Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. М. Гуревич, А. А. Темпельман, Хаусдорфова размерность и термодинамический формализм, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 2, 171–172

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm139>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 15:20:17

ХАУСДОРФОВА РАЗМЕРНОСТЬ И ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ФОРМАЛИЗМ

Б. М. Гуревич, А. А. Темпельман

На пространстве $S^T = \{x : T \rightarrow S\}$, где T – счетное, а S – конечное множество, можно многими способами ввести метрику, согласованную с топологией, порождаемой цилиндрическими множествами. Мы опишем класс метрик, относительно которых хаусдорфову размерность всего пространства и его частей можно связать с основными понятиями термодинамического формализма [1]. Для ряда частных случаев близкие задачи уже неоднократно рассматривались (см. [2] и указанную там литературу).

1. При любом $V \subset T$ будем называть элементы x множества S^V *конфигурациями на V* . Если $V \subset W$, то для каждой конфигурации $x \in S^W$ определено ее ограничение x_V на V . Пусть заданы: последовательность конечных множеств $T_n \uparrow T$, непустое τ_c -замкнутое множество $X \subset S^T$, определенное локально-конечной системой ограничений (ср. [1; §1.1]), и последовательность функций $a_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям: (а) $a_n(x) > 0$ при всех $x \in X$, $n \geq 1$; (б) $a_n(x) = a_n(x')$, если $x_{T_n} = x'_{T_n}$; (с) $a_n(x) \downarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и всех $x \in X$.

Пусть $X_V = \{x_V, x \in X\}$, $V \subset T$, и $C_n(x) = \{x' \in X : x_{T_n} = x'_{T_n}\}$, $x \in X$, $n \geq 1$. Для любых $r > 0$, $b \geq r$, $x \in X$ положим $l(x, r, b) = \max\{n \in \mathbb{Z}^+ : ba_n(x) \geq r\}$. Свойства функций a_n гарантируют, что $l(x, r, b)$ корректно определено, причем $\sup_x l(x, r, b) < \infty$ при всех r, b и $\inf_x l(x, r, b) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$ и всех $b > 0$.

Пусть на X задана метрика ρ и $B_\rho(x, r) = \{x' \in X : \rho(x, x') < r\}$, $r > 0$, $x \in X$. При $n \in \mathbb{N}$, $b > 0$ поставим в соответствие каждой точке y шара $B_\rho(x, ba_n(x))$ цилиндр $C_{n(y)}(y)$, где $n(y) = l(y, ba_n(x), b)$. Пусть $L_\rho(x, n, b)$ – максимальное из таких l , что среди этих цилиндров существует l попарно не пересекающихся. Определим *индекс Морана* равенством $L_\rho(\{a_n\}, b) = \sup_{x, n} L_\rho(x, n, b)$ (ср. [2], [3]). Назовем метрику ρ *согласованной с последовательностью $\{a_n\}$* , если существуют такие $b_1, b_2 > 0$, что (i) $\rho(x, x') \leq b_1 a_n(x)$ при $x_{T_n} = x'_{T_n}$ и (ii) $L_\rho(\{a_n\}, b_2) < \infty$.

Естественный класс таких метрик получается с помощью геометрических конструкций, отвечающих X и $\{a_n\}$ (см. [2], [3]).

Введем теперь класс последовательностей $\{a_n\}$, связанных с моделями статистической физики на T . Эти модели задаются потенциалами (см. [1], [4]). Пусть $\mathcal{F}$ – совокупность конечных множеств $F \subset T$ и $X^0 = \bigcup_{V \in \mathcal{F}} X_V$. Будем считать потенциал U функцией, заданной на X^0 , и писать $U(V, x)$ вместо $U(x)$, $x \in X_V$, $V \in \mathcal{F}$. Предположив, что $\|U\| < \infty$, где

$$\|U\| = \sup_{t \in T} \sum_{V: t \in V \in \mathcal{F}} \max_{x \in X_V} |U(V, x)|,$$

обозначим через $E^{(U)}(V, x)$, $Z^{(U)}(V)$ и $E^{(U)}(V, x; \overline{V}, x_{\overline{V}})$ соответственно *энергию конфигурации $x \in X_V$* , $V \in \mathcal{F}$, *статистическую сумму в “объеме” V* (с пустыми граничными условиями) и *энергию взаимодействия* конфигурации x_V и конфигурации $x_{\overline{V}}$, где $x \in X$ и $\overline{V} = T \setminus V$. Предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (\text{card}(T_n))^{-1} \ln Z^{(U)}(T_n) = P(U, \{T_n\})$, если он существует, будем называть *давлением*, отвечающим потенциалу U и последовательности множеств $\{T_n\}$.

Нам понадобятся следующие условия (последнее из которых было с иной целью сформулировано Рюэлем [1]):

- (A) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\text{card}(T_n))^{-1} \inf_{x \in X} E^{(U)}(T_n, x_{T_n}) > 0$;
- (B) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\text{card}(T_n))^{-1} \sup_{x \in X} |E^{(U)}(T_n, x_{T_n}; \overline{T}_n, x_{\overline{T}_n})| = 0$;
- (C) $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{card}(T_{n+1}) / \text{card}(T_n) = 1$;
- (D) *существует такая последовательность множеств $T'_n \subset T$, $n = 1, 2, \dots$, что $T_n \subset T'_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{card}(T'_n) / \text{card}(T_n) = 1$ и для любых $x, y \in X$ найдется $z \in X$ с $z_{T_n} = x_{T_n}$, $z_{T \setminus T'_n} = y_{T \setminus T'_n}$.*

Легко видеть, что при выполнении условия (А) последовательность функций

$$a_n^{(U)}(x) = \exp[-E^{(U)}(T_n, x_{T_n})], \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in X,$$

удовлетворяет условиям (а)–(с).

ТЕОРЕМА 1. Если $\|U\| < \infty$, выполняется условие (А) и найдется $\beta_0 \geq 0$, для которого давление $P(\beta_0 U, \{T_n\})$ существует и равно нулю, то для любой метрики ρ , согласованной с последовательностью функций $a_n^{(U)}$, хаусдорфова размерность $d_H(X, \rho)$ множества X не превосходит β_0 ; если, кроме того, выполняются условия (В)–(D), то $d_H(X, \rho) = \beta_0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Можно показать, что при условиях (А)–(D) хаусдорфова размерность всякой гиббсовской меры с потенциалом U равна $d_H(X, \rho)$.

2. Рассмотрим более конкретную ситуацию. Пусть $T = \mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$. Для любых $V \subset T$, $t \in T$ определим отображение $\sigma_V^t: S^V \rightarrow S^{V-t}$ равенством $(\sigma_V^t x)(t') = x(t+t')$, $t' \in V-t$, $x \in S^V$. Положим $\sigma = \{\sigma_T^t, t \in T\}$. Пусть множество X из п. 1 непусто и σ -инвариантно, а потенциал $U: X^0 \rightarrow \mathbb{R}$ инвариантен в том смысле, что $U(V+t, x) = U(V, \sigma_{V+t}^t x)$, $t \in T$, $V \in \mathcal{F}$, $x \in X_{V+t}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если $U(V, x) \geq 0$ при всех $V \in \mathcal{F}$, $x \in X_V$ и найдется такое $V^+ \in \mathcal{F}$, что $E^{(U)}(V^+, x) > 0$ при всех $x \in X_{V^+}$ (локальная положительность U), то выполняется условие (А).

Назовем последовательность $T_n \uparrow T$ регулярной, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{card}(T_n \Delta (T_n + t)) / \text{card}(T_n) = 0$ при всех $t \in T$ и $\sup_n \text{card}(t - t', t, t' \in T_n) / \text{card}(T_n) < \infty$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть регулярная последовательность $\{T_n\}$ удовлетворяет условию (С), а потенциал U с $\|U\| < \infty$ инвариантен и локально положителен. Тогда для любой метрики ρ на X , согласованной с последовательностью $\{a_n^{(U)}\}$, выполняется соотношение Боуэна $P(d_H(X, \rho)U) = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ruelle D. Thermodynamic Formalism. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1978.
- [2] Pesin Ya. B. Dimension Theory in Dynamical Systems. Chicago: Chicago Univ. Press, 1997.
- [3] Pesin Ya. B., Weiss H. // Commun. Math. Phys. 1996. V. 182. P. 105–153. [4] Георги Х.-О. Гиббсовские меры и фазовые переходы. М.: Мир, 1992.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова;
Университет штата Пенсильвания, США
E-mail: bmg@gibbs.math.msu.su arkady@stat.psu.edu

Принято редколлегией
26.01.1999