Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Федорчук, М. Левин, Е. В. Щепин, О браузеровском определении размерности, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 2, 193–194

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm137>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 18:09:11

О БРАУЭРОВСКОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ РАЗМЕРНОСТИ

В. В. ФЕДОРЧУК, М. ЛЕВИН, Е. В. ШЕПИН

Идея индуктивного определения размерности восходит к работе А. Пуанкаре [1]. Ее можно сформулировать следующим образом: пространство имеет размерность $\leq n$, если его можно как угодно разбивать подпространствами размерности $\leq n - 1$. Для того чтобы превратить эту идею в строгое определение, необходимо определить, что значит “как угодно” и, что значит “разбивает”.

Первую попытку дать такое определение предпринял Л. Брауэр [2] в 1913 году, а вторую – П. Урысон десять лет спустя. При этом они дали различную трактовку как для “как угодно”, так и для “разбивает”. Особенно важным является отличие в определении разбиения. Согласно Урысону замкнутое множество C *разбивает пространство X между множествами A и B* , или *является перегородкой* между этими множествами, если $X \setminus C$ представляется в виде объединения двух непересекающихся открытых множеств, одно из которых содержит A , а другое – B . Это определение перегородки является теперь общепринятым. Брауэр же дал существенно другое определение. Перегородку в смысле Брауэра мы будем называть “разрезом”. Вот это определение: подмножество C компактного пространства X является *разрезом* между подмножествами A и B пространства X (или C *разрезает пространство X между A и B*), если множества A , B и C дизъюнкты и всякий континуум (связный компакт), пересекающий A и B , пересекает и C . В случае локально связного пространства определение Брауэра приводит к тому же понятию, что и определение Урысона, т.е. понятие “разреза” и “перегородки” совпадают. В случае же произвольных пространств верно лишь то, что всякая перегородка является разрезом.

В 1913 г. Брауэр [2] на основе понятия разреза определил топологический инвариант компактного метрического пространства, назвав его Dimensiongrad (мы обозначим этот инвариант Dg) и попытался доказать равенство $Dg I^n = n$. При доказательстве он неявно предполагал, что всякий разрез является перегородкой. После того как П. С. Урысон указал Брауэру на эту ошибку, тот исправил ее [3], заменив свое понятие разбиения на урысоновское. Таким образом он по существу отказался от своего определения размерности, а его результат вошел в урысоновскую теорию.

Брауэр не доказал ничего про введенный им инвариант Dg , вопреки общему мнению на этот счет. Так, в книге [4] написано, что Брауэр первый ввел понятие топологической размерности, для локально связных компактов совпадающее с обычной размерностью Урысона–Менгера. То есть даже Гуревич заблуждался, полагая, что для локально связного компакта брауэровское определение размерности сводится к урысоновскому, так как понятие перегородки в этом случае совпадает с понятием разреза. Но ведь перегородка в локально связном континууме уже может не быть локально связной! Тем не менее, как показано ниже, брауэровская размерность Dg совпадает с обычной (см. по этому поводу также [5; с. 116]).

При индуктивном определении размерности есть два естественных способа понимания термина “как угодно”. Брауэр понимал это как “между любыми двумя дизъюнктными компактными”, а Урысон и Менгер как “между любым компактом и не принадлежащей ему точкой”. Если индуктивное определение размерности основывается на понятии перегородки, то для метрических компактов эти различия не существенны. Но эти различия, как показано ниже, принципиальны, если определять размерность через разрезы.

ТЕОРЕМА 1. $Dg X = \dim X$ для всякого метризуемого компакта X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство $Dg X \leq \text{Ind } X = \dim X$ вытекает из того, что всякая перегородка является разрезом. Предположим теперь, что равенство $Dg X = \dim X$ не верно. Пусть n – наименьшее число, для которого существует компакт X размерности $\dim X > Dg X = n$. Ясно, что $n \geq 1$. Зафиксируем счетную базу $\{B_i : i \in \omega\}$ компакта X . Для любой пары B_i и B_j

Во время написания этой статьи первый автор был поддержан грантами РФФИ (97-01-00357) и ИНТАС (94-3763), второй – JSPS for foreign reseachers, и третий – грантами РФФИ (96-01-01166а) и CONACYT (980066).

с дизъюнктными замыканиями зафиксируем некоторый разрез $C_{i,j}$ между ними, для которого $\text{Dg } C_{i,j} \leq n - 1$. По выбору числа n имеем $\dim C_{i,j} = \text{Dg } C_{i,j} \leq n - 1$. Объединение всех $C_{i,j}$ в силу теоремы Тумаркина содержится в G_δ -множестве D размерности $\dim D \leq n - 1$. Дополнение $X \setminus D$ является объединением компактов $F_i, i \in \omega$. По определению $C_{i,j}$ это дополнение не содержит континуумов. Значит, все F_i нульмерны. Но тогда нульмерно и их объединение. Следовательно, компакт X является суммой множеств D размерности $\leq n - 1$ и $X \setminus D$ размерности ≤ 0 . Поэтому $\dim X \leq n$ по аддиционной теореме. Противоречие. Теорема 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. В этом доказательстве используются три глубоких факта, которые не могли быть известны Брауэру: теорема счетной суммы, теорема о G_δ -оболочке и аддиционная теорема. Мы не видим, как можно напрямую доказать эту теорему или даже равенство $\text{Dg } I^n = n$ в духе построений Урысона, поскольку разрезы, вообще говоря, не являются перегородками, а перегородки могут оказаться наследственно неразложимыми континуумами.

Теперь мы определим “малый” аналог dg брауэровской размерности Dg также для компактных метрических пространств. При этом параллельно определяем точечный инвариант $\text{dg}_x X$. Для $x \in X$ считаем $\text{dg}_x X = 0$, если точка x имеет базу из открыто-замкнутых окрестностей. Далее, $\text{dg } X = 0$, если $\text{dg}_x X = 0$ для всякой точки $x \in X \neq \emptyset$. Наконец, для $n \geq 1$ считаем $\text{dg } X \leq n$, если $\text{dg}_x X \leq n$ для всякой точки $x \in X$. А последнее означает, что для всякой окрестности Ox существует разрез C между точкой x и множеством $X \setminus Ox$ размерности $\text{dg } C \leq n - 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 ([6; пред. 1.1]). Пусть X – наследственно неразложимый континуум. Тогда для любого континуума $A \subset X$ и любого не пересекающегося с ним компакта B существует одноточечный разрез между A и B .

СЛЕДСТВИЕ 1 ([6; пред. 1.2]). Если X – наследственно неразложимый континуум, то $\text{dg } X = 1$.

Имеет место и более общее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть X – метризуемый компакт, каждая компонента связности которого наследственно неразложима. Тогда $\text{dg } X \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in X$ и $F \subset X$ – замкнутое множество, не содержащее точку x . Обозначим через C_x компоненту связности компакта X , содержащую точку x . Если C_x состоит из одной точки x , то $\text{dg}_x X = 0$. Если же C_x – невырожденный континуум, то можно считать, что $C_x \cap F \neq \emptyset$. Тогда любой континуум K , соединяющий x и F , лежит в C_x . Обозначим через L пересечение всех таких континуумов K . В наследственно неразложимом континууме любые два пересекающиеся континуума содержатся один в другом. Следовательно, L есть континуум. Далее, L пересекается с F . Это вытекает из того, что следы $K \cap F$ образуют линейно упорядоченное по включению семейство. Итак, L является минимальным континуумом, содержащим x и пересекающим F . Легко видеть, что произвольная точка $y \in L \setminus F \cup \{x\}$ является разрезом между x и F . Следовательно, $\text{dg } X \leq 1$. Предложение 2 доказано.

ТЕОРЕМА 2. Для всякого компакта X имеем $\text{dg } X \leq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вложим компакт X в гильбертов куб Q . Пусть $A, B \subset X$ – замкнутые непересекающиеся множества. По теореме Бинга ([7; теорема 6]) в Q существует перегородка H между A и B , каждая компонента которой наследственно неразложима. Тогда $H \cap X$ является перегородкой в X между A и B , каждая компонента которой также наследственно неразложима. Следовательно, $\text{dg } X \leq 2$ по предложению 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Poincare H. // Rev. Metaph. Morale. 1912. V. 20. P. 483–504. [2] Brouwer L. E. J. // J. Reine Angew. Math. 1913. V. 142. P. 146–152. [3] Brouwer L. E. J. // J. Reine Angew. Math. 1924. V. 153. P. 253. [4] Гуревич В., Волмэн Г. Теория размерности. М.: ИЛ, 1948. [5] Щепин Е. В. // УМН. 1998. Т. 53. №5. С. 115–212. [6] Федорчук В. В. // УМН. 1998. Т. 53. №5. С. 73–114. [7] Bing R. H. // Trans. Amer. Math. Soc. 1951. V. 71. №2. P. 267–273.