Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Грабова, Автомодельные асимптотические решения уравнений Уизема, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 2, 169–170

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm138>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 08:33:42

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ УИЗЕМА

Т. ГРАВА

Мы доказываем гипотезу С. П. Новикова, согласно которой решения уравнений Уизема с монотонными полиномиальными начальными данными имеют универсальную однофазную автомодельную асимптотику. Уравнения Уизема (см. [1]) представляют собой совокупность квазилинейных гиперболических систем вида

$$(1) \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(u_1, u_2, \dots, u_{2g+1}) \frac{\partial u_i}{\partial x} = 0, \quad x, t, u_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, 2g+1, \quad g = 0, 1, 2, \dots,$$

где $u_1 > u_2 > \dots > u_{2g+1}$. При данном g система (1) называется g -фазными уравнениями Уизема. Нуль-фазные уравнения Уизема имеют вид $u_t + 6uu_x = 0$ (где мы обозначили $u_1 = u$). При $g > 0$ скорости $\lambda_i(u_1, u_2, \dots, u_{2g+1})$, $i = 1, \dots, 2g+1$, выражаются через полные гиперэллиптические интегралы рода g . Для монотонно убывающих начальных условий $x = f(u)|_{t=0}$ решение нуль-фазного уравнения определяется уравнением характеристик $x = 6tu + f(u)$. Это решение глобально определено только при $0 \leq t < t_c$, где $t_c = \frac{1}{6} \min_{u \in \mathbb{R}} [-f'(u)]$ – время градиентной катастрофы решения. При $t \geq t_c$ решение уравнений Уизема получается C^1 -гладким склеиванием решений разных родов. Задача Коши для уравнений Уизема для монотонно убывающих гладких начальных данных $x = f(u)$ состоит в следующем.

При $t \geq 0$ плоскость (x, t) разбивается на области D_g , где $g = 0, 1, \dots$. В каждой области D_g мы ищем решение $u_1(x, t) > u_2(x, t) > \dots > u_{2g+1}(x, t)$ для g -фазных уравнений Уизема (1). При каждом $t \geq 0$ функции $u_1(x, t) > u_2(x, t) > \dots > u_{2g+1}(x, t)$ можно изобразить на (x, u) -плоскости в виде ветвей многозначной функции. Решения уравнений Уизема с разными g должны склеиваться так, чтобы получалась C^1 -гладкая кривая в (x, u) -плоскости, гладко эволюционирующая по времени t . При $t = 0$ имеется только область D_0 для всех x . Соответствующее нуль-фазное решение $u(x, t)$ нуль-фазного уравнения должно удовлетворять начальному условию $x = f(u(x, 0))$.

Мы скажем, что решение задачи Коши существует глобально и имеет род, не превосходящий g_0 , если оно определено при всех $t > 0$ и области D_g пусты при $g > g_0$.

Список литературы по уравнениям Уизема можно найти в [2]. Задача Коши для уравнений Уизема была детально изучена Тяном в случае $g \leq 1$. Им были доказаны следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1 (см. [3]). *Предположим, что монотонно убывающие начальные данные $x = f(u)$ имеют лишь одну точку перегиба в начале координат на (x, u) -плоскости и удовлетворяют условию $f'''(u) < 0$ при всех $u \neq 0$. Тогда решение уравнений Уизема существует при всех $t \geq 0$. Это решение имеет род один внутри интервала $x^-(t) < x < x^+(t)$, где $x^-(t) < x^+(t)$ – две вещественнозначные функции, удовлетворяющие условию $x_-(0) = x_+(0) = 0$, и имеет род нуль вне этого интервала.*

ТЕОРЕМА 2 (см. [4]). *Предположим, что решение задачи Коши для уравнений Уизема с монотонно убывающими начальными данными $x = f(u)$ существует при любых $x, t \geq 0$. Пусть функция $f(u)$, определенная на всей вещественной оси, удовлетворяет условиям: $\lim_{u \rightarrow -\infty} f''(u) = +\infty$; $f''(u) < 0$ при $u \rightarrow +\infty$; $f'''(u) < 0$ при $u > u_+$, $u < u_-$, где $u_+ \geq u_-$ – некоторые вещественные числа. Тогда найдется время $T \geq 0$ такое, что при всех $t > T$ решение уравнений Уизема имеет род один внутри интервала $x^-(t) < x < x^+(t)$, где $x^-(t) < x^+(t)$ – две вещественные функции от t , и имеет род нуль вне указанного интервала.*

При $g = 1$ скорости $\lambda_i(u_1, u_2, u_3)$, $i = 1, 2, 3$, в уравнениях Уизема (1) даются формулами [1]

$$(2) \quad \lambda_i(u_1, u_2, u_3) = 2(u_1 + u_2 + u_3) + 4 \frac{\prod_{j \neq i} (u_i - u_j)}{u_i + \alpha_0},$$

где $\alpha_0 = \alpha_0(u_1, u_2, u_3)$ определяется полными эллиптическими интегралами.

Для монотонно убывающих полиномиальных начальных данных степени $2N + 1$ вида $x = f(u) = -u^{2N+1} + c_{2N}u^{2N} + \dots + c_1u + c_0$ решение однофазного уравнения, которое непрерывно сшивается с нуль-фазным решением, имеет вид

$$(3) \quad x = \lambda_i t + \left(\frac{1}{2} \lambda_i - u_1 - u_2 - u_3 \right) \frac{\partial q}{\partial u_i} + q, \quad i = 1, 2, 3.$$

Здесь $\lambda_i = \lambda_i(u_1, u_2, u_3)$ определяются формулами (3), а $q = \sum_{j=0}^{2N+1} \frac{c_k}{Z_k} \Gamma_k$, где $Z_k = \frac{(2k+1)!!}{2^k k!}$

и $\Gamma_k = \Gamma_k(u_1, u_2, u_3)$ — коэффициенты разложения функции $((\xi - u_1)(\xi - u_2)(\xi - u_3))^{-1/2} = \xi^{-3/2}(\Gamma_0 + \Gamma_1\xi + \dots + \Gamma_k\xi^k + \dots)$ при $\xi \rightarrow \infty$.

Для начальных условий вида $f(u) = -u^k$, $k = 3, 5, 7, \dots$, получаются специальные автомодельные решения. Их род не превосходит единицы. Эти решения имеют вид $u_i(x, t) = t^{\frac{1}{k-1}} U_i(t^{-\frac{k}{k-1}} x)$, $i = 1, 2, 3$. Действительно, при замене переменных $X = t^{-\frac{k}{k-1}} x$, $u(x, t) = t^{\frac{1}{k-1}} U(t^{-\frac{k}{k-1}} x)$, $u_i(x, t) = t^{\frac{1}{k-1}} U_i(t^{-\frac{k}{k-1}} x)$, $i = 1, 2, 3$, система и уравнение характеристик $x = 6tu + f(u)$ превращаются в

$$(4) \quad X = \lambda_i(\vec{U}) - \left[\frac{1}{2} \lambda_i(\vec{U}) - U_1 - U_2 - U_3 \right] \frac{\partial}{\partial U_i} \frac{\Gamma_k(\vec{U})}{Z_k} - \frac{\Gamma_k(\vec{U})}{Z_k}, \quad X = 6U - U^k,$$

где $\vec{U} = (U_1, U_2, U_3)$. Из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для $x = -u^k$, $k = 3, 5, 7, \dots$, уравнения Уизема имеют глобальное автомодельное однофазное решение $u_1 > u_2 > u_3$, $u_i(x, t) = t^{\frac{1}{k-1}} U_i(t^{-\frac{k}{k-1}} x)$, $i = 1, 2, 3$, внутри каспа на (x, t) -плоскости $x_-(k)t^{\frac{k}{k-1}} < x < x_+(k)t^{\frac{k}{k-1}}$, где $x_-(k) < x_+(k)$ — две вещественные константы, а $t > 0$. На границе каспа однофазное решение сшивается C^1 -гладким образом с решением $u(x, t)$ нуль-фазного уравнения. Константа $x_-(k)$ определяется из соотношения $x_-(k) = -6\frac{k-1}{k}(2z_-(k) - 1) \left[\frac{6}{k}(1 + 2(k-1)z_-(k)) \right]^{\frac{1}{k-1}}$, $k = 3, 5, 7, \dots$, где $z_-(k) > 1$ — единственное вещественное решение уравнения $F(-k + 2, 2, \frac{5}{2}; z) = 0$. Здесь $F(a, b, c; z)$ — гипергеометрическая функция. Константа $x_+(k)$ определяется из соотношения $x_+(k) = 2\frac{k-1}{k}(2z_+(k) - 3) \left[\frac{2}{k}(3 + 2(k-1)z_+(k)) \right]^{\frac{1}{k-1}}$, $k = 3, 5, 7, \dots$, где $z_+(k) > 1$ — единственное вещественное решение уравнения $F(-k + 2, 2, \frac{7}{2}; z) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. При $k \rightarrow \infty$ решение (4) стремится к решению из [5] с начальными данными в виде ступеньки. Предельное решение теряет C^1 -гладкость.

В соответствии с результатами [6], решение уравнений Уизема с полиномиальными начальными условиями существует при всех x и при $t \geq 0$ и имеет род не больше N . Теорема 2 показывает, что существует время T такое, что при всех $t > T$ решение уравнений Уизема с этими начальными условиями имеет род $g \leq 1$. Отсюда выводится следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Решение уравнений Уизема (1) с полиномиальными начальными условиями при $t \rightarrow +\infty$ асимптотически стремится к автомодельному решению (4) с начальными условиями $x = -u^{2N+1}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Whitham G. B. Linear and Nonlinear Waves. New York: Wiley, 1974. [2] Дубровин Б. А., Новиков С. П. // УМН. 1989. Т. 44. № 6. С. 29–98. [3] Tian F. R. // Comm. Pure Appl. Math. 1993. V. 46. P. 1093–1129. [4] Tian F. R. // Comm. Math. Phys. 1994. V. 166. P. 79–115. [5] Гуревич А. Г., Питаевский Л. П. // Письма ЖЭТФ. 1973. [6] Grava T. // SISSA Preprint. 1997. 42/97/FM, solv-int/9707011.

Италия
E-mail: grava@sissa.it

Принято редколлегией
26.01.1999