Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Астрелин, И. Х. Сабитов, Канонический многочлен для объема многогранника, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 2, 165–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm136>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 09:57:47

КАНОНИЧЕСКИЙ МНОГОЧЛЕН ДЛЯ ОБЪЕМА МНОГОГРАННИКА

А. В. Астрелин, И. Х. Сабитов

Пусть в $\mathbb{R}^3$ дан гомеоморфный сфере многогранник с треугольными гранями. Пусть n – число его вершин, и пусть вершины пронумерованы в некотором порядке от 1 до n . Пусть $x = \{x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n\}$ – координаты его вершин, выписанные в порядке нумерации вершин, $l = \{l_1, \dots, l_e\}$ – квадраты длин ребер, пронумерованных в некотором порядке от 1 до $e = 3n - 6$; V – объем, $l(x)$ и $V(x)$ – выражения l и V через координаты. Так как

$$(1) \quad l_k = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2, \quad 1 \leq k \leq e,$$

где (i, j) – номера вершин, соединенных ребром с номером k , и $V = \sum_i V_i$, где V_i – ориентированный объем тетраэдра с вершиной в $(0, 0, 0)$ и с основанием на i -й грани многогранника, $1 \leq i \leq 2n - 4$, вычисляемый как смешанное произведение соответствующих векторов, то $l(x) \in \mathbb{Q}[x]$, $V(x) \in \mathbb{Q}[x]$ (напомним, что запись вида $q \in \mathbb{Q}[x][y]$ означает, что q является многочленом от y с коэффициентами, полиномиально зависящими от x , в то время как запись $q \in \mathbb{Q}(x)[y]$ означает, что коэффициенты многочлена относительно y зависят от x как рациональные функции).

Ниже мы будем рассматривать многочлены относительно V ; под степенью многочлена мы будем понимать его степень относительно V , под коэффициентом – коэффициент при определенной степени V (как правило, он будет многочленом или рациональной функцией от l или x над полем рациональных чисел). Обозначим старший коэффициент многочлена $Q \in \mathbb{Q}[l][V]$ или $Q \in \mathbb{Q}(l)[V]$ как $lc(Q)$.

Известно [1], что для любого многогранника существует многочлен $P_0 \in \mathbb{Q}[l][V]$ такой, что $lc(P_0) = 1$ (т.е. P_0 имеет вид $P_0 = V^N + \sum_{n < N} p_n(l)V^n$, где $p_n(l)$ – многочлены от l) и $P_0(l(x), V(x)) \equiv 0$. Этот многочлен позволяет, в частности, по известной метрике многогранника получить конечное множество чисел – корней многочлена, содержащее значения объемов всех реализаций (в том числе, комплексных) метрики этого многогранника. Но алгоритм построения этого многочлена таков, что он, во-первых, не однозначен и по нему можно построить много таких многочленов, во-вторых, он дает заведомо более высокую степень, чем должно быть в действительности (например, для октаэдра получается степень 1024, а в реальности минимальная степень равна 16). В этой работе мы даем однозначный способ построения требуемого многочлена минимальной степени.

Пусть S – множество многочленов $Q \in \mathbb{Q}[l][V]$ таких, что $Q(l(x), V(x)) \equiv 0$, не обязательно со старшим коэффициентом 1. Ниже следующая теорема описывает некоторые свойства этого множества.

ТЕОРЕМА. 1. Пусть d – наименьшая степень (ненулевой) многочленов из S . Тогда среди многочленов из S степени d найдется многочлен Q_0 такой, что $lc(Q_0) = 1$.

2. Многочлен Q_0 делит все многочлены из S .

3. Такой многочлен Q_0 единственный.

Сначала сделаем следующее замечание. В уравнениях (1), связывающих неизвестные координаты вершин многогранника топологического типа сферы с длинами его ребер, число неизвестных равно $3n - 6$, т.е. числу ребер (считаем, что многогранник закреплен как твердое тело), поэтому число ребер многогранника в точности равно числу степеней свободы вершин этого многогранника, не считая перемещений его как твердого тела. Следовательно, на длины ребер многогранника не накладывается дополнительных ограничений типа равенства. Это значит, что если в любой ненулевой элемент $w(l) \in \mathbb{Q}(l)$ вместо переменных l_k подставить их значения через x по формуле (1), то получается многочлен $w(l(x)) \neq 0$, или

$$(2) \quad 0 \neq w(l) \in \mathbb{Q}[l] \Rightarrow w(l(x)) \neq 0.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 96-01-00836, 99-01-00867).

Действительно, по теореме Штейница, любой триангуляции сферы можно сопоставить выпуклый многогранник, комбинаторно изоморфный этой триангуляции, поэтому для любого гомеоморфного сфере многогранника с треугольными гранями существует изоморфный ему строго выпуклый многогранник. Пусть x^0 – точка, соответствующая вершинам этого строго выпуклого многогранника, а l^0 – набор квадратов длин ребер этого многогранника. В силу жесткости строго выпуклого многогранника отображение $x \rightarrow l$, $l = l(x)$, в окрестности точек x^0 и l^0 является диффеоморфизмом, поэтому существует обратное отображение $x = x(l)$. Значит, если $w(x) = w(l(x)) \equiv 0$, то $w(l) = w(x(l)) \equiv 0$, что противоречит условию $w(l) \neq 0$.

ЛЕММА. Пусть $P, Q \in S$ и $lc(P) = 1$. Возьмем $R = \text{НОД}(P, Q) \in \mathbb{Q}[V]$, для которого $lc(R) = 1$ (такой многочлен существует, поскольку его коэффициенты лежат в поле $\mathbb{Q}(l)$). Тогда:

а) $\deg R > 0$; б) $R \in \mathbb{Q}[l][V]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. а) Будем искать R с помощью алгоритма Евклида, т.е. рассмотрим последовательность многочленов $T_1 = P$, $T_2 = Q$, $T_{n+1} = T_{n-1} - T_n U_n$, где $\deg T_{n+1} < \deg T_n$, $T_n, U_n \in \mathbb{Q}(l)[V]$, $n > 1$.

Параллельно рассмотрим последовательность $\tilde{P} = \tilde{T}_1 = P(l(x), V)$, $\tilde{Q} = \tilde{T}_2 = Q(l(x), V)$, $\tilde{T}_{n+1} = \tilde{T}_{n-1} - \tilde{T}_n \tilde{U}_n$. Так как, согласно (2), неравные нулю старшие коэффициенты многочленов $T_n(l)$ превращаются в ненулевые коэффициенты и для $\tilde{T}_n$ при тех же степенях V , то (по индукции) $\tilde{T}_k = T_k(l(x), V)$, следовательно, $\tilde{R} = \text{НОД}(\tilde{P}, \tilde{Q}) = R(l(x), V)$. Но $(V - V(x)) \mid \tilde{P}$ (т.е. многочлен $V - V(x)$ делит многочлен $\tilde{P}(x)[V]$), $(V - V(x)) \mid \tilde{Q}$ в кольце $\mathbb{Q}(x)[V]$, значит, $(V - V(x)) \mid \tilde{R}$ и $\deg R = \deg \tilde{R} > 0$.

б) Поскольку $R \mid P$, то $P = RW$, где $P \in \mathbb{Q}[l][V]$, $R, W \in \mathbb{Q}(l)[V]$, $lc(R) = lc(W) = 1$. В этом случае $R, W \in \mathbb{Q}[l][V]$. Доказательство от противного: пусть какой-нибудь коэффициент R или W не принадлежит $\mathbb{Q}[l]$ и s – какой-нибудь неприводимый делитель его знаменателя. Рассмотрим коэффициенты r_a и w_b многочленов R и W , в которые s входит в минимальной степени t_a и u_b соответственно (одно из этих чисел отрицательно, а другое неположительно); если таких коэффициентов несколько, выберем тот, что при минимальной степени V . Тогда многочлены R и W имеют представления вида

$$R = V^M + s^{t_1} A_1(l) V^{M-1} + \dots + s^{t_a} A_a(l) V^{M-a} + \dots + s^{t_M} A_M(l),$$

$$W = V^{N-M} + s^{u_1} B_1(l) V^{N-M-1} + \dots + s^{u_b} B_b(l) V^{N-M-b} + \dots + s^{u_{N-M}} B_{N-M}(l),$$

где $t_i \geq t_a$ при $i < a$ и $t_i > t_a$ при $i > a$; $u_i \geq u_b$ при $i < b$ и $u_i > u_b$ при $i > b$. Получаем, что в коэффициент многочлена P при V^{N-a-b} множитель s входит в степени $t_a + u_b < 0$, что противоречит условию $P \in \mathbb{Q}[l][V]$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. 1. Возьмем любой многочлен $Q \in S$: $\deg Q = d$. Рассмотрим $R = \text{НОД}(P_0, Q) \in \mathbb{Q}(l)[V]$, для которого $lc(R) = 1$. По лемме, $R \in \mathbb{Q}[l][V]$, а из условия $(V - V(x)) \mid R(l(x), V)$ (в кольце $\mathbb{Q}(x)[V]$) следует, что $R(l(x), V(x)) = 0$, т.е. $R \in S$. Кроме того, $\deg R \leq \deg Q$, следовательно, $\deg R = d$. Значит, R – искомый многочлен Q_0 .

2. Возьмем любой многочлен $Q \in S$. Рассмотрим $R = \text{НОД}(Q_0, Q) \in \mathbb{Q}(l)[V]$. Уже доказано, что $lc(Q_0) = 1$. Аналогично п. 1, имеем $R \in S$, $lc(R) = 1$ и $\deg R \leq d$. Следовательно, $R = Q_0$, т.е. $Q_0 \mid Q$.

3. Пусть в S есть два многочлена $R_1, R_2 \in \mathbb{Q}[l][V]$ с $\deg R_1 = \deg R_2 = d$, $lc(R_1) = lc(R_2) = 1$, которые делят все многочлены из S . Так как они делят также и друг друга, то это, очевидно, возможно только при их равенстве. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Сабитов И. Х. // Фунд. прикл. матем. 1996. Т. 2. № 4. С. 1235–1246.