица G будет скалярной.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. Т. 1. М.: Физматгиз, 1963. [2] Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: ГНТИ Украины, 1939. [3] Harris W. A. // Appl. Anal. 1978. V. 8. P. 171–174. [4] Григоренко Н. В. // Матем. заметки. 1983. Т. 33. № 6. С. 881–884. [5] Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968.