Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Д. Суворов, Группа вращений ребер композиции плоских деревьев и сплетение групп, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 1, 267–268

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm131>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 17:58:41

ГРУППА ВРАЩЕНИЙ РЕБЕР КОМПОЗИЦИИ ПЛОСКИХ ДЕРЕВЬЕВ И СПЛЕТЕНИЕ ГРУПП

А. Д. СУВОРОВ

1. Плоские двукрашенные деревья. В этой работе будут рассматриваться плоские двукрашенные деревья. Как обычно, дерево – связный граф без циклов. Вершины разбиты на два множества (*черных* и *белых* вершин), так что соседние вершины – разного цвета. Плоская структура означает, что в каждой вершине задан циклический порядок ребер. Будем использовать обозначения $E(T)$ и $V_\bullet(T)$ ($V_\circ(T)$) для множества ребер дерева T и множества черных (белых) вершин этого дерева.

Группой вращений ребер $ER(T)$ плоского двукрашенного дерева T называется группа перестановок ребер дерева T , порожденная элементами $a_\bullet, a_\circ$ – вращениями ребер вокруг черных и белых вершин дерева [1].

Для того чтобы задать плоское двукрашенное дерево T , достаточно указать множество ребер $E(T)$ и перестановки $a_\bullet, a_\circ$ (вершины соответствуют независимым циклам перестановок $a_\bullet, a_\circ$, очевидным образом определяется отношение инцидентности).

Легко определить плоское двукрашенное дерево “ежик” – $H_n = (E = \{1, \dots, n\}, a_\bullet = \text{id}, a_\circ = (1, 2, \dots, n))$ и “цепочку” – $C_n = (E = \{1, \dots, n\}, a_\bullet = (1, 2) \dots (n-2, n-1), a_\circ = (2, 3) \dots (n-1, n))$, если число ребер n нечетно, и $C_n = (E = \{1, \dots, n\}, a_\bullet = (1, 2) \dots (n-1, n), a_\circ = (2, 3) \dots (n-2, n-1))$, если n четно.

Группа вращений ребер ежика H_n – циклическая группа $\mathbb{Z}_n$, группа вращений ребер цепочки C_n – диэдральная группа D_n ($n \geq 3$).

Морфизмом абстрактных плоских двукрашенных деревьев $T = (E, a_\bullet, a_\circ)$ и $T' = (E', a'_\bullet, a'_\circ)$ называется отображение $\varphi: E \rightarrow E'$, удовлетворяющее условиям $\varphi \circ a_\bullet(e) = a'_\bullet \circ \varphi(e)$, $\varphi \circ a_\circ(e) = a'_\circ \circ \varphi(e)$, $\forall e \in E$.

Группа вращений ребер “наугад взятого” дерева T с n ребрами – S_n или A_n в зависимости от четности порождающих перестановок $a_\bullet, a_\circ$. Точнее, имеет место один из следующих трех случаев.

- i) Общий случай – группа $ER(T) \simeq S_n$ или $ER(T) \simeq A_n$.
- ii) Дерево T является ежиком или цепочкой – группа $ER(T) \simeq \mathbb{Z}_n$ или $ER(T) \simeq D_n$.
- iii) Группа $ER(T)$ примитивна и отлична от $S_n, A_n, \mathbb{Z}_n, D_n$. Тогда дерево T называется *исключительным* деревом. Получен полный список исключительных деревьев (см. [2], [3]).
- iv) Группа $ER(T)$ импримитивна. Этот случай имеет место тогда и только тогда, когда существует морфизм $\varphi: T \rightarrow T'$, $1 < \#E(T') < \#E(T)$. Дерево T называется в этом случае *приводимым*.

В частности, дерево T является приводимым, если оно является результатом нетривиальной композиции деревьев: $T = T_1 \circ T_2$; $\#E(T_1), \#E(T_2) > 1$.

2. Группа вращений ребер композиции плоских двукрашенных деревьев. Следуя работе [4], определим *композицию* плоских двукрашенных деревьев с двумя отмеченными вершинами.

Пусть $T = (E, a_\bullet, a_\circ, v_\square, v_\triangle)$ – плоское двукрашенное дерево с отмеченными вершинами $v_\square, v_\triangle \in V(T)$. Однозначно определен путь σ в дереве T , соединяющий вершины $v_\square, v_\triangle$. В пути σ существует единственное ребро $e_\square$, инцидентное $v_\square$, и единственное ребро $e_\triangle$, инцидентное $v_\triangle$.

Опишем абстрактное плоское двукрашенное дерево с двумя отмеченными вершинами $T_3 = (E_3, a_{\bullet 3}, a_{\circ 3}, v_{\square 3}, v_{\triangle 3})$ – композицию абстрактных плоских двукрашенных деревьев с двумя отмеченными вершинами $T_1 = (E_1, a_{\bullet 1}, a_{\circ 1}, v_{\square 1}, v_{\triangle 1})$ и $T_2 = (E_2, a_{\bullet 2}, a_{\circ 2}, v_{\square 2}, v_{\triangle 2})$.

Положим $E_3 = E_1 \times E_2$. Определим два элемента $f_\bullet$ и $f_\circ$ группы $ER(T_2)^{E(T_1)}$ следующим образом:

$$f_\bullet(e) = \begin{cases} \text{id}_2, & \text{если } e \neq e_\square, e_\triangle, \\ a_{\bullet 2}, & \text{если } e = e_\square \text{ и } v_\square \in V_\bullet, \\ a_{\circ 2}, & \text{если } e = e_\triangle \text{ и } v_\triangle \in V_\bullet, \end{cases} \quad f_\circ(e) = \begin{cases} \text{id}_2, & \text{если } e \neq e_\square, e_\triangle, \\ a_{\bullet 2}, & \text{если } e = e_\square \text{ и } v_\square \in V_\circ, \\ a_{\circ 2}, & \text{если } e = e_\triangle \text{ и } v_\triangle \in V_\circ. \end{cases}$$

Положим $a_{\bullet 3}(e_1, e_2) = (a_{\bullet 1}(e_1), (f_\bullet(e_1))(e_2))$; $a_{\circ 3}(e_1, e_2) = (a_{\circ 1}(e_1), (f_\circ(e_1))(e_2))$; $a_{\bullet 3}, a_{\circ 3} \in ER(T_1) \wr ER(T_2)$. Для завершения конструкции следует определить отмеченные

вершины дерева $T_3 = T_1 \circ T_2$:

$$v_{\square 3} = \begin{cases} \text{орбита ребра } (e_{\square 1}, e_{\square 2}) \text{ в } a_{\bullet 3}, & \text{если } v_{\square 2} \in V_{\bullet 2}, \\ \text{орбита ребра } (e_{\triangle 1}, e_{\square 2}) \text{ в } a_{\circ 3}, & \text{если } v_{\square 2} \in V_{\circ 2}. \end{cases}$$

$$v_{\triangle 3} = \begin{cases} \text{орбита ребра } (e_{\square 1}, e_{\triangle 2}) \text{ в } a_{\bullet 3}, & \text{если } v_{\triangle 2} \in V_{\bullet 2}, \\ \text{орбита ребра } (e_{\triangle 1}, e_{\triangle 2}) \text{ в } a_{\circ 3}, & \text{если } v_{\triangle 2} \in V_{\circ 2}. \end{cases}$$

Группа вращений ребер композиции плоских деревьев включается в следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & & 1 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \text{(i)} & 1 \longrightarrow & K & \xrightarrow{\alpha'} & ER(T_1 \circ T_2) & \xrightarrow{\pi'} & ER(T_1) \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow i_1 & & \downarrow i_2 & & \parallel \\ \text{(ii)} & 1 \longrightarrow & ER(T_2)^{E(T_1)} & \xrightarrow{\alpha} & ER(T_1) \wr ER(T_2) & \xrightarrow{\pi} & ER(T_1) \longrightarrow 1 \\ & & & & \alpha(f) = (1, f); & & \pi(g, f) = g. \end{array}$$

Вообще говоря, $ER(T_1 \circ T_2)$ не является нормальной подгруппой в $ER(T_1) \wr ER(T_2)$.

Обозначим $k_c := [ER(T_1) \wr ER(T_2) : ER(T_1 \circ T_2)] = [ER(T_2)^{E(T_1)} : K]$. Ниже приведены результаты о возможных значениях этого индекса.

Наиболее удобным для исследования является случай $T_2 = H_p$. Тогда расширения (i) и (ii) – абелевы, следовательно определено действие группы $ER(T_1)$ сопряжениями в K и $ER(T_2)^{E(T_1)}$, которое будет обозначаться $L: ER(T_1) \rightarrow \text{Aut}(ER(T_2)^{E(T_1)})$ (действие является линейным). Изучение аффинных продолжений этого действия позволило получить следующие результаты.

В оставшихся утверждениях будем придерживаться следующих соглашений: дерево $T_2 = H_p$, центральная вершина белого цвета; отмеченная вершина $v_{\triangle}$ дерева T_1 – черного цвета.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $\#ER(T_1) \neq 0 \pmod p$, p – простое число. Тогда $ER(T_1 \circ T_2)$ является собственной подгруппой $ER(T_1) \wr ER(T_2)$ тогда и только тогда, когда на некотором нетривиальном факторпредставлении S представления $ER(T_2)^{E(T_1)}$ группы $ER(T_1)$ имеет решение следующая система линейных уравнений:

$$\begin{cases} L_{a_{\bullet 1}} x - x + L_{a_{\bullet 1}} f_{\bullet} = 0, \\ L_{a_{\circ 1}} x - x = 0. \end{cases}$$

Условие разрешимости системы является достаточным для нетривиальности индекса k_c при любом порядке группы $ER(T_1)$ (см. утверждение 3).

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $ER(T_1) = S_n$ или A_n . Тогда при подходящем выборе вершины $v_{\triangle}$ могут иметь место следующие значения индекса: $k_c = 2$, если $p = 2$, $ER(T_1) = S_n$, образующая $a_{\bullet 1}$ нечетна, $a_{\circ 1}$ четна; $k_c = p^{n-1}$ иначе.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть все черные вершины дерева T_1 , кроме $v_{\triangle}$, имеют валентности, кратные p . Тогда для композиции $T_3 = T_1 \circ T_2$ имеем $k_c = p^{n-1}$.

В случае выполнения условий утверждения 3 существует морфизм $\varphi: T_1 \circ T_2 \rightarrow H_p$ дерева $T_1 \circ T_2$ на ежик с p ребрами (вообще говоря, $T_1 \circ T_2$ не представляется в виде композиции $H_p \circ T$ ежика H_p с каким-либо деревом T). Описанный в утверждении 3 класс деревьев соответствует неоднозначно разложимым полиномам (см. [5]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Адрианов Н. М., Кочетков Ю. Ю., Суворов А. Д., Шабат Г. Б. // Фунд. прикл. матем. 1995. Т. 1. № 2. С. 377–384. [2] Адрианов Н. М., Кочетков Ю. Ю., Суворов А. Д. // Фунд. прикл. матем. 1997. V. 3. № 4. Р. 1091–1098. [3] Адрианов Н. М. // Фунд. прикл. матем. 1997. Т. 3. № 4. С. 1075–1089. [4] Adrianov N. M., Zvonkin A. K. // Acta Appl. Math. 1998. № 1–3. Р. 239–245. [5] Суворов А. Д. О приводимых деревьях // Kurosh Algebraic Conference'98, Москва, 1998. С. 214–215.