Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Ахметшин, Ю. С. Вольвовский, И. М. Кричевер, Порождающая формула для решений уравнений ассоциативности, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 2, 167–168

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm135>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 13:32:02

ПОРОЖДАЮЩАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ АССОЦИАТИВНОСТИ

А. А. АХМЕТШИН, Ю. С. ВОЛЬВОВСКИЙ, И. М. КРИЧЕВЕР

1. Введение. Уравнения ассоциативности (или WDDV уравнения) были введены в начале 90-х годов для описания свободной энергии топологических квантовых моделей теории поля (см. [1], [2]). В последние годы эти уравнения привлекают к себе все большее внимание благодаря их связям с инвариантами Громова–Виттена, квантовыми когомологиями и теорией Уизема.

Как было замечено в [3], проблема классификации топологических квантовых моделей теории поля, или проблема построения общих решений уравнения ассоциативности эквивалентна проблеме классификации Егоровских метрик специального типа. Егоровские метрики – это *плоские* диагональные метрики $ds^2 = \sum_{i=1}^n h_i^2(u) (du^i)^2$ такие, что $\partial_i h_j^2(u) = \partial_j h_i^2(u)$, где $\partial_i = \partial/\partial u^i$. Оказывается, что для любой Егоровской метрики, удовлетворяющей дополнительному условию $\sum_{j=1}^n \partial_j h_i = 0$, функции

$$(1) \quad c_{kl}^m(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x^m}{\partial u^i} \frac{\partial u^i}{\partial x^k} \frac{\partial u^i}{\partial x^l},$$

где $x^k(u)$ плоские координаты метрики, удовлетворяют уравнениям

$$(2) \quad c_{ij}^k(x) c_{km}^l(x) = c_{jm}^k(x) c_{ik}^l(x),$$

которые эквивалентны условию ассоциативности алгебры $\phi_k \phi_l = c_{kl}^m \phi_m$. Более того, оказывается, что существует функция $F(x)$ такая, что ее третьи производные равны

$$(3) \quad \frac{\partial^3 F(x)}{\partial x^k \partial x^l \partial x^m} = c_{klm}^n(x) = \eta_{mi} c_{kl}^i(x), \quad \text{где} \quad \eta_{pq} = \sum_{i=1}^n h_i^2(u) \frac{\partial u^i}{\partial x^p} \frac{\partial u^i}{\partial x^q}.$$

Кроме того, существуют константы r^m такие, что для постоянной матрицы, задающей метрику в плоских координатах имеет место соотношение $\eta_{kl} = r^m c_{klm}(x)$.

Уравнения (2) и условие существования функции F , для которой выполнены равенства (3), эквивалентны условиям совместности линейных уравнений (см. [3])

$$(4) \quad \partial_k \Phi_l - \lambda c_{kl}^m \Phi_m = 0,$$

где λ спектральный параметр. Отметим, что это утверждение носит в определенном смысле характер теоремы существования, поскольку в общем случае явное выражение F через горизонтальные сечения плоской связности $\nabla_k = \partial/\partial x^k - \lambda c_{kl}^m$ было неизвестно (в ряде частных случаев такие выражения были найдены в [3]–[5]). Основной целью настоящей заметки является получение явной порождающей формулы для F . Она была мотивирована результатами работы [6], где соответствующая формула была получена для алгебро-геометрических решений уравнений ассоциативности. Отметим при этом, что хотя общая формула в [6] (теорема 5.1) правильна, в её частном случае (теорема 5.2), который представляет основной интерес, один из членов был пропущен. Мы воспользуемся настоящей возможностью исправить эту неточность.

2. Рассмотрим $\beta_{ij}(u) = \beta_{ji}(u)$ решение уравнений Дарбу–Егорова: $\partial_k \beta_{ij} = \beta_{ik} \beta_{kj}$; $\sum_{m=1}^n \partial_m \beta_{ij} = 0$, $i \neq j \neq k$. Следуя [3], зафиксируем единственную Егоровскую метрику, определив коэффициенты Ламе $h_i(u)$ с помощью уравнений $\partial_j h_i(u) = \beta_{ij}(u) h_j(u)$; $\partial_i h_i(u) = -\sum_{j \neq i} \beta_{ij}(u) h_j(u)$ и начальных условий $h_i(0) = 1$.

Плоские координаты этой метрики находятся из системы линейных уравнений $\partial_i \partial_j x^k = \Gamma_{ij}^k \partial_i x^k + \Gamma_{ji}^k \partial_j x^k$, $i \neq j$; $\partial_i \partial_i x^k = \sum_{j=1}^n \Gamma_{ii}^j \partial_j x^k$, где Γ_{ij}^k являются символами Кристоффеля: $\Gamma_{ij}^i = \partial_j h_i / h_i$, $\Gamma_{ii}^j = (2\delta_{ij} - 1)(h_i \partial_j h_i) / (h_j^2)$. Зафиксируем единственное решение этой системы с помощью начальных условий: $x^k(0) = 0$, $\sum_{k,l} \eta_{kl} \partial_i x^k(0) \partial_j x^l(0) = \delta_{ij}$. Здесь η_{kl} заданная симметрическая невырожденная матрица.

Система Дарбу–Егорова эквивалентна условиям совместности системы линейных уравнений

$$(5) \quad \partial_j \Psi_i(u, \lambda) = \beta_{ij}(u) \Psi_j(u, \lambda); \quad \partial_i \Psi_i(u, \lambda) = \lambda \Psi_i(u, \lambda) - \sum_{k \neq i} \beta_{ik}(u) \Psi_k(u, \lambda).$$

Рассмотрим единственное решение $\Psi_i = (\Psi_i^1, \dots, \Psi_i^n)$, нормированное начальными условиями $\Psi_i^k(0, \lambda) = \lambda \partial_i x^k(0)$. Из системы уравнений (5) следует, что разложение Ψ_i имеет вид $\Psi_i(u, \lambda) = h_i^{-1}(u) \sum_{s=0}^{\infty} \partial_i \xi_s^k(u) \lambda^s$, где $\xi_0^k = r^k$ константы (которые мы определим позже), $\xi_1^k(u) = x^k(u)$ являются плоскими координатами, а ξ_s^k для $s \geq 2$ находятся рекуррентно из уравнений $\partial_i \partial_j \xi_s^k = \Gamma_{ij}^i \partial_i \xi_s^k + \Gamma_{ji}^j \partial_j \xi_s^k$, $i \neq j$; $\partial_i \partial_i \xi_s^k = \sum_{j=1}^n \Gamma_{ii}^j \partial_j \xi_s^k + \partial_i \xi_{s-1}^k$ и начальных условий $\xi_s^k(0) = 0$, $\partial_i \xi_s^k(0) = 0$. Отсюда следуют уравнения

$$(6) \quad \frac{\partial^2 \xi_s^m}{\partial x^k \partial x^l} = \sum_{p=1}^n c_{kl}^p \frac{\partial \xi_{s-1}^m}{\partial x^p},$$

где c_{kl}^p определены в (1). Обозначим $\xi_2^k(u)$ и $\xi_3^k(u)$ через $y^k(u)$ и $z^k(u)$, соответственно.

Из (5) следует, что $\lambda \Psi_i = \sum_{j=1}^n \partial_j \Psi_i$. Отсюда имеем $\sum_{i=1}^n \partial_i \xi_s^k(u) = \xi_{s-1}^k$ для $s \geq 1$. Последнее равенство для $s = 1$ определяет константы r^k .

3. Определим порождающую вектор-функцию ψ равенством $\lambda \psi(u, \lambda) = \sum_{i=1}^n h_i(u) \Psi_i(u, \lambda)$. Непосредственно проверяется, что $\partial_i \psi(u, \lambda) = h_i(u) \Psi_i(u, \lambda)$. Первые коэффициенты разложения k -ой компоненты этой функции по параметру λ имеют вид: $\psi^k(u, \lambda) = r^k + x^k(u) \lambda + y^k(u) \lambda^2 + z^k(u) \lambda^3 + \sum_{s=4}^{\infty} \xi_s^k(u) \lambda^s$. Отметим, что из (6) следует, что ψ является порождающей функцией и для плоских сечений связности ∇_k . Точнее, из (6) непосредственно вытекает, что функции $\Phi_k(x) = \partial \psi(x) / \partial x^k$ удовлетворяют уравнениям (4). Более того, $\lambda \psi(x) = \sum_{k=1}^n r^k \Phi_k(x)$.

ЛЕММА 1. *Функции $x^k(u)$, $y^k(u)$ и $z^k(u)$ удовлетворяют соотношениям:*

$$\sum_{q=1}^n \eta_{kq} y^q = \sum_{p,q=1}^n \eta_{pq} \left(x^q \frac{\partial y^p}{\partial x^k} - r^q \frac{\partial z^p}{\partial x^k} \right).$$

ТЕОРЕМА. *Функция $F(x) = F(u(x))$, $F(u) = \frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^n \eta_{pq} (x^q(u) y^p(u) - r^q z^p(u))$, удовлетворяет уравнению (3).*

Заметим, что из утверждения леммы вытекает равенство $\partial F / \partial x^k = \sum_{q=1}^n \eta_{kq} y^q$. После этого, утверждение теоремы непосредственно следует из (1) и (6) для $s = 2$.

Доказанные равенства могут быть представлены в виде уравнения типа ренорм-группы: $F(x) - \sum_{k=1}^n x^k \frac{\partial F}{\partial x^k} = - \sum_{p,q=1}^n \eta_{pq} r^q z^p$. В следующей работе мы планируем получить более общее равенство, включающее в F зависимость от бесконечного числа переменных, отвечающих гравитационным потомкам примарных полей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Dijkgraaf R., Verlinde E., Verlinde H. Notes on topological string theory and 2D quantum gravity // String theory and quantum gravity (Trieste, 1990). River Edge, NJ: World Sci. Publ., 1991. P. 91–156. [2] Dijkgraaf R., Witten E. // Nucl. Phys. B. 1990. V. 342. № 3. P. 486–522. [3] Dubrovin B. A. Geometry of 2D topological field theories // Integrable systems and quantum groups (Montecatini Terme, 1993). Lecture Notes in Math. V. 1620. Berlin: Springer-Verlag, 1996. P. 120–348. [4] D'Hoker E., Krichever I. M., Phong D. H. // Nucl. Phys. B. 1997. V. 494. № 1–2. P. 89–104. [5] Krichever I. M. // Comm. Math. Phys. 1992. V. 143. № 2. P. 415–429. [6] Krichever I. M. // Funct. Anal. Appl. 1997. V. 31. № 1. P. 25–39.

Columbia University, New York,
ИТФ РАН им. Ландау, Москва

Принято редколлегией
17.03.1999