Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Е. Пушкарь, Ю. В. Чеканов, Комбинаторика фронтов лежандровых зацеплений и 4-гипотезы Арнольда, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 1, 99–154

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1390>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 14:43:01

УДК 514.7+515.16

КОМБИНАТОРИКА ФРОНТОВ ЛЕЖАНДРОВЫХ
ЗАЦЕПЛЕНИЙ И 4-ГИПОТЕЗЫ АРНОЛЬДА

П. Е. ПУШКАРЬ, Ю. В. ЧЕКАНОВ

На выпуклой гладкой кривой на плоскости найдется по меньшей мере четыре точки, в которых ее кривизна достигает экстремума; кроме того, в случае кривой общего положения у нее найдется эквидистанта, имеющая по меньшей мере четыре точки возврата. В. И. Арнольд сформулировал на языке контактной топологии гипотезы о коориентированных фронтах на плоскости, обобщающие эти классические утверждения — гипотезу о четырех вершинах и гипотезу о четырех точках возврата. Настоящая статья посвящена доказательству этих гипотез и некоторых смежных утверждений. Основным ингредиентом доказательства, наряду с несложным обобщением теории Штурма—Гурвица, является построенная в работе теория псевдоинволюций, доставляющая описание комбинаторной структуры фронтов на цилиндре. Обсуждается также связь теории псевдоинволюций с перестройками морсовских комплексов в однопараметрических семействах.

Библиография: 25 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	100
§ 1. Применение теоремы Гурвица	106
§ 2. Псевдоинволюции и теорема о продолжении	108
§ 3. Доказательство теоремы о продолжении	113
§ 4. Неоднозначность непрерывного продолжения и монодромия псевдоинволюций	120
§ 5. Продолжение псевдоинволюций на дискриминант	123
§ 6. Комбинаторика разбиений фронтов	125
§ 7. Теоремы Гурвица для фронтов	129
§ 8. Доказательства обобщений теоремы Гурвица	131
§ 9. Гипотезы Арнольда	137
§ 10. Критические точки лежандровых зацеплений	142
§ 11. Инварианты лежандровых зацеплений	145
§ 12. Производящие семейства и псевдоинволюции	149
Список литературы	153

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00655).

Введение

0.1. Контактные многообразия, лежандровы подмногообразия, фронты. Контактная форма на многообразии V размерности $2n + 1$ – это такая 1-форма α , что форма $\alpha \wedge (d\alpha)^n$ нигде не обращается в нуль (все встречающиеся в статье объекты предполагаются C^∞ -гладкими, если не оговорено противное). Контактным многообразием называется многообразие V^{2n+1} , снабженное полем ξ касательных гиперплоскостей $\xi_x \subset T_x V$, локально задаваемых как множества нулей контактной 1-формы: $\xi = \ker \alpha$. Если поле ξ коориентируемо, то такая форма определена глобально. Подмногообразие L размерности n контактного многообразия (V^{2n+1}, ξ) называется лежандровым, если $T_x L \subset \xi_x$ для всех $x \in L$; при $\xi = \ker \alpha$ это условие эквивалентно условию $\alpha|_L \equiv 0$.

Пусть M – гладкое многообразие, тогда 1-струи функций на M образуют многообразие $J^1(M) = T^*M \times \mathbb{R}$. Контактная структура на $J^1(M)$ задается естественной 1-формой $\alpha = du - p dq$, где u – координата на $\mathbb{R}$, (p, q) – канонические координаты Лиувилля на T^*M . Другой важный пример контактного многообразия представляет собой сферизация ST^*N кокасательного расслоения гладкого многообразия N – многообразия коориентированных касательных к N гиперплоскостей (контактных элементов). Естественная коориентированная контактная структура на ST^*N задается следующей конструкцией: коориентированная гиперплоскость в касательном пространстве к точке $X \in ST^*N$ есть прообраз под действием дифференциала проекции $\rho: ST^*N \rightarrow N$ коориентированной гиперплоскости $X \subset TN$.

Пусть (V, ξ) – контактное многообразие. Гладкое расслоение $\tau: (V, \xi) \rightarrow B$ называется лежандровым, если его слои – лежандровы подмногообразия. Фронтом лежандрова подмногообразия $L \subset V$ называется его проекция $\tau(L) \subset B$. Всякая точка $x \in L$ определяет гиперплоскость $\tau_* \xi_x \subset T_{\tau(x)} B$, которая гладко зависит от точки x и совпадает с касательной гиперплоскостью $T_{\tau(x)}(\tau(L))$ в гладких точках фронта, т.е. в точках, в которые лежандрово многообразие проецируется диффеоморфно. Будем называть эту гиперплоскость касательной гиперплоскостью к фронту $\tau(L)$. Естественные проекции $\rho: ST^*N \rightarrow N$, $\sigma: J^1(M) \rightarrow J^0(M) = M \times \mathbb{R}$ являются лежандровыми расслоениями. Гиперплоскости, касательные к фронтам проекции σ , не вертикальны (не содержат направления u); гиперплоскости, касательные к фронтам проекции ρ , обладают естественной ориентацией, индуцированной ориентацией контактной плоскости. Всякое лежандрово многообразие общего положения в $J^1(M)$ (и, более того, всякое лежандрово многообразие, встречающееся в общем конечнопараметрическом семействе) восстанавливается по своему фронту; это же верно для лежандровых подмногообразий в ST^*N и их коориентированных фронтов в N .

Предположим, что размерность контактного многообразия равна трем. Тогда фронт общего лежандрова зацепления (компактного лежандрова подмногообразия) есть кривая, особенности которой – точки трансверсального самопересечения и полукубические точки возврата (клювы). Клювы соответствуют точкам касания со слоем проекции. Всякая компактная кривая в $J^0(M)$, $\dim M = 1$, с такими особенностями, не имеющая вертикальных касательных, является фронтом лежандрова зацепления в $J^1(M)$; всякая коориентированная компактная кривая в N , $\dim N = 2$, с такими особенностями является фронтом лежандрова зацепления в ST^*N .

Одним из основных результатов настоящей работы является теорема 0.1, сформулированная В. И. Арнольдом в качестве гипотезы [1]:

ТЕОРЕМА 0.1 (гипотеза Арнольда о четырех точках возврата). Пусть $\{L_{t \in [0,1]}\}$ – такой гладкий путь в пространстве лежандровых узлов в $ST^*\mathbb{R}^2$, что фронты $\rho(L_0)$, $\rho(L_1)$ – это диффеоморфные окружности выпуклые кривые с противоположными ориентациями. Тогда найдется такое $t_0 \in [0, 1]$, что лежандров узел L_{t_0} касается слоев проекции ρ по меньшей мере в четырех точках. Если семейство $\{L_t\}$ общего положения, то найдется такое $t_0 \in [0, 1]$, что фронт $\rho(L_{t_0})$ имеет по меньшей мере четыре клюва.

0.2. Вершины. Для формулировки другой теоремы, также сформулированной В. И. Арнольдом в качестве гипотезы, нам понадобится понятие *вершины лежандровой кривой* в $ST^*\mathbb{R}^2$. Дадим необходимые определения. Для лежандрова зацепления $L \subset ST^*\mathbb{R}^2$ определим обобщенное отображение кривизны $\text{Curv}_L: L \rightarrow S^1 = \mathbb{RP}^1$. Обозначим через ξ векторное расслоение над $ST^*\mathbb{R}^2$, состоящее из лежащих в контактных плоскостях векторов, и рассмотрим его проективизацию $P\xi$. Пусть $z \in L$. Прямая $l_z \subset \xi_z$, касательная к L в точке z , определяет элемент слоя над точкой z расслоения $P\xi$. Мы построим тривиализацию расслоения ξ . Тем самым будет определена тривиализация расслоения $P\xi$ – отображение тотального пространства расслоения $P\xi$ в $\mathbb{RP}^1$. Отображение $\text{Curv}_L: L \rightarrow \mathbb{RP}^1$ есть композиция отображения $z \mapsto l_z$ и этого тривиализующего отображения.

Для построения тривиализации расслоения ξ зафиксируем на $\mathbb{R}^2$ евклидову структуру и ориентацию. Контактный элемент из $ST^*\mathbb{R}^2$ однозначно представим единичным ковектором $\cos q dx_1 + \sin q dx_2 \in T_{(x_1, x_2)}^*\mathbb{R}^2$, где (x_1, x_2) – ориентированные евклидовы координаты на $\mathbb{R}^2$, $q \in S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Таким образом, (x_1, x_2, q) – координаты на $ST^*\mathbb{R}^2$. Естественная контактная структура на $ST^*\mathbb{R}^2$ задается формой $\cos q dx_1 + \sin q dx_2$. Векторные поля $v_0 = \frac{\partial}{\partial q}$, $v_1 = -\sin q \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos q \frac{\partial}{\partial x_2}$ касаются контактного распределения и задают его тривиализацию. Пусть $z \in L$, $w = a_0 v_0(z) + a_1 v_1(z) \in T_z L$ – ненулевой касательный вектор. Представим $\mathbb{RP}^1$ как $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ и положим $\text{Curv}_L(z) = \frac{a_0}{a_1}$, если $a_1 \neq 0$, и $\text{Curv}_L(z) = \infty$, если $a_1 = 0$.

(Отметим, что векторные поля v_0 и v_1 допускают следующее геометрическое описание. Поле v_0 всюду касается слоя расслоения $\rho: ST^*\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ и отвечает вращению со скоростью 1 контактного элемента, приложенного в данной точке. Поле v_1 отвечает сдвигу со скоростью 1 контактного элемента вдоль прямой (геодезической), касающейся данного элемента. Это описание позволяет немедленно перенести конструкцию отображения Curv_L на случай лежандровых зацеплений в ST^*M^2 , где M^2 – двумерное ориентированное риманово многообразие.)

Отображение Curv_L обобщает понятие кривизны плоской кривой в следующем смысле.

УТВЕРЖДЕНИЕ 0.2. Если L касается слоя проекции ρ в точке z , то $\text{Curv}_L(z) = \infty$, если не касается, то число $\text{Curv}_L(z)$ с точностью до знака совпадает с кривизной фронта $\rho(L)$ в точке $\rho(z)$.

Утверждение 0.2 доказывается в §1. Назовем критические точки отображения Curv_L *вершинами*. Это определение согласовано с классическим определением вершин гладкой иммерсированной кривой в $\mathbb{R}^2$, если рассматривать эту кривую как

фронт лежандрова многообразия. Для лежандрова зацепления L общего положения проекции его вершин принадлежат гладкой части фронта $\rho(L)$.

Обозначим через $\mathcal{L}_1$ связную компоненту пространства лежандровых узлов в $ST^*\mathbb{R}^2$, содержащую узел, фронт которого есть окружность в $\mathbb{R}^2$. Следующая гипотеза была предложена В.И. Арнольдом (см. [4; с. 97], где она дана в иной, эквивалентной, формулировке).

ТЕОРЕМА 0.3 (гипотеза Арнольда о четырех вершинах). *Всякий лежандров узел $L \in \mathcal{L}_1$ имеет по меньшей мере четыре вершины.*

0.3. Перестройки фронтов. Если $\{L_{t \in [0,1]}\}$ – общее однопараметрическое семейство иммерсированных лежандровых подмногообразий в $ST^*\mathbb{R}^2$, то фронты $\rho(L_t)$ лишь в конечное число моментов $t_1 < \dots < t_k$ имеют более сложные особенности, чем клювы и точки трансверсального пересечения двух ветвей. Фронты $\rho(L_t)$ остаются диффеоморфными друг другу, пока t меняется в пределах одного из промежутков $[0, t_1[,]t_1, t_2[, \dots,]t_k, 1]$. При проходе параметра через значение t_i фронты семейства $\{L_t\}$ перестраиваются одним из способов, показанных на рис. 1 (направление возрастания параметра может быть противоположно указанному стрелкой; коориентации ветвей для вариантов рис. 1 а–с могут быть любыми).

Рис. 1

Перестройка фронта, изображенная на рис. 1 f (попутное самокасание), – единственная, для которой лежандрово многообразие L_{t_i} имеет самопересечение. Утверждение теоремы 0.1 для семейств общего положения имеет следующую эквивалентную форму: во всякой последовательности фронтов, получающихся друг из друга перестройками рис. 1 а–f, начало и конец которой – выпуклые кривые с противоположными коориентациями, найдется фронт с четырьмя клювами. Изучая связь этих перестроек с комбинаторикой фронтов, В.И. Арнольд построил теорию инвариантов конечного порядка для фронтов [2]. В.И. Арнольд обнаружил также, что утверждение теоремы 0.1 перестает быть верным, если разрешить лежандровым многообразиям семейства $\{L_t\}$ иметь самопересечения, т.е. если допустить перестройки попутного самокасания для фронтов [1]. Оказывается, что и для теоремы 0.3 условие вложенности является существенным: лежандров узел, фронт которого изображен на рис. 2,

имеет ровно две вершины и его можно соединить путем в классе лежандровых иммерсий с лежандровым узлом из $\mathcal{L}_1$. Теорема 0.3 для случая выпуклых гладких кривых на плоскости – это классическая теорема о четырех вершинах (см. [7]). Для замкнутых вложенных плоских кривых ее доказал С. Мухопадхя [20]. Обобщение теоремы о четырех вершинах, рассматривающее точки уплощения пространственной кривой, лежащей на границе своей выпуклой оболочки, получено В. Д. Седых [23].

Рис. 2

Важный пример семейства фронтов, для которого утверждение теоремы 0.1 следует из классической теоремы о четырех вершинах, – это эквидистанты выпуклой кривой. Изучение этого примера привело В. И. Арнольда к формулировке гипотезы о четырех точках возврата. Пусть E_0 – вложенная коориентированная кривая на плоскости. Рассмотрим семейство эквидистант $\{E_t\}_{t \in [0, T]}$, где кривая E_t получается из E_0 сдвигом каждой точки вдоль положительной нормали на расстояние t , коориентируем E_t в том же направлении.

Для общей кривой E_0 семейство эквидистант локально перестраивается как на рис. 1 а–е. С физической точки зрения семейство эквидистант описывает распространение волн в однородной изотропной среде. И для более общих распространений волн (неоднородных, неизотропных, неавтономных) перестройка попутного самокасания не может встретиться, так как волна не может догнать сама себя. Поэтому условие вложенности лежандровых подмногообразий в теореме 0.1 является естественным.

Вернемся к семейству эквидистант $\{E_t\}$. Локальные особенности кривых E_t заменяют каустику кривой E_0 – кривую, составленную из центров кривизны. В центре кривизны, соответствующем вершине кривой E_0 , каустика имеет полукубическую особенность, а семейство фронтов $\{E_t\}$ претерпевает перестройку, изображенную на рис. 1 а.

Пусть E_0 – квадратично выпуклая кривая общего положения, коориентированная внутрь. Радиус кривизны определяет гладкую функцию $R: E_0 \rightarrow \mathbb{R}$, критические точки которой – вершины кривой E_0 . Для общего значения $t \in \mathbb{R}$ число клювов кривой E_t равно количеству точек кривой E_0 , в которых функция R принимает значение t . В частности, для достаточно большого T фронт E_T есть гладкая выпуклая кривая, коориентированная наружу, а семейство лежандровых узлов с фронтами $\{E_t\}_{t \in [0, T]}$ удовлетворяет (с точностью до замены параметра t) условию теоремы 0.1. Для этого семейства утверждение теоремы 0.1 следует из классической теоремы о четырех вершинах, так как всякая функция на окружности, имеющая по крайней мере два минимума, принимает некоторое регулярное значение по меньшей мере четыре раза.

0.4. Замечательный контактоморфизм. Задание евклидовой структуры на $\mathbb{R}^2$ канонически определяет контактоморфизм между $ST^*\mathbb{R}^2$ и $J^1(S^1)$, где окружность S^1 отождествлена с единичной окружностью в $\mathbb{R}^2$. Опишем его. Контактный элемент из $ST^*\mathbb{R}^2$ однозначно представим единичным ковектором $\cos q \, dx_1 + \sin q \, dx_2 \in$

$T^*_{(x_1, x_2)}\mathbb{R}^2$, где $q \in S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Таким образом, (x_1, x_2, q) – координаты на $ST^*\mathbb{R}^2$. Естественная контактная структура на $ST^*\mathbb{R}^2$ задается формой $\cos q \, dx_1 + \sin q \, dx_2$. Отображение $ST^*\mathbb{R}^2 \rightarrow J^1(S^1)$, $(x_1, x_2, q) \mapsto (p, q, u)$, где $p = -x_1 \sin q + x_2 \cos q$, $u = x_1 \cos q + x_2 \sin q$, является контактоморфизмом, переводя форму $du - p \, dq$ в форму $\cos q \, dx_1 + \sin q \, dx_2$. Этот контактоморфизм изображен на рис. 3. Аналогичным образом определяется контактоморфизм между $ST^*\mathbb{R}^{n+1}$ и $J^1(S^n)$ при произвольном n . отождествим $ST^*\mathbb{R}^2$ и $J^1(S^1)$. Это отождествление играет важную роль в доказательстве теорем 0.1 и 0.3. Основными объектами рассмотрения при этом являются фронты $\sigma(L) \subset J^0(S^1)$ лежандровых зацеплений $L \subset J^1(S^1)$.

Рис. 3

0.5. Разбиения фронтов. Комбинаторным инструментом, используемым в доказательстве теорем 0.1 и 0.3, является теория псевдоинволюций фронтов в $J^0(M)$, где $\dim M = 1$. Дадим некоторые определения этой теории для более простого случая $M = \mathbb{R}$ и сформулируем один из результатов, используя вместо языка псевдоинволюций эквивалентный ему (при $M = \mathbb{R}$) язык правильных разбиений.

Пусть $\Sigma \subset J^0(\mathbb{R})$ – фронт общего лежандрова зацепления в $J^1(\mathbb{R})$. Кроме требования к особенностям фронта мы включаем в условие общего положения несовпадение q -координат точек самопересечения. Назовем *сечением* фронта Σ его подмножество, являющееся графиком такой непрерывной функции $h: [q_1, q_2] \rightarrow \mathbb{R}$, что точки $(q_1, h(q_1))$ и $(q_2, h(q_2))$ – клювы фронта Σ .

Неупорядоченный набор $D = \{\Gamma_1, \dots, \Gamma_N\}$ сечений фронта Σ называется *разбиением* фронта Σ , если $\Sigma = \bigcup_{i=1}^N \Gamma_i$ и любые два сечения пересекаются лишь в конечном числе точек. Назовем точку x самопересечения фронта Σ *переключающей* для разбиения D , если сечения из D , содержащие точку x , имеют в этой точке излом. Отметим, что всякое разбиение D однозначно восстанавливается по своему набору $\text{Sw}(D)$ переключающих точек. Назовем разбиение $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_N\}$ фронта Σ *правильным*, если сечения Γ_i можно разбить на пары так, что сечения из одной пары пересекаются в своих концах и только в них. Это разбиение на пары определяет свободную инволюцию θ_D на множестве D . Отметим, что не всякий фронт допускает правильное разбиение. Например, правильного разбиения нет у фронта, содержащего фрагмент “зигзаг”: $\nearrow$ (не пересекающийся с другими ветвями фронта).

Правильные разбиения были впервые рассмотрены Я.М. Элиашбергом [12]. Настоящая работа во многом явилась результатом обдумывания конструкций из [12].

0.6. Положительность. Пусть D – правильное разбиение, $x = (q_0, u_0) \in \text{Sw}(D)$. Обозначим через Γ и Γ' сечения из D , проходящие через точку x . Сечения $\Gamma, \Gamma', \theta_D(\Gamma), \theta_D(\Gamma')$ попарно различны, так как разбиение D правильное. Рассмотрим прямую $l_{q_1} = \{q = q_1\}$, где точка $q_1 \neq q_0$ близка к q_0 . Обозначим $z_1 = \Gamma \cap l_{q_1}$, $z_2 = \Gamma' \cap l_{q_1}$, $z'_1 = \theta_D(\Gamma) \cap l_{q_1}$, $z'_2 = \theta_D(\Gamma') \cap l_{q_1}$.

Назовем переключаящую точку x *положительной* (для разбиения D), если выполнено следующее условие неперемежаемости: либо отрезки $[z_1, z'_1]$ и $[z_2, z'_2]$ не пересекаются, либо один есть подмножество другого. Это определение не зависит от выбора точки q_1 .

Правильное разбиение D фронта Σ называется *положительным*, если все его переключаящие точки положительны.

ТЕОРЕМА 0.4. Пусть L и L' – общие лежандровы зацепления в $J^1(\mathbb{R})$, гомотопные в классе лежандровых зацеплений. Тогда число положительных разбиений для фронтов $\sigma(L)$ и $\sigma(L')$ одинаково.

Интересно отметить, что понятие положительного правильного разбиения было независимо введено Д.Б. Фуксом [16]. В [16] изучалась связь между существованием положительного разбиения фронта лежандрова узла $L \subset J^1(\mathbb{R})$ и аугментациями дифференциальной градуированной алгебры, ассоциированной с L (определение дифференциальной градуированной алгебры и аугментации см. в [11]).

0.7. План статьи. В §1 приведено доказательство теоремы 0.1 для частного случая, иллюстрирующее идеи полного доказательства, связанные с применением теоремы Гурвица. В §2 даны основные определения теории псевдоинволюций и сформулирован ее главный результат – теорема 2.5 о продолжении положительных псевдоинволюций на общие однопараметрические семейства фронтов. Теорема 2.5 доказана в §3, где такое продолжение строится явно. В §4 изучается (не)однозначность продолжения положительных псевдоинволюций и монодромия, возникающая при продолжении вдоль петель. Продолжение псевдоинволюций на необщие фронты изучается в §5. В §6 доказаны некоторые результаты, связанные с комбинаторикой разбиений фронтов. В §7 сформулированы обобщения теоремы Гурвица, в которой вместо функции на окружности участвует фронт лежандрова подмногообразия пространства $J^1(S^1)$. Их доказательства содержатся в §8. Гипотезы Арнольда о клювах и вершинах доказаны в §9 (с использованием результатов из предыдущих параграфов), там же приведены некоторые их обобщения и другие результаты о клювах и вершинах фронтов. Критические точки лежандровых зацеплений (и их связь с теоремой Гурвица) обсуждается в §10. Теория псевдоинволюций позволяет определить инварианты лежандровых узлов. Полученные таким образом инварианты описаны в §11. В §12 объясняется связь теории производящих семейств лежандровых многообразий и теории псевдоинволюций. В частности, показано, каким образом производящее семейство определенного вида определяет псевдоинволюцию на фронте задаваемого им лежандрова подмногообразия пространства $J^1(S^1)$.

Мы выражаем глубокую признательность нашему учителю В.И. Арнольду, открывшему, среди многого другого, замечательную связь между дифференциальной геометрией и контактной топологией. Мы очень благодарны ему за поддержку и настойчивость, без которых эта статья не была бы закончена. Мы благодарны Ф. Аикарди, О.Я. Виро, В.В. Горюнову, М.Л. Концевичу, М.Ф. Прохоровой, В.Д. Седых, Э. Феррану, Д.Б. Фуку, Я.М. Элиашбергу за стимулирующий интерес к работе и полезные обсуждения.

§1. Применение теоремы Гурвица

1.1. Кривизна и 1-формы. Дадим описание отображения Curv_L в терминах дифференциальных форм. Рассмотрим 1-формы $\omega = dq$, $\beta = -\sin q dx_1 + \cos q dx_2$ на $ST^*\mathbb{R}^2$. Они удовлетворяют соотношениям $\langle \omega, v_0 \rangle = \langle \beta, v_1 \rangle = 1$, $\langle \omega, v_1 \rangle = \langle \beta, v_0 \rangle = 0$, где v_0, v_1 – векторные поля, участвующие в определении отображения Curv_L в п. 0.2. Поэтому для любой точки $z \in L$ и любого ненулевого касательного вектора $w \in T_z L$ выполняется $\text{Curv}_L(z) = \langle \omega(z), w \rangle : \langle \beta(z), w \rangle$.

1.2. Доказательство утверждения 0.2. Если L касается слоя проекции ρ , то $\langle \beta(z), w \rangle = 0$ и утверждение доказано. Пусть L не касается слоя проекции ρ в точке z . Выберем такую локальную параметризацию $t \mapsto (x_1(t), x_2(t), q(t))$, $0 \mapsto z$ зацепления L , что $\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 \equiv 1$, т.е. отображение $t \mapsto (x_1(t), x_2(t))$ есть натуральная параметризация фронта $\rho(L)$. Кривизна фронта $\rho(L)$ в точке $\rho(z)$ по определению равна $\sqrt{\ddot{x}_1^2(0) + \ddot{x}_2^2(0)}$. Проверим, что это число совпадает с $|\dot{q}(0)|$. Из условия контактности $\dot{x}_1 \cos q + \dot{x}_2 \sin q = 0$ и условия $\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 \equiv 1$ вытекает, что $(\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t)) = \pm(\sin(q(t)), -\cos(q(t)))$ при всех t . Следовательно, $(\ddot{x}_1(t), \ddot{x}_2(t)) = \pm(\cos(q(t)), \sin(q(t)))\dot{q}(t)$ и потому $\sqrt{\ddot{x}_1^2(0) + \ddot{x}_2^2(0)} = |\dot{q}(0)|$. Поскольку $\langle \omega(z), (\dot{x}_1(0), \dot{x}_2(0), \dot{q}(0)) \rangle = \dot{q}(0)$ и $\langle \beta(z), (\dot{x}_1(0), \dot{x}_2(0), \dot{q}(0)) \rangle = -\dot{x}_1(0) \sin(q(0)) + \dot{x}_2(0) \cos(q(0)) = \pm 1$ (так как единичные векторы $(\cos(q(0)), \sin(q(0)))$ и $(\dot{x}_1(0), \dot{x}_2(0))$ ортогональны), получаем $\text{Curv}_L(z) = \pm \dot{q}(0)$. $\square$

1.3. Кривизна и дифференциальный оператор Штурма. Пусть $L \subset ST^*\mathbb{R}^2 = J^1(S^1)$ – лежандрово зацепление. Нам понадобится описание в терминах фронта $\sigma(L)$ множества точек, в которых L касается слоев проекции ρ . Обозначим через G_L множество неособых точек проекции $\sigma|_L$. Определим отображение $F_L: L \rightarrow \mathbb{RP}^1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Положим $F_L(y) = \infty$, если $y \notin G_L$. В окрестности точки $y \in G_L$ лежандрово зацепление L совпадает с 1-графиком $j^1 h$ некоторой функции $h: U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset S^1$, т.е. задается уравнениями $u = h(q)$, $p = h'(q)$, где $q \in U$. Рассмотрим дифференциальный оператор Штурма $D_1 h = d^2 h / dq^2 + h$ и положим $F_L(y) = D_1 h(q_y)$, где q_y – q -координата точки y .

ЛЕММА 1.1. *Отображения F_L и $1/\text{Curv}_L$ совпадают (полагаем $1/0 = \infty$, $1/\infty = 0$). Точка z – особая точка проекции $\rho|_L$, если и только если $z \in G_L$ и $F_L(z) = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $z \in L$ – особая точка проекции $\sigma|_L$, то $F_L(z) = \infty$, а $\text{Curv}_L(z) = 0$, так как $\beta|_L(z) = dq|_L(z) = 0$. Пусть $z \in G_L$, L совпадает с $j^1 h$ вблизи z . Тогда $1/\text{Curv}_L(z) = \langle \beta(z), v \rangle / \langle \omega(z), v \rangle$. Вектор $\zeta = \frac{\partial}{\partial q} + h'(q_z) \frac{\partial}{\partial u} + h''(q_z) \frac{\partial}{\partial p}$, где q_z – q -координата точки z , касается L в точке z . Поскольку $\beta = -\sin q dx_1 + \cos q dx_2 = dp + u dq$, получаем $1/\text{Curv}_L(z) = \langle \beta(z), \zeta \rangle / \langle \omega(z), \zeta \rangle = h''(q_z) + h(q_z) = F_L(z)$. Второе утверждение леммы следует из того, что равенство $\text{Curv}_L(z) = \infty$ равносильно $\beta|_L(z) = 0$, а $\beta|_L(z) = 0$ тогда и только тогда, когда вектор $v_0(z)$ касается L . $\square$

1.4. Теорема Гурвица и гладкие фронты. При доказательстве теоремы 0.1 можно считать, что начало координат на плоскости лежит внутри (квадратично выпуклых) фронтов $\rho(L_0), \rho(L_1)$. Из этого вытекает, что фронт $\sigma(L_0)$ (соответственно $\sigma(L_1)$) является графиком отрицательной (соответственно положительной) гладкой

функции на S^1 . Заметим, что если $\{\rho(L_t)\}$ – семейство эквидистант, то фронты $\sigma(L_t)$ получаются из фронта $\sigma(L_0)$ сдвигом вдоль координаты u .

Предположим, что фронты $\sigma(L_t)$ являются графиками гладких функций H_t . Следующее доказательство теоремы 0.1 для этого частного случая принадлежит В.И. Арнольду [1]. Пусть $t_0 \in [0, 1]$ таково, что $\int_{S^1} H_{t_0}(q) dq = 0$. Коэффициенты при нулевой и первых гармониках ряда Фурье функции $D_1 H_{t_0}$ равны нулю. По теореме Гурвица [19] функция $D_1 H_{t_0}$ обращается в нуль по меньшей мере четыре раза. Поскольку нули функции $D_1 H_{t_0}$ соответствуют нулям отображения $F_{L_{t_0}}$, это доказывает утверждение теоремы 0.1 для такого семейства.

1.5. Теорема Гурвица и фронты с особенностями. Основная идея доказательства теоремы 0.1 заключается в переносе этого рассуждения на случай произвольного семейства $\{L_t\}$ лежандровых узлов. Мы построим такое непрерывное семейство $\{H_{t \in [0,1]}\}$ непрерывных функций на S^1 , что для любого t график функции H_t является подмножеством фронта $\sigma(L_t)$. Будет доказано, что если $\int_{S^1} H_{t_0}(q) dq = 0$, то $F_{L_{t_0}}$ имеет по меньшей мере четыре нуля.

В качестве иллюстрации рассмотрим лежандров узел L , фронт $\Sigma = \sigma(L)$ которого имеет ту же комбинаторную структуру, что и фронт, изображенный на рис. 4. Покажем, опуская детали, что если $\int_{S^1} H(q) dq = 0$, где H – непрерывная функция на S^1 , график которой есть подмножество фронта Σ , то L касается слоев проекции ρ по меньшей мере в четырех точках.

Рис. 4

Предположим для простоты, что функция F_L отлична от нуля в обоих прообразах точки самопересечения $z = (q_0, u_0)$ фронта Σ . Функцию $D_1 H$ можно рассматривать как обобщенную функцию на S^1 вида $C\delta_{q_0} + g$, где δ_{q_0} – δ -функция с носителем в точке q_0 , g – непрерывная функция на $S^1 \setminus \{q_0\}$, имеющая ненулевые пределы слева и справа в точке q_0 . Из рис. 4 видно, что $C < 0$. Обобщенная функция $D_1 H$ аннулирует тригонометрические многочлены степени ≤ 1 . Отсюда несложно вывести, модифицируя стандартное доказательство теоремы Гурвица, что $D_1 H$ меняет знак по меньшей мере четыре раза. Мы считаем, что знак обобщенной функции $D_1 H$ в точке q_0 отрицателен (равен знаку числа C), и говорим, что $D_1 H$ меняет знак справа (слева) в точке q_0 , если правый (левый) предел функции g в точке q_0 положителен.

Если все четыре смены знака происходят вне точки q_0 , то утверждение доказано. Если перемены знака (одна или две) приходятся на точку q_0 , то мы будем искать недостающие нули отображения F_L на прообразах в L сторон $[z, c_l]$, $[z, c_r]$ криволинейного треугольника с вершинами z, c_r, c_l . Докажем, что если $D_1 H$ меняет знак справа (слева) в точке q_0 , то F_L обращается в нуль в одной из точек прообраза стороны $[z, c_l]$ ($[z, c_r]$). В самом деле, отрезок $[z, c_l] \subset \Sigma$ есть график некоторой функции $h: [q_l, q_0] \rightarrow \mathbb{R}$, где $c_l = (q_l, u_l)$. Функция h является гладкой всюду, кроме точки q_l ,

и h'' стремится к $-\infty$ при $q \rightarrow q_l$. Следовательно, найдется такая точка $q \in [q_l, q_0]$, что $D_1 h(q) = 0$. Для левой перемены знака утверждение аналогично. Рассуждение закончено.

Доказательство теоремы 0.1 для произвольных фронтов проходит по той же схеме. При этом строится некоторое разбиение фронта на части (обобщающее разбиение рассмотренного выше фронта Σ на четыре части). При построении этого разбиения используется теория псевдоинволюций.

1.6. План доказательства теоремы 0.3. Мы показываем, что фронт $\sigma(L)$ всякого лежандрова узла $L \in \mathcal{L}_1$ содержит непрерывное сечение $\{u = H_L(q)\}$ расслоения $J^0(S^1) \rightarrow S^1$, непрерывно зависящее от L . Сдвиг лежандрова зацепления L (и фронта $\sigma(L)$) вдоль u переводит вершины в вершины. Доказательство теоремы 0.3 использует следующий трюк: сдвигая L вдоль направления u , мы добиваемся того, что $\int_{S^1} H_L(q) dq = 0$. Используя те же рассуждения, что и в доказательстве теоремы 0.1, указываем четыре точки, в которых F_L обращается в нуль. Вершины L – это критические точки отображения F_L . Мы докажем (используя аналог леммы Ролля для отображений в окружность), что между любыми двумя соседними нулями из этих четырех найдется вершина лежандрова узла L . Это завершит доказательство.

§2. Псевдоинволюции и теорема о продолжении

2.1. Особенности фронтов. Пусть $M = S^1$, или $M = \mathbb{R}$, или $M = I$, где I – отрезок в $\mathbb{R}$ или S^1 . В случае, когда $M = I$, мы будем называть *лежандровым зацеплением* в $J^1(M)$ компактное лежандрово подмногообразие L с краем такое, что $\partial L = \partial J^1(M) \cap L$ (т.е. проекция $J^1(I) \rightarrow I$ отображает край L в концы отрезка I), L трансверсально $\partial J^1(I)$ во всех точках своего края, любые две точки края L , проецирующиеся в один конец отрезка I , имеют различные u -координаты. Обозначим через π проекцию $J^0(M) \rightarrow M$, $(q, u) \mapsto q$, через σ – проекцию $J^1(M) \rightarrow J^0(M)$. Пусть $\Sigma = \sigma(L) \subset J^0(M)$ – фронт лежандрова зацепления $L \subset J^1(M)$. Обозначим через G_Σ множество неособых точек фронта Σ (в том числе проекции краевых точек L), через X_Σ множество трансверсальных двойных самопересечений, через C_Σ множество невырожденных клювов (точек, в окрестности которых фронт диффеоморфен полукубической параболе), через $Z_\Sigma = \Sigma \setminus (G_\Sigma \cup X_\Sigma \cup C_\Sigma)$ множество точек, в которых фронт имеет более сложную особенность. В случае, когда $M = I$, такую точку $x \in \Sigma$, что $\pi(x) \in \partial I$, мы относим к G_Σ .

В пространстве $\mathcal{L}$ всех лежандровых зацеплений в $J^1(M)$ рассмотрим две (особые) гиперповерхности – $\mathcal{S}$, состоящую из таких зацеплений L , что $Z_{\sigma(L)}$ непусто (т.е. у фронта $\sigma(L)$ есть сложные особенности), и $\mathcal{E}$, состоящую из таких L , для которых найдутся две особые точки фронта $\sigma(L)$ с совпадающими проекциями на M . Назовем гиперповерхность $\mathcal{D} = \mathcal{S} \cup \mathcal{E}$ *дискриминантом*. Назовем лежандрово зацепление $L \subset J^1(M)$ (и его фронт $\sigma(L)$) σ -*общим*, если $L \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{D}$.

2.2. Определение псевдоинволюции. Непрерывное отображение $P: G_\Sigma \cup C_\Sigma \rightarrow \Sigma$ называется *псевдоинволюцией* фронта $\Sigma \subset J^0(M)$, если оно удовлетворяет следующим четырем условиям:

- (PI1) $\pi|_\Sigma = \pi|_\Sigma \circ P$;
- (PI2) $P^2(x) = x$ при $P(x) \in G_\Sigma \cup C_\Sigma$;

- (PI3) $P(x) = x$, если и только если $x \in C_\Sigma$;
 (PI4) для любой точки $x \in X_\Sigma$ найдется такая окрестность $U \subset J^0(M)$, что $P(U \cap G_\Sigma)$ не пересекается с U .

2.3. Псевдоинволюции и разбиения. Пусть $\Sigma \subset J^0(M)$ – фронт лежандрова зацепления, Λ – отрезок или окружность, $\gamma: \Lambda \rightarrow \Sigma$ – такое непрерывное отображение, что: (1) композиция γ и проекции $J^0(M) \rightarrow M$ локально является вложением; (2) неособые точки фронта Σ имеют не более одного прообраза под действием γ ; (3) если Λ – отрезок, то каждый из его концов γ переводит либо в клюв фронта Σ , либо в точку края $\partial J^0(M) = \pi^{-1}(\partial M)$. Такое отображение γ , рассматриваемое с точностью до гомеоморфизмов Λ , будем называть *сечением* фронта Σ . Если $M = \mathbb{R}$ или $M = I$, то сечение γ однозначно описывается своим образом $\Gamma = \gamma(\Lambda)$, который мы также будем называть сечением (и использовать наравне с γ). Таким образом, это определение согласовано с определением, данным во введении для случая $M = \mathbb{R}$.

Пусть $\Sigma \subset J^0(M)$ – σ -общий фронт. *Разбиением* фронта Σ называется такое множество D сечений фронта Σ , что каждая неособая точка фронта Σ принадлежит образу ровно одного сечения из D . Пусть $x \in X_\Sigma$, тогда найдутся такие сечения $\gamma_i: \Lambda_i \rightarrow \Sigma$ ($i \in \{1, 2\}$) из D и точки $s_i \in \Lambda_i$, что $\gamma_i(s_i) = x$ (если $\gamma_1 = \gamma_2$, то $s_1 \neq s_2$). Назовем точку x *переключающей* для разбиения D , если образы под действием γ_1, γ_2 малых окрестностей точек s_1, s_2 имеют излом в точке x , и *непереключающей*, если они гладки. Множество переключающих точек разбиения D обозначим через $\text{Sw}(D)$. Отображение $D \mapsto \text{Sw}(D)$ задает взаимно однозначное соответствие между множеством разбиений фронта Σ и множеством подмножеств множества X_Σ .

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. *Всякая псевдоинволюция P σ -общего фронта $\Sigma \subset J^0(M)$ однозначно определяет разбиение D_P фронта Σ и свободную инволюцию $\theta_P: D_P \rightarrow D_P$ такие, что для любого сечения $\gamma: \Lambda \rightarrow \Sigma$ из D_P и любой точки $x \in \gamma(\Lambda) \cap (G_\Sigma \cup C_\Sigma)$ точка $P(x)$ принадлежит образу сечения $\theta_P(\gamma)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При помощи разбиения M на части утверждение сводится к случаю, когда $M = I$ и фронт Σ имеет ровно одну особую точку (если все точки фронта Σ неособы, утверждение очевидно). Пусть x – точка самопересечения фронта Σ . Неособые компоненты фронта Σ переводятся псевдоинволюцией P в сечения фронта Σ . Два из этих сечений, Γ_1 и Γ_2 , проходят через точку x (иначе псевдоинволюция P представляла бы точки, близкие к x , в противоречие условию (PI4)). Сечения разбиения D_P в этом случае – это Γ_1, Γ_2 и неособые ветви фронта. Ясно, что требуемая инволюция θ_P существует и единственна. Случай, когда единственная особая точка Σ есть клюв, очевиден. $\square$

Элементы разбиения D_P будем называть *P-сечениями* фронта Σ . Точку $x \in X_\Sigma$ назовем *переключающей для псевдоинволюции P* , если она является переключающей для разбиения D_P , и *непереключающей* в противном случае. Множество переключающих точек псевдоинволюции P обозначим через $\text{Sw}(P)$.

Пусть $\Sigma \subset J^0(M)$ – σ -общий фронт, $M = \mathbb{R}$ или $M = I$. Назовем пару (D, θ) , где D – разбиение фронта Σ , $\theta: D \rightarrow D$ – свободная инволюция, *правильной*, если для любого сечения $\Gamma \in D$ выполняется $\pi(\Gamma) = \pi(\theta(\Gamma))$ и точки пересечения сечений Γ и $\theta(\Gamma)$ – это клювы фронта Σ .

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.2. Если $M = \mathbb{R}$ или $M = I$, то отображение $P \mapsto (D_P, \theta_P)$ является взаимно однозначным соответствием между множеством псевдоинволюций σ -общего фронта Σ и множеством правильных пар для фронта Σ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если P – псевдоинволюция фронта Σ , то пара (D_P, θ_P) является правильной по построению, данному в доказательстве утверждения 2.1. Если (D, θ) – правильная пара, то, согласно определению отображения $P \mapsto (D_P, \theta_P)$, данному в формулировке утверждения 2.1, найдется ровно одна такая псевдоинволюция P , что $(D_P, \theta_P) = (D, \theta)$. $\square$

Отметим, что при $M = \mathbb{R}$ для всякого правильного разбиения D найдется ровно одна такая инволюция $\theta: D \rightarrow D$, что пара (D, θ) правильная. Поэтому из утверждения 2.2 вытекает, что псевдоинволюции σ -общего фронта $\Sigma \subset J^0(\mathbb{R})$ находятся во взаимно однозначном соответствии с правильными разбиениями фронта Σ .

Конечность числа псевдоинволюций вытекает из следующего утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.3. Пусть $\Sigma \subset J^0(M)$ – σ -общий фронт, точка $q_0 \in M$ такова, что множество $\Sigma^{q_0} = \Sigma \cap \pi^{-1}(q_0)$ не содержит особых точек фронта. Пусть P, P' – такие псевдоинволюции фронта Σ , что $\text{Sw}(P) = \text{Sw}(P')$ и обе они одинаково действуют на множестве Σ^{q_0} . Тогда $P = P'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение достаточно доказать для случая $M = I$ (действительно, если $P \neq P'$, то различаются и ограничения псевдоинволюций на некоторый σ -общий фронт $\Sigma^I = \Sigma \cap \pi^{-1}(I) \subset J^0(I)$, где I – отрезок в M , содержащий точку q_0). Из того, что $\text{Sw}(P) = \text{Sw}(P')$, следует, что разбиения D_P и $D_{P'}$ совпадают. Остается показать, что $\theta_P(\Gamma) = \theta_{P'}(\Gamma)$ для любого сечения $\Gamma \in D_P$. Пусть Γ пересекает Σ^{q_0} в точке y . Тогда каждое из сечений $\theta_P(\Gamma), \theta_{P'}(\Gamma)$ содержит точку $P(y) = P'(y)$, и потому $\theta_P(\Gamma) = \theta_{P'}(\Gamma)$. Если Γ не пересекает Σ^{q_0} , то Γ содержит клюв. Обозначим через Γ_1 другое сечение из $D_P = D_{P'}$, содержащее этот клюв. Тогда каждое из сечений $\theta_P(\Gamma), \theta_{P'}(\Gamma)$ также содержит этот клюв, и потому $\theta_P(\Gamma) = \theta_{P'}(\Gamma)$. $\square$

2.4. Положительность. Пусть P – псевдоинволюция фронта $\Sigma \in J^0(M)$, $x = (q_0, u_0) \in \text{Sw}(P)$. Рассмотрим прямую $\{q = q_1\} \subset J^0(M)$, где точка $q_1 \neq q_0$ близка к q_0 . Обозначим через z_1, z_2 точки из $\Sigma \cap l$, близкие к точке x . Назовем точку x *положительной* (по отношению к P), если выполнено следующее условие неперемежаемости: либо отрезки $[z_1, P(z_1)]$ и $[z_2, P(z_2)]$ не пересекаются, либо один есть подмножество другого. Не положительную переключающую точку назовем *отрицательной*. Это определение не зависит от выбора точки q_1 и согласовано с определением для случая $M = \mathbb{R}$, данным во введении.

Псевдоинволюция P называется *положительной*, если все ее переключающие точки положительны.

2.5. Масловский потенциал. Пусть $l: [0, 1] \rightarrow L$ – гладкий путь общего положения с концами в множестве G_L неособых точек проекции $L \rightarrow M$. Индекс Маслова $m(l) \in \mathbb{Z}$ этого пути в случае зацепления общего положения есть число клювов на пути l , подсчитанных со знаками, определенными следующим образом. Если точка $\sigma(l(t)) \in \sigma(L)$ проходит через клюв фронта $\sigma(L)$ с нижней ветви на верхнюю, то знак равен $+1$, а если с верхней на нижнюю, то -1 . Если зацепление L необщее, то $m(l)$ определяется как индекс Маслова близкого пути на близком зацеплении общего

положения (результат не зависит от выбора шевеления). *Числом Маслова* $m(L)$ лежандрова узла называется модуль индекса Маслова пути, обходящего узел один раз. Число Маслова $m(L)$ всегда четно. Действительно, его четность совпадает с четностью числа клювов фронта $\sigma(L)$ (мы предполагаем, что L – лежандров узел общего положения). При обходе L прообразы правых ($\succ$) и левых ($\prec$) клювов фронта $\sigma(L)$ чередуются. Поэтому правых клювов столько же, сколько левых, и их общее число четно. *Число Маслова* лежандрова зацепления L – это наибольший общий делитель чисел Маслова для компонент L , диффеоморфных окружности.

Пусть $m \in \mathbb{Z}$ – неотрицательный делитель числа $m(L)$. *Масловский потенциал* зацепления L – это такая локально постоянная функция $\mu: G_L \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, что для любой пары точек $z_1, z_2 \in G_L$, лежащих на одной компоненте зацепления L , разность $\mu(z_2) - \mu(z_1)$ равна индексу Маслова пути, соединяющего z_1 с z_2 (приведенного по модулю m). Все масловские потенциалы со значением в $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ получаются из одного прибавлением функции, постоянной на каждой из компонент зацепления L .

2.6. Масловская псевдоинволюция. Точка самопересечения x фронта $\sigma(L)$ называется *масловской* относительно масловского потенциала μ зацепления L , если $\mu(z) = \mu(z')$, где z и z' – различные точки L , проектирующиеся в x . Разбиение σ -общего фронта называется *масловским* относительно масловского потенциала μ , если все его переключающие точки масловские относительно μ . Заметим, что если зацепление L связно, то для данного m разбиение фронта $\sigma(L)$ является или не является масловским независимо от выбора потенциала $\mu: G_L \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Псевдоинволюция P σ -общего фронта $\sigma(L)$ называется *масловской* относительно μ , если для любой такой пары неособых точек y, y' фронта Σ , что $P(y) = y'$ и точка y' лежит выше точки y (т.е. ее u -координата больше), для прообраза z точки y и прообраза z' точки y' в L выполнено условие $\mu(z') = \mu(z) + 1$. Назовем сечение $\gamma: \Lambda \rightarrow \Sigma$ фронта $\Sigma \subset J^0(M)$ *длинным*, если либо $M = S^1$ и Λ – окружность, либо $M = I$ и γ отображает оба конца отрезка Λ в край $\partial J^0(M)$. При проверке того, что псевдоинволюция является масловской, удобно пользоваться следующим утверждением.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.4. Пусть μ – масловский потенциал на σ -общем зацеплении $L \subset J^1(M)$, P – псевдоинволюция фронта $\Sigma = \sigma(L)$. Псевдоинволюция P является масловской относительно μ тогда и только тогда, когда разбиение D_P масловское относительно μ и для всякого длинного P -сечения найдется такая пара y, y' неособых точек фронта Σ , одна из которых принадлежит образу этого сечения, что $P(y) = y'$, точка y' лежит выше точки y , для прообраза z точки y и прообраза z' точки y' в L выполнено условие $\mu(z') = \mu(z) + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть псевдоинволюция P масловская. Докажем, что всякая переключающая точка $x \in \text{Sw}(P)$ масловская. Рассмотрим такую точку $z \in L$, что $P(\sigma(z)) = x$. Пусть z', z'' – точки на L , лежащие в различных малых полуокрестностях точки z . Точки $P(\sigma(z')), P(\sigma(z''))$ принадлежат различным гладким ветвям фронта Σ , пересекающимся в точке x . Значения масловского потенциала μ в точках z', z'' совпадают, поэтому совпадают его значения в точках L , являющихся прообразами точек $P(\sigma(z')), P(\sigma(z''))$. Следовательно, совпадают значения μ в прообразах точки x , т.е. точка x масловская. Таким образом, разбиение D_P масловское; вторая половина условия выполнена автоматически.

Докажем обратное утверждение. Так как разбиение D_R масловское, то для всякого R -сечения γ масловский потенциал μ принимает одинаковое значение на прообразах в L всех неособых точек фронта Σ , принадлежащих образу сечения γ . Поэтому для доказательства масловости R достаточно проверить, что для всякого R -сечения найдется такая пара y, y' неособых точек фронта Σ , одна из которых принадлежит образу этого сечения, что $P(y) = y'$, точка y' лежит выше точки y , для прообраза z точки y и прообраза z' точки y' в L выполнено условие $\mu(z') = \mu(z) + 1$. Для длинных сечений это условие выполнено по предположению. Образ всякого короткого (не длинного) R -сечения γ содержит клюв. Рассмотрим пару точек $y, y' \in \Sigma$ с совпадающей q -координатой, близких к этому клюву; одна из них лежит в образе сечения γ . Из определения масловского потенциала следует, что сформулированное выше условие выполнено для пары точек y, y' . $\square$

2.7. Семейства псевдоинволюций и теорема о продолжении. Гладкое однопараметрическое семейство $\{L_{t \in [a, b]}\}$ лежандровых зацеплений (и семейство их фронтов) называется σ -общим, если лежандровы зацепления L_a, L_b σ -общие, а путь $t \mapsto L_t$ трансверсально пересекает гиперповерхности $\mathcal{S}, \mathcal{E}$ в их гладких точках и не пересекает $\mathcal{S} \cap \mathcal{E}$.

Рассмотрим семейство $\{P_{t \in [a, b]}\}$ псевдоинволюций, где P_t – псевдоинволюция фронта $\sigma(L_t)$. Семейство $\{P_t\}$ называется *непрерывным*, если отображение $(t, x) \mapsto (t, P_t(x))$, определенное на множестве

$$\{(t, x) | x \in G_{\sigma(L_t)} \cup C_{\sigma(L_t)}\} \subset [a, b] \times J^0(M),$$

непрерывно. Семейство псевдоинволюций $\{P_t\}$ называется *положительным*, если псевдоинволюции P_t положительны при всех таких t , что зацепление L_t σ -общее.

Пусть D – разбиение σ -общего фронта Σ . Назовем его *эйлеровой характеристикой* число

$$\chi(D) = \frac{1}{2} \#(C_\Sigma) - \#(Sw(D)).$$

Эйлеровой характеристикой $\chi(P)$ псевдоинволюции P назовем эйлерову характеристику разбиения D_R . Семейство $\{P_t\}$ называется *характеристическим*, если эйлеровы характеристики $\chi(P_t)$ совпадают при всех таких t , что зацепление L_t σ -общее.

Пусть на L_a задан масловский потенциал μ_a . Тогда он однозначно продолжается до непрерывного (в очевидном смысле) семейства $\{\mu_{t \in [a, b]}\}$ масловских потенциалов на зацеплениях семейства $\{L_{t \in [a, b]}\}$. Семейство псевдоинволюций $\{P_t\}$ называется *масловским* по отношению к масловскому потенциалу μ_a (и к семейству масловских потенциалов $\{\mu_t\}$), если псевдоинволюция P_t масловская относительно μ_t при всех таких t , что L_t – σ -общее зацепление.

ТЕОРЕМА 2.5 (теорема о продолжении). Пусть $M = S^1$, $M = \mathbb{R}$ или $M = I$, $\{L_{t \in [a, b]}\}$ – σ -общее семейство лежандровых зацеплений в $J^1(M)$. Каждая положительная псевдоинволюция P_a фронта $\sigma(L_a)$ единственным образом продолжается до непрерывного положительного характеристического семейства $\{P_{t \in [a, b]}\}$ псевдоинволюций.

Если, кроме того, псевдоинволюция P_a масловская по отношению к масловскому потенциалу μ_a , то семейство $\{P_t\}$ также масловское по отношению к μ_a .

Определения непрерывного, положительного, характеристического семейства псевдоинволюций выдерживают смену направления параметра t . Из этого вытекает

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.6. В условиях теоремы 2.5 отображение $P_a \mapsto P_b$ является взаимно однозначным соответствием между множествами положительных псевдоинволюций для фронтов $\sigma(L_a)$ и $\sigma(L_b)$, сохраняющим эйлеровы характеристики.

Теорема 0.4 является немедленным следствием утверждения 2.6.

§ 3. Доказательство теоремы о продолжении

3.1. Расслоенные диффеоморфизмы и псевдоинволюции. Обозначим через G_M группу, состоящую из диффеоморфизмов $J^0(M)$, расслоенных над M . Расслоенный диффеоморфизм $g \in G_M$ взаимно однозначно отображает псевдоинволюции фронта $\Sigma \subset J^0(M)$ в псевдоинволюции фронта $g(\Sigma)$, при этом положительные псевдоинволюции переходят в положительные. Следующая лемма немедленно следует из определений.

ЛЕММА 3.1. Пусть $\{\Sigma_{t \in [a,b]}\}$ – σ -общее семейство фронтов в $J^0(M)$, $\{g_{t \in [a,b]}\}$ – гладкое семейство элементов группы G_M , $g_a = \text{id}$. Тогда $\{g_t\}$ взаимно однозначно отображает непрерывные семейства псевдоинволюций для семейства фронтов $\{\Sigma_t\}$ в непрерывные семейства псевдоинволюций для семейства фронтов $\{g_t(\Sigma_t)\}$. При этом положительные семейства переходят в положительные, характеристические в характеристические, масловские относительно μ_a в масловские относительно μ_a .

Если семейство зацеплений $\{L_t\}$ в теореме 2.5 не пересекает дискриминант $\mathcal{D}$, то лемма 3.1 сводит утверждение теоремы к случаю постоянного семейства ($L_t \equiv L_a$), для которого утверждение теоремы очевидно.

3.2. Типичные перестройки. Если $\{L_t\}$ – σ -общее семейство зацеплений, $L_c \in \mathcal{D}$, то фронты $\Sigma_t = \sigma(L_t)$ при проходе параметра t через значение c могут перестраиваться (с точностью до действия однопараметрических семейств расслоенных диффеоморфизмов) как показано на рис. 5 (локальные перестройки – пересечения с $\mathcal{S}$) и рис. 6 (нелокальные перестройки – пересечения с $\mathcal{E}$). Нарисованы только компоненты, участвующие в перестройке; отметим, что перестройка III с точностью до симметрий совпадает с обратной к ней перестройкой III^{-1} , перестройка XX – с перестройкой XX^{-1} , перестройка CC_+ – с перестройкой CC_+^{-1} .

Рис. 5

Рис. 6

3.3. Простые и полупростые семейства фронтов. Назовем σ -общее семейство лежандровых зацеплений $\{L_{t \in [a,b]}\}$ в $J^1(I)$ (и семейство фронтов $\{\Sigma_t = \sigma(L_t)\}$) *простым*, если “край” $\partial \Sigma_t = \Sigma_t \cap \partial(J^0(I))$ не зависит от t , $L_t \in \mathcal{D}$ ровно для одного значения параметра $t = c \in]a, b[$, фронт Σ_c содержит ровно одну особую точку в случае локальной перестройки ($L_c \in \mathcal{S}$) и ровно две особые точки с совпадающими q -координатами в случае нелокальной перестройки ($L_c \in \mathcal{E}$). Назовем σ -общее семейство лежандровых зацеплений $\{L_{t \in [a,b]}\}$ в $J^1(M)$ (и семейство фронтов $\{\Sigma_t = \sigma(L_t)\}$) *полупростым* по отношению к отрезку $I \subset M$, если фронты Σ_t совпадают вне $J^0(I)$ при всех t и семейство $\{\Sigma_t^I = \Sigma_t \cap J^0(I)\}$ фронтов в $J^0(I)$ просто. Разбивая отрезок $[a, b]$ на части и применяя лемму 3.1, мы получаем, что утверждение теоремы 2.5 достаточно доказать для полупростых семейств.

Покажем, что можно ограничиться рассмотрением простых семейств. Действительно, пусть семейство $\{\Sigma_t\}$ полупросто по отношению к отрезку I , P_a – псевдоинволюция фронта Σ_a . Тогда всякое непрерывное семейство псевдоинволюций $\{P_t^I\}$ для фронтов Σ_t^I такое, что P_a^I есть ограничение P_a , однозначно продолжается до непрерывного семейства псевдоинволюций $\{P_t\}$ для фронтов Σ_t , при этом P_t совпадает с P_a вне $J^0(I)$ при всех t . Очевидно, что семейство $\{P_t\}$ положительное, если $\{P_t^I\}$ положительное, характеристическое, если $\{P_t^I\}$ характеристическое, и масловское, если $\{P_t^I\}$ масловское.

ЛЕММА 3.2. Пусть $\{\Sigma_{t \in [a,b]}\}$ – простое семейство фронтов в $J^0(I)$, P_a и P_b – псевдоинволюции фронтов Σ_a и Σ_b , совпадающие на $\partial \Sigma_a = \partial \Sigma_b$. Тогда P_a и P_b включаются в единственное непрерывное семейство псевдоинволюций $\{P_{t \in [a,b]}\}$.

Если P_a и P_b положительны, то семейство $\{P_t\}$ положительное. Если $\chi(P_a) = \chi(P_b)$, то семейство $\{P_t\}$ характеристическое. Если $\{\mu_t\}$ – непрерывное семейство масловских потенциалов, псевдоинволюция P_a масловская относительно μ_a и все переключающие точки псевдоинволюции P_b масловские относительно μ_b , то семейство $\{P_t\}$ масловское.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При помощи леммы 3.1 псевдоинволюция P_a единственным образом включается в непрерывное семейство псевдоинволюций $\{P_t\}$, где $t \in [a, c[$, и псевдоинволюция P_b единственным образом включается в непрерывное семейство псевдоинволюций $\{P_t\}$, где $t \in]c, b]$.

Построим отображение P_c . Обозначим через $q_0 \in I$ проекцию особых точек фронта Σ_c . Пусть $x \in \Sigma_c$, $\pi(x) \neq q_0$. Рассмотрим отрезок $I' \subset I \setminus \{q_0\}$, содержащий один из концов q' отрезка I и некоторую окрестность точки $\pi(x)$. Найдутся такие $a_0 \in [a, c[$, $b_0 \in]c, b]$, что у фронта $\Sigma_t^{I'}$ нет особых точек при $t \in [a_0, b_0]$. Поскольку все псевдоинволюции P_t при $t \in [a_0, b_0] \setminus \{c\}$ одинаково действуют на $\Sigma_t^{q'} = \pi^{-1}(q') \cap \Sigma_t$, по лемме 3.1 существует и единственно такое непрерывное семейство $\{P_{t \in [a_0, b_0]}'\}$ псевдо-

инволюций фронтов $\Sigma_t^{I'}$, что $P_t'(y) = P_t(y)$ при $t \in [a_0, b_0] \setminus \{c\}$, $y \in \Sigma_t^{I'}$. Положим $P_c(x) = P_c'(x)$. Отображение $(t, y) \mapsto (t, P_t(y))$ непрерывно в точке (c, x) .

Пусть x – неособая точка фронта Σ_c , $\pi(x) = q_0$. Так как семейство фронтов $\{\Sigma_t\}$ просто, то существует и единственно непрерывное семейство сечений $\Gamma_{t \in [a, b]}$, состоящих из неособых точек фронта Σ_t , такое, что $x \in \Gamma_c$. Отображение $(t, y) \mapsto (t, P_t(y))$, уже определенное при $y \in \Gamma_t$, $t \in [a, b]$, $(t, y) \neq (c, x)$, однозначно непрерывно продолжается в точку (c, x) , так как функции $f_t: I \rightarrow \mathbb{R}$, $t \in [a, b] \setminus \{c\}$, графиками которых являются сечения $P_t(\Gamma_t)$, равномерно липшицевы и сходятся при $t \rightarrow c$ равномерно вне любой окрестности точки q_0 .

Если x – клюв фронта Σ_c , то полагаем $P_c(x) = x$. Непрерывность отображения $(t, y) \mapsto (t, P_t(y))$ в точке (c, x) следует из того, что ветви фронта, входящие в клюв, переставляются псевдоинволюцией. Непрерывность семейства $\{P_{t \in [a, b]}\}$ доказана. То, что P_c – псевдоинволюция фронта Σ_c , легко следует из непрерывности.

Пусть псевдоинволюция P_a масловская относительно μ_a и все переключающие точки псевдоинволюции P_b масловские относительно μ_b . Для всякого длинного P_b -сечения можно выбрать такую пару точек $y, y' \in \partial \Sigma_b$, одна из которых принадлежит образу этого сечения, что $P_b(y) = y'$ и точка y' лежит выше точки y . Тогда $P_a(y) = y'$ по условию леммы. Рассмотрим такие точки $z, z' \in \partial L_b$, что $\sigma(z) = y$, $\sigma(z') = y'$. Из масловости псевдоинволюции P_a получаем $\mu_a(z') = \mu_a(z) + 1$. Из непрерывности семейства $\{\mu_t\}$ следует, что ограничения μ_a и μ_b на $\partial L_b = \partial L_a$ совпадают. Значит, $\mu_b(z') = \mu_b(z) + 1$. Применяя утверждение 2.4, получаем, что псевдоинволюция P_b масловская относительно μ_b . Оставшиеся утверждения леммы теперь очевидны. $\square$

Окончание доказательства теоремы проводится отдельно для каждой из перестроек фронтов.

3.4. Перестройка I. Пусть при $t = c$ происходит перестройка I. Точка x_b самопересечения фронта Σ_b является переключающей для любой псевдоинволюции фронта Σ_b . Это следует из того, что C^1 -гладкое сечение фронта Σ_b , соединяющее два клюва, может отображаться псевдоинволюцией P_b только в сечение, имеющее излом в точке x_b . Существует ровно одна псевдоинволюция P_b фронта Σ_b , совпадающая с P_a на $\partial \Sigma_b = \partial \Sigma_a$, при этом $\chi(\Sigma_b) = \chi(\Sigma_a) = 0$. Положительность псевдоинволюции P_b вытекает из того, что между сечениями фронта Σ_b , соединяющими два клюва, нет других точек фронта Σ_b . Точка x_b масловская для любого выбора масловского потенциала. Применение леммы 3.2 завершает доказательство теоремы для случая перестройки I.

3.5. Перестройка I⁻¹. Точка самопересечения фронта Σ_a – переключающая для любой псевдоинволюции. Дальнейшие рассуждения аналогичны рассуждениям для перестройки I.

3.6. Перестройка II. Пусть P_b – положительная псевдоинволюция фронта Σ_b , совпадающая с P_a на $\partial \Sigma_b = \partial \Sigma_a$. Применяя к фронту Σ_b следующую лемму, мы получаем, что такая псевдоинволюция P_b единственна и $\text{Sw}(P_b) = \emptyset$.

ЛЕММА 3.3. Если фронт Σ имеет фрагмент, изображенный на рис. 7 справа (не пересекающийся с остальными частями фронта), то для любой положительной псевдоинволюции P точки x и y не являются переключающими.

Рис. 7

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что точка y переключающая. Тогда в точке x нарушено условие (PI4), так как ее окрестность содержит точки обоих P -сечений, сходящихся в кляве z . Значит, точка y непереклюкающая. Пусть точка x переключающая, а y непереклюкающая. Тогда точка x отрицательная, так как в этом случае $P(e_1) = e_3$ и $P(e_2)$ не лежит на отрезке $[e_1, e_3]$. $\square$

Поскольку $\chi(P_b) = \chi(P_a) = 1/2$ и у псевдоинволюций P_a, P_b нет переключающих точек, семейство псевдоинволюций с требуемыми свойствами единственно по лемме 3.2.

3.7. Перестройка Π^{-1} . Утверждение теоремы для случая перестройки Π^{-1} таким же образом следует из леммы 3.3.

3.8. Перестройка III. Разобьем случай перестройки III (см. рис. 8) на четыре подслучая III_i , где i – число переключающих точек псевдоинволюции P_a .

Рис. 8

Определим взаимно однозначное отображение $f_a: \{d_1, d_2, d_3\} \rightarrow \{e_1, e_2, e_3\}$ такое, что для каждого $i \in \{1, 2, 3\}$ найдется P_a -сечение Γ_i , соединяющее d_i с $f_a(d_i)$. Аналогичным образом всякое разбиение D фронта Σ_b определяет отображение $f_D: \{d_1, d_2, d_3\} \rightarrow \{e_1, e_2, e_3\}$.

ЛЕММА 3.4. *Отображение, сопоставляющее псевдоинволюции P_b фронта Σ_b разбиение D_{P_b} фронта Σ_b , задает взаимно однозначное соответствие между множеством псевдоинволюций фронта Σ_b , совпадающих с P_a на $\partial\Sigma_a = \partial\Sigma_b$, и множеством таких разбиений D фронта Σ_b , что $f_D = f_a$.*

Доказательство леммы 3.4 использует следующее утверждение.

ЛЕММА 3.5. *Положительная псевдоинволюция P_a не переставляет никакую пару из точек $d_i, e_i, i \in \{1, 2, 3\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $P_a(d_1) = d_2$. Тогда в точке x нарушается условие (PI4). Если $P_a(d_2) = d_3$, то точка x неперекрывающаяся (иначе условие (PI4) нарушается в точке y). Тогда точка y перекрывающаяся (иначе условие (PI4) нарушается в точке z). Точка y – отрицательная перекрывающаяся точка, противоречие. Пусть $P_a(d_1) = d_3$. Тогда точка x перекрывающаяся (иначе условие (PI4) нарушается в точке y). Получаем противоречие, так как точка x отрицательна. Точки e_i не переставляются по тем же причинам. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.4. Докажем, что $f_{D_{P_b}}(d_i) = f_a(d_i)$ для всякого $i \in \{1, 2, 3\}$. Согласно лемме 3.5, существует такое сечение Γ фронта Σ_a , состоящее из неособых точек, что $P_a(\Gamma)$ содержит d_i и $f_a(d_i)$. Сечение Γ' фронта Σ_b с теми же концами, что и сечение Γ , отображается псевдоинволюцией P_b в P_b -сечение, соединяющее d_i и $f_a(d_i)$. Значит, отображение леммы 3.4 определено корректно.

Пусть D – разбиение фронта Σ_b . Найдется ровно одна такая свободная инволюция $\theta: D \rightarrow D$, что при $\Gamma \in D, \Gamma' \in D_{P_a}$ левые концы сечений $\theta(\Gamma), \theta_{P_a}(\Gamma')$ совпадают тогда и только тогда, когда совпадают левые концы сечений Γ, Γ' . Из леммы 3.5 следует, что для всякого $\Gamma \in D$ сечения $\theta(\Gamma)$ и Γ не пересекаются. Согласно утверждению 2.2, существует ровно одна такая псевдоинволюция P_b фронта Σ_b , совпадающая с P_a над левым концом отрезка I , что $D = D_{P_b}$. Если $f_D = f_a$, то эти псевдоинволюции совпадают и над правым концом отрезка I , и потому отображение леммы 3.4 обратимо. $\square$

3.9. Перестройка Π_0 . Легко проверить, что существует ровно одно разбиение D фронта Σ_b с $f_D = f_a$ – то, для которого точки z', y', x' (см. рис. 8) неперекрывающиеся. Это разбиение задает (по лемме 3.4) псевдоинволюцию P_b , при этом $\chi(P_b) = \chi(P_a) = 0$. Поскольку у псевдоинволюции P_b нет перекрывающихся точек на Σ_b , то она положительна (и масловская, если P_a масловская). Утверждение теоремы в этом случае получается применением леммы 3.2.

3.10. Перестройка Π_1 . Пусть $\text{Sw}(P_a) = \{x\}$. Разбиение D фронта Σ_b , для которого $f_D = f_a$, единственно, x' – его единственная перекрывающаяся точка (из того, что $f_D(d_3) = e_1$, вытекает, что точки z' и y' неперекрывающиеся). По лемме 3.4 существует и единственная псевдоинволюция P_b , совпадающая с P_a на $\partial\Sigma_b = \partial\Sigma_a$, при этом $\text{Sw}(P_b) = \{x'\}$ и $\chi(P_b) = \chi(P_a) = -1$. Положительность точки x' следует из положительности точки x и леммы 3.5 (см. также лемму 3.6 ниже). Масловость точки x' следует из масловости точки x . Утверждение теоремы для случая $\text{Sw}(P_a) = \{x\}$ следует из леммы 3.2. Случай $\text{Sw}(P_a) = \{z\}$ аналогичен.

Пусть $\text{Sw}(P_a) = \{y\}$. Тогда существует ровно два разбиения D фронта Σ_b , для которых $f_D = f_a$. В первом случае все точки z', y', x' перекрывающиеся, но тогда $-3 = \chi(P_b) \neq \chi(P_a) = -1$. Во втором случае $\text{Sw}(D) = \{y'\}$ и доказательство такое же, как для $\text{Sw}(P_a) = \{x\}$.

3.11. Леммы о знаках. Сформулируем и докажем некоторые вспомогательные утверждения, которые потребуются в дальнейшем. Пусть P – псевдоинволюция σ -общего фронта $\Sigma \subset J^0(M)$, d_1 и d_2 – такие различные неособые точки фронта, что $\pi(d_1) = \pi(d_2)$ и $P(d_1) \neq d_2$. Определим знак $\varepsilon_P(d_1, d_2)$ следующим образом: $\varepsilon_P(d_1, d_2) = -1$, если пересечение отрезков $[d_1, P(d_1)], [d_2, P(d_2)]$ непусто и не совпадает ни с одним из этих отрезков; иначе полагаем $\varepsilon_P(d_1, d_2) = +1$. Пусть $x \in \text{Sw}(P)$.

Положим $\varepsilon_P(x) = +1$, если x – положительная переключающая точка псевдоинволюции P , и $\varepsilon_P(x) = -1$ в противном случае (такую переключающую точку назовем отрицательной). Заметим, что знак переключающей точки – это знак пары близких к ней неособых точек. Следующее утверждение очевидно.

ЛЕММА 3.6. Пусть P – псевдоинволюция σ -общего фронта $\Sigma \subset J^0(I)$, Γ_1, Γ_2 – различные P -сечения фронта Σ , не переставляемые инволюцией θ_P . Пусть $d_1, e_1 \in \Gamma_1$, $d_2, e_2 \in \Gamma_2$ – неособые точки фронта Σ , $\pi(d_1) = \pi(d_2)$, $\pi(e_1) = \pi(e_2)$, точка x – единственная точка самопересечения фронта Σ , проекция которой на I лежит между $\pi(d_1)$ и $\pi(e_1)$. Тогда $\varepsilon_P(d_1, d_2) = -\varepsilon_P(e_1, e_2)$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия: (1) точка x неперекрывающаяся для P ; (2) в точке x пересекаются два из сечений Γ_1, Γ_2 , $\theta_P(\Gamma_1), \theta_P(\Gamma_2)$.

ЛЕММА 3.7. Пусть P – псевдоинволюция фронта $\Sigma \subset J^0(M)$, $q \in M$, множество $\Sigma^q = \pi^{-1}(q) \cap \Sigma = \{h_1, \dots, h_{2N}\}$ состоит из неособых точек фронта Σ , занумерованных в порядке возрастания координаты u . Если $\varepsilon_P(h_{k-1}, h_k) = \varepsilon_P(h_k, h_{k+1}) = +1$, то $\varepsilon_P(h_{k-1}, h_{k+1}) = +1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем на Σ^q отношение порядка, полагая $h_{k+2} \prec \dots \prec h_{2N} \prec h_1 \prec \dots \prec h_{k+1}$. Из условия $\varepsilon_P(h_{k-1}, h_k) = +1$ вытекает, что $P(h_{k-1}) \neq h_{k+1}$. Поэтому при $k-1 \leq i < j \leq k+1$ равенство $\varepsilon_P(h_i, h_j) = +1$ имеет место, если и только если $P(h_j) \prec P(h_i)$. Из $P(h_k) \prec P(h_{k-1})$ и $P(h_{k+1}) \prec P(h_k)$ следует $P(h_{k+1}) \prec P(h_{k-1})$. $\square$

3.12. Перестройка Π_2 . Пусть $\text{Sw}(P_a) = \{x, y\}$. Единственное разбиение D фронта Σ_b с $f_D = f_a$ определяется условием $\text{Sw}(D) = \{z', x'\}$. По лемме 3.4 существует и единственная псевдоинволюция P_b , совпадающая с P_a на $\partial\Sigma_b = \partial\Sigma_a$, при этом $\text{Sw}(P_b) = \{z', x'\}$ и $\chi(P_b) = \chi(P_a) = -2$.

Докажем, что переключающие точки z', x' псевдоинволюции P_b , соответствующей разбиению D , положительны. Знак $\varepsilon_{P_b}(z')$ равен $\varepsilon_{P_b}(d_2, d_3) = \varepsilon_{P_a}(d_2, d_3)$. По лемме 3.6 $\varepsilon_{P_a}(d_2, d_3) = \varepsilon_{P_a}(y) = +1$. Следовательно, $\varepsilon_{P_b}(z') = \varepsilon_{P_a}(y) = +1$. Применяя дважды лемму 3.6, получаем $\varepsilon_{P_b}(x') = \varepsilon_{P_b}(d_1, d_3) = \varepsilon_{P_a}(d_1, d_3)$. Знак $\varepsilon_{P_a}(d_1, d_2)$ равен знаку $\varepsilon_{P_a}(x) = +1$. По лемме 3.7 $\varepsilon_{P_b}(d_1, d_3) = +1$. Значит, точка x' положительна. Если P_a масловская, то масловский потенциал μ_a принимает одинаковые значения на прообразах всех ветвей, изображенных на рис. 8, поскольку точки x, y масловские. Поэтому псевдоинволюция P_b масловская. Утверждение теоремы для случая $\text{Sw}(P_a) = \{x, y\}$ доказано. Случай $\text{Sw}(P_a) = \{y, z\}$ рассматривается так же.

Рассмотрим случай $\text{Sw}(P_a) = \{x, z\}$. Существуют ровно два разбиения D_1 и D_2 фронта Σ_b такие, что $f_{D_1} = f_{D_2} = f_a$, при этом $\text{Sw}(D_1) = \{z', y'\}$, $\text{Sw}(D_2) = \{y', x'\}$. Докажем, что ровно одна из двух псевдоинволюций $P_{\langle i \rangle}$, соответствующих разбиениям D_i , положительна. Так как $\varepsilon_{P_a}(x) = +1$, то $\varepsilon_{P_a}(d_1, d_2) = +1$. По лемме 3.6 из $\varepsilon_{P_a}(z) = +1$ следует $\varepsilon_{P_a}(d_1, d_3) = +1$. Так как $\varepsilon_{P_a}(d_1, d_2) = +1$, то по лемме 3.6 $\varepsilon_{P_{\langle 1 \rangle}}(y') = +1$. Так как $\varepsilon_{P_a}(d_1, d_3) = +1$, то по лемме 3.6 $\varepsilon_{P_{\langle 2 \rangle}}(y') = +1$. Кроме того, $\varepsilon_{P_{\langle 1 \rangle}}(z') = \varepsilon_{P_a}(d_2, d_3)$ и по лемме 3.6 $\varepsilon_{P_{\langle 2 \rangle}}(x') = -\varepsilon_{P_a}(d_2, d_3)$. Значит, ровно одна из псевдоинволюций $P_{\langle 1 \rangle}, P_{\langle 2 \rangle}$ является положительной: $P_{\langle 1 \rangle}$ при $\varepsilon_{P_a}(d_2, d_3) = +1$, $P_{\langle 2 \rangle}$ при $\varepsilon_{P_a}(d_2, d_3) = -1$. Выполнено равенство $\chi(P_{\langle 1 \rangle}) = \chi(P_{\langle 2 \rangle}) = \chi(P_a) = -2$. Доказательство масловости такое же, как для случая $\text{Sw}(P_a) = \{x, y\}$.

3.13. Перестройка Π_3 . В этом случае $\text{Sw}(P_a) = \{x, y, z\}$. Существуют ровно два разбиения D фронта Σ_b с $f_D = f_a$. В первом случае $\text{Sw}(P_b) = \{y'\}$ и $\chi(P_b) \neq \chi(P_a)$. Во втором случае $\text{Sw}(P_b) = \{z', y', x'\}$. Применяя лемму 3.6, легко убедиться, что положительность переключающих точек z', y', x' следует из положительности переключающих точек x, y, z . Окончание доказательства такое же, как для случая Π_2 .

3.14. Перестройки XC , $\text{CC}_\pm$, XC^{-1} , $\text{CC}_\pm^{-1}$. Утверждение теоремы для этих перестроек очевидно.

3.15. Перестройка XX . Разобьем случай этой перестройки (см. рис. 9) на три подслучая XX_i , где i – число переключающих точек псевдоинволюции P_a . Продолжая псевдоинволюцию по непрерывности, мы получаем следующее утверждение.

Рис. 9

ЛЕММА 3.8. В случае перестройки XX для всякой псевдоинволюции P_a найдется такое непрерывное семейство $\{P_{t \in [a,b]}^S\}$ псевдоинволюций с переключающими точками, гладко зависящими от параметра t , что $P_a^S = P_a$. Это семейство масловское, если P_a масловская.

3.16. Перестройка XX_0 . Из условия $\chi(P_b) = \chi(P_a)$ вытекает, что псевдоинволюция P_b не имеет переключающих точек. Существование требуемого семейства псевдоинволюций вытекает из леммы 3.8, единственность – из утверждения 2.3 и леммы 3.2.

3.17. Перестройка XX_1 . Обозначим через Γ_i P_a -сечение фронта Σ_a , содержащее точку d_i , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Заметим, что $\theta(\Gamma_1) \neq \Gamma_2$, где $\theta = \theta_{P_a}$.

Пусть $\text{Sw}(P_a) = \{x_1\}$. Рассмотрим случай $\{\theta(\Gamma_1), \theta(\Gamma_2)\} \neq \{\Gamma_3, \Gamma_4\}$. Пусть P' – псевдоинволюция фронта Σ_b , которая совпадает с P_a на $\partial\Sigma_b = \partial\Sigma_a$. Докажем, что $\text{Sw}(P') = \{x'_1\}$. Пусть $x'_1 \notin \text{Sw}(P')$. Найдется такое $i \in \{1, 2\}$, что $\theta(\Gamma_i) = \Gamma_5 \notin \{\Gamma_3, \Gamma_4\}$. Тогда $P_a(d_i) = d_5$, $P_a(e_i) = e_5$, где d_5, e_5 – концы P_a -сечения Γ_5 . Рассмотрим P' -сечения Γ'_5 с концами d_5, e_5 и Γ'_i с концами d_i, e_{3-i} . Из $P_a(d_5) = d_i \in \Gamma'_i$ следует, что $\theta_{P'}(\Gamma'_5) = \Gamma'_i$, но $P_a(e_5) = e_i \notin \Gamma'_i$, противоречие. Пусть $\text{Sw}(P') = \{x'_1, x'_2\}$. Найдется такое $i \in \{3, 4\}$, что $\theta(\Gamma_i) = \Gamma_5 \notin \{\Gamma_1, \Gamma_2\}$. Рассмотрим P' -сечения Γ'_5 с концами d_5, e_5 и Γ'_i с концами d_i, e_i . Из $P_a(d_5) = d_i \in \Gamma'_i$ следует, что $\theta_{P'}(\Gamma'_5) = \Gamma'_i$, но $P_a(e_5) = e_{7-i} \notin \Gamma'_i$, противоречие.

Теперь из леммы 3.8 вытекает, что в случае $\{\theta(\Gamma_1), \theta(\Gamma_2)\} \neq \{\Gamma_3, \Gamma_4\}$ существует и единственна псевдоинволюция P_b , совпадающая с P_a на $\partial\Sigma_b = \partial\Sigma_a$, при этом $\text{Sw}(P_b) = \{x'_1\}$. Эта псевдоинволюция положительна, поскольку, согласно лемме 3.6, $\varepsilon_{P_b}(x'_1) = \varepsilon_{P_b}(e_1, e_2) = \varepsilon_{P_a}(x_1) = +1$. Утверждение теоремы для этого случая следует из леммы 3.8 и леммы 3.2.

Предположим, что $\{\theta(\Gamma_1), \theta(\Gamma_2)\} = \{\Gamma_3, \Gamma_4\}$. Тогда легко убедиться в том, что найдутся ровно две псевдоинволюции P, P' фронта Σ_b , которые совпадают с P_a на $\partial\Sigma_a = \partial\Sigma_b$, при этом $\text{Sw}(P) = \{x'_1\}$, $\text{Sw}(P') = \{x'_2\}$. Покажем, что P' положительна, а P нет. Из положительности точки x_1 для псевдоинволюции P_a вытекает, что $P(d_1) = P'(d_1) = P_a(d_1) = d_4$, $P(d_2) = P'(d_2) = P_a(d_2) = d_3$, $P(e_1) = e_3$, $P(e_2) = e_4$. Значит, $\varepsilon_P(x'_1) = \varepsilon_P(e_1, e_2) = -1$, $\varepsilon_{P'}(x'_2) = \varepsilon_P(d_3, d_4) + 1$.

Если P_a масловская относительно μ_a , то $\mu_a(d_4) = \mu_a(d_1) + 1$, $\mu_a(d_3) = \mu_a(d_2) + 1$, $\mu_a(d_1) = \mu_a(d_2)$. Следовательно, $\mu_a(d_3) = \mu_a(d_4)$, поэтому $\mu_b(d_3) = \mu_b(d_4)$ и псевдоинволюция P' масловская. Применение леммы 3.2 завершает доказательство утверждения теоремы для перестройки XX_1 (случай $\text{Sw}(P_a) = \{x_2\}$ сводится к случаю $\text{Sw}(P_a) = \{x_1\}$ симметрией).

3.18. Перестройка XX_2 . Из условия $\chi(P_b) = \chi(P_a)$ вытекает, что обе точки самопересечения фронта Σ_b должны быть переключающими. Непрерывное семейство $\{P_t\}$ псевдоинволюций с двумя переключающими точками существует по лемме 3.8, единственно по утверждению 2.3 и лемме 3.2. Остается проверить, что P_b положительна. Из того, что $\varepsilon_{P_a}(x_1) = \varepsilon_{P_a}(x_2) = +1$, применением леммы 3.6 получаем $\varepsilon_{P_a}(e_1, e_2) = \varepsilon_{P_a}(d_3, d_4) = +1$. Псевдоинволюция P_b положительна, так как $\varepsilon_{P_b}(x'_1) = \varepsilon_{P_b}(e_3, e_4) = \varepsilon_{P_a}(e_3, e_4) = +1$ и $\varepsilon_{P_b}(x'_2) = \varepsilon_{P_b}(d_1, d_2) = \varepsilon_{P_a}(d_1, d_2) = +1$. Доказательство теоремы 2.5 закончено.

§ 4. Неоднозначность непрерывного продолжения и монодромия псевдоинволюций

4.1. Нехарактеристические продолжения. Оказывается, если в условии теоремы 2.5 отбросить требование характеристичности семейства $\{P_t\}$, то однозначность продолжения нарушается, при этом всевозможные продолжения псевдоинволюции P_a до непрерывного положительного (не обязательно характеристического) семейства $\{P_{t \in [a, b]}\}$ псевдоинволюций по-прежнему допускают явное описание. Таких продолжений не больше двух, если σ -общее семейство $\{L_t\}$ пересекает дискриминант $\mathcal{D}$ ровно в одной точке. Их описание извлекается из доказательства теоремы 2.5; изложим его явно. Мы предполагаем, что семейство $\{L_t\}$ простое.

4.2. Однозначные продолжения. Если перестройка – это одна из перестроек I, II, XC и $CC_{\pm}$ (или обратная к одной из них, см. п. 3.1), то такое непрерывное положительное семейство $\{P_t\}$ единственно. Это же верно, если перестройка – это перестройка типа III_0, III_2 (см. ш. 3.9 и 3.12) или типа XX_1 (см. п. 3.17).

4.3. Неоднозначные продолжения. Если перестройка имеет тип III_3 , то всегда существуют ровно два непрерывных положительных семейства $\{P_t\}$: одно из них характеристично, а у другого число переключающих точек уменьшается на 2 (в обозначениях рис. 8 из переключающих точек x, y, z получается переключающая точка y').

Пусть перестройка имеет тип III_1 . Если переключающая точка для P_a это x или z , то продолжение единственно. Пусть переключающая точка – это y . Допустим, что существует псевдоинволюция P'_a , совпадающая с P_a на $\partial\Sigma_a$, для которой x, y, z – переключающие точки. Тогда псевдоинволюция P_a допускает два продолжения –

одно указано в теореме 2.5, второе получается из семейства $\{P'_t\}$, продолжающего P'_a , по теореме 2.5. Если такой псевдоинволюции P'_a не существует, то продолжение единственно.

Пусть перестройка имеет тип XX_0 или XX_2 . Продолжение псевдоинволюции P_a неоднозначно, если и только если $P_a(d_1) = d_4$, $P_a(d_2) = d_3$ (см. рис. 9). Тогда продолжений ровно два: для одного из них точки x'_1, x'_2 переключающие, для другого обе эти точки неперекрывающие.

4.4. Характеристические продолжения и монодромия. Пусть $\{L_{t \in [0,1]}\}$ – σ -общий путь (σ -общее семейство) в пространстве лежандровых зацеплений в $J^1(M)$. Прodeформируем путь $\{L_t\}$ в другой σ -общий путь $\{L'_t\}$ в классе путей в $\mathcal{L}$ с фиксированными концами. Согласно утверждению 2.6, эти пути определяют взаимно однозначные отображения Φ, Φ' из множества положительных псевдоинволюций фронта $\sigma(L_0)$ в множество положительных псевдоинволюций фронта $\sigma(L_1)$. Оказывается, что эти отображения не всегда совпадают.

Легко проверить, что если в процессе деформации встречаются лишь σ -общие пути, то $\Phi = \Phi'$. Более того, можно показать (пользуясь обратимостью продолжения псевдоинволюции вдоль пути), что равенство $\Phi = \Phi'$ справедливо, если всякое лежандрово зацепление, участвующее в деформации, либо является σ -общим, либо является неособой точкой дискриминанта $\mathcal{D}$. Таким образом, неоднозначность продолжения определяется обходами вокруг стратов коразмерности 2 (в $\mathcal{L}$) дискриминанта $\mathcal{D}$. Доказательство теоремы 2.5 доставляет нам явное описание продолжения псевдоинволюции вдоль пути. Пользуясь им, можно описать взаимно однозначные отображения множества положительных псевдоинволюций (преобразования монодромии) при обходе вокруг различных стратов дискриминанта коразмерности 2. Полное описание утомительно, мы сформулируем лишь некоторые из результатов.

Лишь для двух стратов преобразование монодромии может быть отличным от тождественного. Опишем эти страты и некоторые свойства монодромии вокруг них. Страт $\mathcal{D}_{2,3}$ состоит из таких лежандровых зацеплений L , что фронт $\sigma(L)$ имеет тройную точку x , двойную точку x' , выполняется условие $\pi(x) = \pi(x')$, а в остальном фронт является σ -общим. Рассмотрим малую σ -общую петлю $\{L_{t \in [0,1]}\}$, один раз обходящую страт $\mathcal{D}_{2,3}$ вблизи L . Можно показать, что квадрат отображения монодромии вокруг этой петли тождественен. Положительные псевдоинволюции, не переходящие в себя при отображении монодромии вдоль этой петли, содержатся в множестве таких псевдоинволюций P фронта $\sigma(L_0)$, что ровно две точки множества $\text{Sw}(P)$ близки к точкам x, x' .

Страт $\mathcal{D}_4$ состоит из таких лежандровых зацеплений L , что фронт $\sigma(L)$ имеет четверную точку, а в остальном является σ -общим. Рассмотрим малую σ -общую петлю $\{L_{t \in [0,1]}\}$, один раз обходящую страт $\mathcal{D}_4$ вблизи L . Обозначим через Φ отображение монодромии множества положительных псевдоинволюций фронта $\sigma(L_0)$, через A_i множество таких положительных псевдоинволюций P фронта $\sigma(L_0)$, что ровно i точек множества $\text{Sw}(P)$ близки к четверной точке фронта $\sigma(L)$. Отображение Φ сохраняет каждое из множеств A_i . Можно показать, что ограничение Φ на A_i тождественно, если $i \notin \{3, 4\}$, третья степень ограничения Φ на A_4 и квадрат ограничения Φ на A_3 тождественны.

Проиллюстрируем эти явления примерами.

4.5. Первый пример. Рассмотрим лежандров узел $L \in \mathcal{D}_{2,3}$, фронт которого изображен на рис. 10 а. Пусть петля $\{L_t \in [0,1]\}$ один раз обходит вокруг страта $\mathcal{D}_{2,3}$ в окрестности узла L , фронт $\sigma(L_0)$ таков, как показано на рис. 10 б. Мы предполагаем для простоты, что семейство $\{L_t\}$ пересекает страт $\mathcal{D}_3$ (состоящий из фронтов с одной тройной точкой) и страт $\mathcal{D}_{2,2}$ (состоящий из фронтов с двумя двойными точками, у которых совпадают q -координаты) минимальное число раз – 2 и 6 соответственно. Фронт $\sigma(L_0)$ допускает ровно три положительные псевдоинволюции P^0, P^1, P^2 . Они задаются условиями $\text{Sw}(P^0) = \{x_2, x_4\}$, $\text{Sw}(P^1) = \{x_3, x_4\}$ и $\text{Sw}(P^2) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Используя явное описание продолжения псевдоинволюций $P_0 \in \{P^0, P^1, P^2\}$, данное в доказательстве теоремы 2.5, можно показать, что обход вдоль петли $\{L_t\}$ переставляет псевдоинволюции P^0 и P^1 .

Рис. 10

Рис. 11

4.6. Второй пример. Рассмотрим лежандрово зацепление $L \in \mathcal{D}_4$, фронт которого изображен на рис. 11 а. Пусть путь $\{L_t\}$ обходит один раз вокруг страта $\mathcal{D}_4$ в окрестности зацепления L , фронт $\sigma(L_0)$ изображен на рис. 11 б. Мы предполагаем для простоты, что семейство $\{L_t\}$ пересекает страт $\mathcal{D}_3$ и страт $\mathcal{D}_{2,2}$ минимальное число раз – 8 и 6 соответственно. Фронт $\sigma(L_0)$ допускает ровно пять положительных псевдоинволюций P^0, P^1, P^2, P^3, P^4 . Они задаются условиями $\text{Sw}(P^0) = \{y_3, y_4\}$, $\text{Sw}(P^1) = \{y_3, y_4, y_5, y_6\}$, $\text{Sw}(P^2) = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, $\text{Sw}(P^3) = \{y_1, y_2, y_5, y_6\}$, $\text{Sw}(P^4) = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6\}$. Используя явное описание продолжения псевдоинволюций $P_0 \in \{P^1, P^2, P^3\}$, можно показать, что эти три псевдоинволюции циклически

переставляются при обходе вдоль петли $\{L_t\}$ (а псевдоинволюции P^0 и P^4 переходят в себя, например, потому, что в силу характеристичности продолжения отображение монодромии сохраняет число переключающих точек).

Рис. 12

4.7. Третий пример. Рассмотрим лежандрово зацепление $L \in \mathcal{D}_4$, фронт которого изображен на рис. 12а. Пусть путь $\{L_t\}$ обходит один вокруг страта $\mathcal{D}_4$ в окрестности зацепления L , фронт $\sigma(L_0)$ изображен на рис. 12б. Фронт $\sigma(L_0)$ допускает ровно пять положительных псевдоинволюций P^0, P^1, P^2, P^3, P^4 . Они задаются условиями $\text{Sw}(P^0) = \{y_2, y_3\}$, $\text{Sw}(P^1) = \{x_2, y_2, y_5, y_6\}$, $\text{Sw}(P^2) = \{x_2, y_2, y_3, y_4\}$, $\text{Sw}(P^3) = \{y_2, y_3, y_5, y_6\}$, $\text{Sw}(P^4) = \{x_2, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6\}$. Используя явное описание продолжения псевдоинволюций $P_0 \in \{P^1, P^2\}$, можно показать, что эти две псевдоинволюции циклически переставляются при обходе вдоль петли $\{L_t\}$ (а псевдоинволюции P^0, P^3 и P^4 переходят в себя).

Заметим, что зацепление L принадлежит той же связной компоненте пространства лежандровых зацеплений, что и зацепление из предыдущего примера. Из этого несложно заключить, что всякая перестановка псевдоинволюций P^1, P^2, P^3 фронта $\sigma(L_0)$ реализуется отображением монодромии вдоль некоторой σ -общей петли.

§ 5. Продолжение псевдоинволюций на дискриминант

5.1. Пусть k – целое число. Рассмотрим множество $\mathcal{L}_k^\sigma$ всех σ -общих лежандровых зацеплений в $J^1(M)$, фронты которых допускают ровно одну положительную псевдоинволюцию с эйлеровой характеристикой, равной k . Обозначим через $\mathcal{L}'_k$ его замыкание в пространстве лежандровых зацеплений $\mathcal{L}$. Из утверждения 2.6 вытекает, что $\mathcal{L}'_k$ есть объединение некоторых связных компонент пространства $\mathcal{L}$.

Рассмотрим отображение $\mathcal{P}_0$, сопоставляющее каждому лежандрову зацеплению $L \in \mathcal{L}_k^\sigma$ такую положительную псевдоинволюцию $\mathcal{P}_0(L)$ фронта $\sigma(L)$, что $\chi(\mathcal{P}_0(L)) = k$. Нашей целью является продолжение отображения $\mathcal{P}_0$ до непрерывного отображения $\mathcal{P}$, определенного на $\mathcal{L}'_k$ и сопоставляющего лежандрову зацеплению псевдоинволюцию его фронта. Непрерывность здесь понимается в следующем смысле. Рассмотрим множество $A_{\mathcal{P}} = \{(x, L) | x \in G_{\sigma(L)} \cup C_{\sigma(L)}\} \subset J^0(M) \times \mathcal{L}'_k$ и отображение $\Phi_{\mathcal{P}}: A_{\mathcal{P}} \rightarrow J^0(M)$, $\Phi_{\mathcal{P}}(x, L) = \mathcal{P}(L)(x)$. Снабдим множество $A_{\mathcal{P}}$ топологией,

индуцированной из произведения естественной топологии на $J^0(M)$ и C^∞ -топологии на $\mathcal{L}'_k$. Назовем отображение $\mathcal{P}$ непрерывным, если $\Phi \circ \mathcal{P}$ непрерывно.

ТЕОРЕМА 5.1. *Отображение $\mathcal{P}_0$ единственным образом продолжается до непрерывного отображения $\mathcal{P}$, сопоставляющего каждому лежандрову зацеплению $L \in \mathcal{L}'_k$ псевдоинволюцию фронта $\sigma(L)$.*

5.2. Доказательство теоремы 5.1. Если x – кюв фронта $\Sigma = \sigma(L)$, то положим $\mathcal{P}(L)(x) = x$. Если x – неособая точка фронта Σ , то рассмотрим последовательность (L_i) лежандровых зацеплений из $\mathcal{L}'_k$ и последовательность точек $x_i \in \sigma(L_i)$, где $L_i \rightarrow L$, $x_i \rightarrow x$. Положим $\mathcal{P}(L)(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{P}_0(L_i)(x_i)$. Покажем, что это определение корректно и отображение $\mathcal{P}$ обладает требуемыми свойствами.

Пусть Γ – множество, которое состоит из неособых точек фронта Σ и является графиком гладкой функции, определенной на некотором отрезке $I \subset M$. Обозначим через $W_\varepsilon(\Gamma)$ ε -окрестность в $J^0(I)$ множества Γ . Возьмем $\varepsilon > 0$ достаточно малым, тогда окрестность $W_\varepsilon(\Gamma)$ не содержит точек фронта Σ , не принадлежащих Γ . Назовем лежандрово зацепление L' Γ -удобным, если пересечение его фронта с $W_\varepsilon(\Gamma)$ состоит из неособых точек фронта и является графиком некоторой гладкой функции на I . Пусть $L' \in \mathcal{L}'_k$ – σ -общее Γ -удобное зацепление, $P' = \mathcal{P}_0(L')$ – псевдоинволюция фронта $\sigma(L')$. Тогда множество $P'(\sigma(L') \cap W_\varepsilon(\Gamma))$ является графиком непрерывной функции на I . Обозначим эту функцию через $f_{L'}$.

ЛЕММА 5.2. *Для любого $\delta > 0$ найдется такая окрестность U лежандрова зацепления L в $\mathcal{L}'_k$, состоящая из Γ -удобных зацеплений, что $\|f_{L_1} - f_{L_2}\|_{C^0} < \delta$ для любых $L_1, L_2 \in \mathcal{L}'_k \cap U$.*

Докажем вначале следующее вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 5.3. *Пусть $L_0 \subset J^1(M)$ – лежандрово зацепление, T^{L_0} – множество, состоящее из всех таких точек $q_0 \in M$, что прямая $\{q = q_0\}$ пересекает фронт $\sigma(L_0)$ лишь в его неособых точках. Тогда T^{L_0} открыто и всюду плотно в M .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что T^{L_0} открыто в M . По лемме Сарда множество критических значений проекции $L_0 \rightarrow M$ замкнуто и имеет меру нуль. Покажем, что на каждом отрезке $K \subset M$, состоящем из неособых значений этой проекции, найдется точка множества T^{L_0} . Действительно, множество $L_0^K = L_0 \cap J^1(K)$ есть объединение конечного числа 1-графиков гладких функций $f_1, \dots, f_m$ на K . Поскольку графики этих функций не касаются друг друга (в силу вложенности L_0), они попарно пересекаются лишь в конечном числе точек. Следовательно, почти все точки отрезка K принадлежат множеству T^{L_0} . Поэтому множество T^{L_0} всюду плотно в M . Очевидно, что T^{L_0} открыто в M . $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5.2. Всякая достаточно малая окрестность лежандрова зацепления L в $\mathcal{L}'_k$ состоит из Γ -удобных зацеплений. Покажем, что для любого числа $\delta_0 > 0$ и для любой точки $s \in T^{L_0} \cap I$ найдется такая окрестность U_{s, δ_0} зацепления L в $\mathcal{L}'_k$, что $|f_{L_1}(s) - f_{L_2}(s)| < \delta_0$ для любых $L_1, L_2 \in \mathcal{L}'_k \cap U_{s, \delta_0}$. Действительно, выберем вначале связную окрестность U_{s, δ_0} такой, что точка s принадлежит множеству T^{L_0} для любого лежандрова зацепления L_0 из этой окрестности. Пусть $L_0 \in \mathcal{L}'_k \cap U_{s, \delta_0}$. Обозначим через $x_1^{L_0}, x_2^{L_0}, \dots, x_{2n}^{L_0}$ точки множест-

ва $\sigma(L_0) \cap \{q = q_0\}$, занумерованные в порядке возрастания координаты u . Псевдоинволюция $\mathcal{P}_0(L_0)$ определяет инволюцию θ множества $\{1, \dots, 2m\}$ при помощи формулы $\mathcal{P}_0(L_0)(x_j^{L_0}) = x_{\theta(j)}^{L_0}$. Построенные по разным лежандровым зацеплениям $L_0 \in \mathcal{L}_k^\sigma \cap U_{s, \delta_0}$ инволюции θ совпадают. Это следует из теоремы 2.5 и того, что любые два такие зацепления могут быть соединены σ -общим семейством лежандровых зацеплений из U_{s, δ_0} . Из совпадения инволюций вытекает, что найдется такое $j \in \{1, \dots, 2m\}$, что число $f_{L_0}(s)$ равно u -координате точки $x_j^{L_0}$ для любого $L_0 \in \mathcal{L}_k^\sigma \cap U_{s, \delta_0}$. Поэтому, уменьшая окрестность U_{s, δ_0} , мы можем добиться выполнения неравенства $|f_{L_1}(s) - f_{L_2}(s)| < \delta_0$.

Найдутся такое число $C > 0$ и такая окрестность U_C лежандрова зацепления L в $\mathcal{L}_k'$, что значение p -координаты не превосходит по модулю числа C . Тогда $|f_{L_0}(s_1) - f_{L_0}(s_2)| \leq C|s_1 - s_2|$ для любых $L_0 \in \mathcal{L}_k^\sigma \cap U_C$, $s_1, s_2 \in I$. Найдутся такие положительные ε_0, δ_0 , что $\delta_0 + 2C\varepsilon_0 < \delta$. Для любой точки $s \in T^{L_0} \cap I$ неравенство $|f_{L_1}(s_1) - f_{L_2}(s_1)| < \delta$ справедливо для любой точки s_1 из ε_0 -окрестности точки s в I и любых лежандровых зацеплений $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_k^\sigma \cap U_{s, \delta_0}$. По лемме 5.3 множество $T^{L_0} \cap I$ всюду плотно в I , поэтому в нем найдутся такие точки $\{s_1, \dots, s_l\}$, что их ε_0 -окрестности покрывают отрезок I . Искомая окрестность U есть пересечение окрестностей U_{s_i, δ_0} . $\square$

Вернемся к доказательству теоремы 5.1. Покажем, что приведенное выше определение отображения $\mathcal{P}(L): G_{\sigma(L)} \cup C_{\sigma(L)} \rightarrow \sigma(L)$ корректно. Пусть x – неособая точка фронта $\sigma(L)$, (L_i) – последовательность лежандровых зацеплений из $\mathcal{L}_k^\sigma$ и $x_i \in \sigma(L_i)$, $L_i \rightarrow L$, $x_i \rightarrow x$. Рассмотрим множество Γ , которое состоит из неособых точек фронта $\sigma(L)$, содержит точку x и является графиком гладкой функции, определенной на некотором отрезке $I \subset M$. По лемме 5.2 последовательность функций $f_{L_i}: I \rightarrow \mathbb{R}$ сходится в пространстве C^0 к некоторой функции f . Поэтому последовательность $\mathcal{P}_0(L_i)(x_i)$ сходится к $(\pi(x), f(\pi(x)))$ (где π – проекция $J^0(M) \rightarrow M$). Следовательно, отображение $\mathcal{P}$ определено корректно.

Отображение $\mathcal{P}(L)$ удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к псевдоинволюциям. Это следует по соображениям непрерывности из того, что все отображения $\mathcal{P}_0(L')$ для σ -общих лежандровых зацеплений L' , близких к L , являются псевдоинволюциями. Покажем, что отображение $\Phi_{\mathcal{P}}$ непрерывно в точке (x, L) , где $x \in G_{\sigma(L)}$. В силу леммы 5.2 достаточно показать, что точка $\mathcal{P}(L')(x')$ достаточно близка к точке $\mathcal{P}(L)(x)$, если зацепление $L' \in \mathcal{L}_k^\sigma$ достаточно близко к L , x' – неособая точка фронта $\sigma(L')$, достаточно близкая к точке x . Последнее также доказывается применением леммы 5.2. Наконец, непрерывность $\Phi_{\mathcal{P}}$ в точке (x, L) , где x – клюв, вытекает из того, что пересечение фронта всякого близкого к L лежандрова зацепления L' с малой окрестностью V точки x в $J^0(M)$ получается из $V \cap \sigma(L)$ при помощи C^∞ -малого диффеоморфизма. Доказательство теоремы 5.1 закончено. $\square$

§ 6. Комбинаторика разбиений фронтов

6.1. Разрешение. По разбиению $D = \{\gamma_1, \dots, \gamma_N\}$ σ -общего фронта $\Sigma = \sigma(L) \subset J^0(M)$ (где $M = S^1$, или $M = \mathbb{R}$, или $M = I$) построим топологическое многообразие $R(D)$ (с краем, если $M = I$), называемое *разрешением* (*D-разрешением*) фронта Σ . Разрешение $R(D)$ получается из $\bigcup_{i=1}^N \Lambda_i$ (где $\gamma_i: \Lambda_i \rightarrow \Sigma$, отрезки и окружности Λ_i попарно не пересекаются) склеиванием для каждого клюва c фронта Σ двух

таких концов $y \in \Lambda_j$, $y' \in \Lambda_{j'}$, что $\gamma_j(y) = \gamma_{j'}(y') = c$. Отображения γ_i определяют естественную непрерывную проекцию $\psi_D: R(D) \rightarrow \Sigma$, при которой всякая точка самопересечения имеет ровно два прообраза, а остальные точки – по одному.

6.2. Древесные разбиения. Пусть $L \subset J^1(S^1)$ – σ -общее лежандрово зацепление, D – разбиение его фронта $\Sigma \subset J^0(S^1)$. Обозначим через $\text{Sw}_L(D) \subset L$ прообраз множества $\text{Sw}(D)$ под действием отображения $\sigma|_L$.

Сопоставим разбиению D граф K_D следующим образом. Вершины графа K_D соответствуют связным компонентам пространства $R(D)$. По каждой точке $x \in \text{Sw}(D)$ строится ребро графа K_D , которое соединяет (возможно, совпадающие) вершины, соответствующие компонентам, содержащим прообразы точки x под действием ψ_D . Назовем разбиение D *древесным*, если граф K_D есть дерево. Связную компоненту S пространства $R(D)$ назовем k -компонентой, если $\psi_D(S)$ содержит ровно k клювов. Назовем разбиение D *ручным*, если зацепление L связно, $\chi(D) = 0$ (определение эйлеровой характеристики $\chi(D)$ дано в п. 2.7), всякая связная компонента пространства $R(D)$ есть либо 2-компонента, либо 0-компонента, причем найдется хотя бы одна 0-компонента.

ЛЕММА 6.1. *Если D – ручное разбиение, то D древесно и у пространства разрешения $R(D)$ ровно одна 0-компонента.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Всякому ориентированному отрезку $J \subset L$ с концами вне $\text{Sw}_L(D)$ можно поставить в соответствие путь на графе K_D – конечную последовательность ребер, у которой начало следующего ребра совпадает с концом предыдущего. Этот путь строится так: точки множества $J \cap \text{Sw}_L(D)$ упорядочиваются при помощи ориентации на J ; переходя к их образам в Σ , мы получаем последовательность точек из $\text{Sw}(D)$, ей соответствует последовательность ребер графа K_D . Пользуясь этой конструкцией, легко проверить, что из связности узла L вытекает связность графа K_D . Условие $\chi(D) = 0$ означает, что число ребер графа K_D равно числу 2-компонент пространства $R(D)$. Поэтому его эйлерова характеристика $\chi(K_D)$ равна числу 0-компонент и потому $\chi(K_D) \geq 1$. Но из связности графа K_D следует, что $\chi(K_D) \leq 1$. Значит, K_D – дерево и у разрешения $R(D)$ ровно одна 0-компонента. $\square$

Пусть разбиение D древесно. Если $\text{Sw}(D)$ непусто, то узел L делится точками множества $\text{Sw}_L(D)$ на части, гомеоморфные отрезку. Пусть S – компонента пространства $R(D)$. Обозначим через $S_L \subset L$ объединение частей, проектирующихся в $\psi_D(S) \subset \Sigma$ (если $\text{Sw}(D)$ пусто и $S = R(D)$, то полагаем $S_L = L$). Назовем компоненту S *циклической*, если для любой такой пары точек $y_1, y_2 \in \partial S_L$, что $\sigma(y_1) = \sigma(y_2)$, найдется такой отрезок $J \subset L$ с концами в точках y_1 и y_2 , что $J \cap S_L = \{y_1, y_2\}$ (т.е. говоря нестрого, L превращается в S после стягивания в точку каждого из таких отрезков).

ЛЕММА 6.2. *Пусть $L \subset J^1(S^1)$ – σ -общее лежандрово зацепление, D – древесное разбиение его фронта $\Sigma \subset J^0(S^1)$. Тогда L связно и всякая компонента пространства $R(D)$ является циклической. Кроме того, для любой переключающей точки $x \in \text{Sw}(D)$ и любой компоненты $S^* \subset R(D)$ множество S_L^* целиком содержится в одном из двух отрезков, на которые прообразы точки x делят узел L .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проводим индукцией по числу $k = \#(\text{Sw}(D))$. При $k = 0$ утверждение очевидно. Предположим, что утверждение доказано для всех древесных разбиений D_0 с $\#(\text{Sw}(D_0)) = k - 1$. Пусть D древесно, $\#(\text{Sw}(D)) = k > 0$. Тогда у дерева K_D есть по меньшей мере две вершины валентности 1. Следовательно, найдется такая компонента $S \subset R(D)$, что $\psi_D(S)$ содержит ровно одну переключающую точку разбиения D . Обозначим эту точку через x_S , ее прообразы в L через z_1, z_2 .

Рассмотрим такое разбиение D_0 фронта Σ , что $\text{Sw}(D_0) = \text{Sw}(D) \setminus \{x_S\}$. Поскольку граф K_D получается из K_{D_0} стягиванием одного ребра в точку, разбиение D_0 древесно. Покажем, что утверждения леммы для разбиения D вытекают из утверждений для D_0 , верных по предположению индукции. Действительно, это вытекает из следующего описания множеств S_L , где S — компонента $R(D)$: одно из них есть отрезок $J_S \subset L$ с концами в точках z_1, z_2 , не содержащий других точек множества $\text{Sw}_L(D)$; еще одно есть $S'_L \setminus J_S$, где S' — компонента пространства $R(D_0)$, содержащая прообразы точки x_S ; остальные совпадают с множествами вида S''_L , где S'' — некоторая компонента пространства $R(D_0)$. $\square$

6.3. Ручные разбиения и отрезки на лежандровом узле. Пусть Λ — отрезок, $\gamma: \Lambda \rightarrow \Sigma$ — сечение фронта Σ , y — внутренняя точка отрезка Λ . Назовем *полусечениями* (по отношению к точке y) два отображения, получающиеся из γ ограничением на отрезки, на которые y делит Λ . Назовем *правым полусечением* то из них, которое кончается в правом клюве фронта Σ , *левым полусечением* — то, которое кончается в левом клюве.

ЛЕММА 6.3. Пусть D — ручное разбиение σ -общего лежандрова узла $L \subset J^1(S^1)$, S^0 — 0-компонента разрешения $R(D)$. Тогда всякая точка $x \in \text{Sw}(D)$ единственным образом определяет следующие объекты.

- (1) Отрезок $J_x^*(D) \subset L$ с концами в прообразах точки x , не содержащий внутренних точек множества S_L^0 .
- (2) Сечение $\gamma_x: \Lambda \rightarrow \sigma(L)$ разбиения D , где Λ — отрезок, такое, что его образ содержит точку x и является подмножеством множества $\sigma(J_x^*(D))$; обозначим через γ_x^r его правое полусечение относительно прообраза точки x в Λ , через γ_x^l — левое полусечение.
- (3) Непересекающиеся отрезки $J_x^r(D), J_x^l(D) \subset J_x^*(D)$, концы которых отображаются проекцией σ в концы полусечений γ_x^r, γ_x^l соответственно.

При этом различные отрезки $J_x^*(D), J_{x'}^*(D)$ или попарно не пересекаются, или один из них есть подмножество внутренности другого. Отрезки $J_x^*(D)$ для переключающих точек x , принадлежащих сечению $\psi_D(S^0)$, попарно не пересекаются и L есть объединение всех таких отрезков и множества S_L^0 . Сечения γ_x , соответствующие разным переключающим точкам, различны, и всякий клюв является концом ровно одного из них. Точки отрезков $J_x^r(D), J_x^l(D)$, близкие к их концам, переводятся проекцией σ в точки полусечений γ_x^r, γ_x^l соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разбиение D древесно по лемме 6.1. По лемме 6.2 множество S_L^0 целиком содержится в одном из двух отрезков, на которые прообразы точки x делят узел L , обозначим его $I_x^*(D)$. Обозначим другой отрезок через $J_x^*(D)$. Отре-

зок $J_x^*(D) \subset L$ не содержит внутренних точек множества S_L^0 по построению. Концы отрезка $J_{x'}^*(D) \subset L$, где $x' \neq x$, принадлежат множеству S_L^0 , где S' – некоторая компонента пространства $R(D)$. Из леммы 6.2 следует, что эти концы одновременно принадлежат одному из отрезков $I_x^*(D)$, $J_x^*(D)$. Поэтому отрезки $J_x^*(D)$, $J_{x'}^*(D)$ либо не пересекаются, либо один из них есть подмножество внутренности другого, либо их объединение есть L . Но последнее невозможно, так как внутренние точки непустого множества S_L^0 не принадлежат ни одному из них.

Пусть x – точка множества $\text{Sw}_0(D)$, состоящего из переключающих точек, принадлежащих сечению $\psi_D(S^0)$. Тогда отрезок $J_x^*(D) \subset L$ есть замыкание связной компоненты дополнения к S_L^0 в L (так как его концы принадлежат S_L^0). Отсюда вытекает, что отрезки $J_x^*(D) \subset L$, отвечающие разным $x \in \text{Sw}_0(D)$, попарно не пересекаются и L является объединением всех таких отрезков и множества S_L^0 .

Из древесности разбиения D следует, что точка $x \in \text{Sw}(D)$ принадлежит образам двух различных сечений. Обозначим их γ_1, γ_2 . Рассмотрим такие компоненты S^1, S^2 пространства $R(D)$, что образ сечения γ_i содержится в $\psi_D(S^i)$. По лемме 6.2 каждое из множеств S_L^i является подмножеством одного из отрезков $I_x^*(D)$, $J_x^*(D)$. Для каждого из прообразов точки x в L одна его малая окрестность содержится в S_L^1 , а другая в S_L^2 . Поэтому найдется ровно одно такое $i \in \{1, 2\}$, что отрезок $J_x^*(D)$ содержит множество S_L^i . Положим $\gamma_x = \gamma_i$, $S^x = S^i$. Тогда образ сечения γ_x является подмножеством множества $\sigma(J_x^*(D))$. Из того, что $S_L^i \subset J_x^*(D)$, следует, что $S^i \neq S^0$. Поэтому S^i является 2-компонентой, и, следовательно, область определения сечения γ_x есть отрезок.

Докажем, что сечения $\gamma_x, \gamma_{x'}$, соответствующие разным переключающим точкам, различны. Предположим противное. Тогда $S^x = S^{x'}$, пересечение отрезков $J_x^*(D)$, $J_{x'}^*(D)$ содержит множество S_L^x и, следовательно, непусто. Поэтому один из этих отрезков есть подмножество внутренности другого. Но это противоречит тому, что концы обоих отрезков содержатся в S_L^x . Значит, $\gamma_x \neq \gamma_{x'}$, $S^x \neq S^{x'}$.

Поскольку разбиение D ручное, число его переключающих точек равно числу 2-компонент разрешения $R(D)$. Следовательно, отображение $x \mapsto S^x$ задает взаимно однозначное соответствие между переключающими точками и 2-компонентами. Значит, для всякого клюва фронта $\sigma(L)$ найдется ровно одна такая переключающая точка x , что прообраз этого клюва в $R(D)$ принадлежит компоненте S^x . Поэтому x – единственная переключающая точка, для которой сечение γ_x заканчивается в этом клюве.

Обозначим через Z_L^r (соответственно Z_L^l) замыкание подмножества L , состоящее из всех таких точек z , что $\sigma(z)$ – неособая точка фронта $\sigma(L)$, принадлежащая образу полусечения γ_x^r (соответственно γ_x^l). Пусть точка $x' \in \text{Sw}(D)$ принадлежит образу полусечения $\gamma_{x'}^r$, обозначим множество всех таких точек через Sw_x^r . Обозначим через $J_x^r(D)$ объединение множества Z_L^r и всех таких отрезков $J_{x'}^*$, что $x' \in \text{Sw}_x^r$. Концы отрезка $J_{x'}^*$ принадлежат множеству Z_L^r , а его внутренние точки не принадлежат множеству S_L^x по лемме 6.2. Граничные точки множества Z_L^r – это в точности концы отрезков $J_{x'}^*$, где $x' \in \text{Sw}_x^r$, и точки, отображающиеся проекцией σ в концы полусечения γ_x^r . Отсюда следует, что множество $J_x^r(D)$ является отрезком и требования леммы, касающиеся его концов и их окрестностей, выполнены. Отрезок $J_x^r(D)$ является подмножеством отрезка $J_x^*(D)$, поскольку $Z_L^r \subset J_x^*(D)$ и каждый из отрезков $J_{x'}^*$, где

$x' \in \text{Sw}_x^r$, есть подмножество отрезка $J_x^*(D)$ по лемме 6.2 (так как концы отрезка J_x^* являются внутренними точками отрезка $J_x^*(D)$). Аналогичным образом определяется отрезок $J_x^l(D)$ и проверяются его свойства. Отрезки $J_x^r(D)$ и $J_x^l(D)$ не пересекаются, так как в противном случае клов, являющийся концом правого полусечения, принадлежал бы также и левому, что невозможно. $\square$

§ 7. Теоремы Гурвица для фронтов

7.1. Обобщенное отображение кривизны. Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$. Рассмотрим 1-формы $\omega = dq$, $\beta_\lambda = dp + \lambda u dq$ на $J^1(S^1)$. Для лежандрова зацепления $L \in J^1(S^1)$ определим отображение $\text{Curv}_{L,\lambda}: L \rightarrow \mathbb{RP}^1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, полагая $\text{Curv}_{L,\lambda}(z) = [\omega|_L(z) : \beta_\lambda|_L(z)]$ (т.е. $\text{Curv}_{L,\lambda}(z) = \infty$, если $\beta_\lambda|_L(z) = 0$, и $\omega|_L(z) = \text{Curv}_{L,\lambda}(z)\beta_\lambda|_L(z)$, если $\beta_\lambda|_L(z) \neq 0$). Это определение корректно (т.е. 1-формы $\beta_\lambda|_L(z), \omega|_L(z) \in T_z^*L$ не обращаются в нуль одновременно), так как 1-формы $\alpha = du - p dq$, β_λ и ω линейно независимы в каждой точке. Это определение при $\lambda = 1$ совпадает с определением отображения Curv_L , данным в п. 0.2. Определим отображение $F_{L,\lambda}: L \rightarrow \mathbb{RP}^1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Положим $F_{L,\lambda}(y) = \infty$, если $y \notin G_L$. В окрестности точки $y \in G_L$ лежандрово зацепление L совпадает с 1-графиком $j^1 f$ некоторой функции $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset S^1$. Положим $F_{L,\lambda}(y) = f''(q_y) + \lambda f(q_y)$, где $q_y - q$ -координата точки y . Рассуждая как в доказательстве леммы 1.1, можно показать, что $F_{L,\lambda} = 1/\text{Curv}_{L,\lambda}$.

7.2. Точки Штурма и точки Арнольда. Точку $z \in L$ назовем λ -точкой Штурма, если $F_{L,\lambda}(z) = 0$. Критические точки отображения $F_{L,\lambda}: L \rightarrow \mathbb{RP}^1$ назовем λ -точками Арнольда. Для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ λ -точки Штурма принадлежат G_L , так как множество G_L состоит из всех таких $z \in L$, что $\omega|_L(z) \neq 0$. Точка $z = (p_0, q_0, u_0) \in L$ называется критической точкой зацепления L , если $p_0 = 0$.

7.3. Непрерывное сечение фронта. Пусть $\mathcal{L}_1$ — связная компонента пространства лежандровых узлов в $J^1(S^1)$, содержащая нулевое сечение расслоения $J^1(S^1) \rightarrow S^1$. Рассмотрим пространство $\mathcal{L}_1^+$ лежандровых зацеплений такое, что всякое $L^+ \in \mathcal{L}_1^+$ получается из некоторого $L \in \mathcal{L}_1$ добавлением такой компоненты $V_c = \{p = 0, u = c\}$, что значение координаты u на L меньше c .

Естественная проекция $\mathcal{L}_1^+ \rightarrow \mathcal{L}_1$ — расслоение со стягиваемым слоем. Компонента $\mathcal{L}_1^+$ содержит зацепление $V_0 \cup V_1$, фронт которого допускает ровно одну, положительную, псевдоинволюцию P_0 . Согласно утверждению 2.6, фронт σ -общего зацепления из $\mathcal{L}_1^+$ допускает ровно одну положительную псевдоинволюцию, при этом ее эйлерова характеристика равна нулю. Рассмотрим отображение $L^+ \mapsto \mathcal{P}(L^+)$ из теоремы 5.1, сопоставляющее зацеплению L^+ псевдоинволюцию фронта $\sigma(L^+)$. Определим отображение $\mathcal{H}: \mathcal{L}_1 \rightarrow C^0(S^1)$ следующим образом. Пусть $L \in \mathcal{L}_1$, возьмем $L^+ = L \cup V_c \subset \mathcal{L}_1^+$ и определим $\mathcal{H}(L)$ как функцию, график которой есть $\mathcal{P}(L^+)(V_c)$. Легко видеть, что отображение $\mathcal{H}$ определено корректно (не зависит от c). В силу теоремы 5.1 справедливо следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7.1. *Отображение $\mathcal{H}: \mathcal{L}_1 \rightarrow C^0(S^1)$ непрерывным образом сопоставляет лежандрову узлу L функцию $\mathcal{H}(L)$, график $\Gamma_{\mathcal{H}(L)}$ которой является подмножеством фронта $\sigma(L)$.*

7.4. Канонический масловский потенциал. Рассмотрим накрытие $\mathcal{M}_1$ над $\mathcal{L}_1$, слой которого над $L \in \mathcal{L}_1$ – это целочисленные масловские потенциалы на L .

ЛЕММА 7.2. *У накрытия $\mathcal{M}_1$ есть единственное непрерывное сечение $L \rightarrow \mu_L$ такое, что $\mu_{V_0} = \{0\}$. Для любого общего узла $L \in \mathcal{L}_1$ значение масловского потенциала μ_L на прообразе всякой неособой точки фронта $\sigma(L)$, содержащейся в $\Gamma_{\mathcal{H}(L)}$, равно нулю. Для любого прообраза $L^+ \in \mathcal{L}_1^+$ узла L псевдоинволюция $\mathcal{P}(L^+)$ масловская относительно масловского потенциала, равного μ_L на L и единице на дополнительной компоненте.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть μ – масловский потенциал на $V_0 \cup V_1$ такой, что $\mu(V_0) = 0$, $\mu(V_1) = 1$. Для доказательства первого утверждения леммы достаточно проверить, что всякий масловский потенциал μ' , полученный из μ непрерывным продолжением вдоль петли в $\mathcal{L}_1^+$, совпадает с μ . Это вытекает из теоремы 2.5 и того, что $\mu'(V_1) = 1$. Оставшиеся утверждения немедленно следуют из теоремы 2.5. $\square$

7.5. Три обобщения теоремы Гурвица. Пусть $L \in \mathcal{L}_1$. Обозначим через $N_\lambda^S(L)$ множество λ -точек Штурма на L , значение масловского потенциала μ_L в которых равно нулю. Обозначим через $N_\lambda^A(L)$ множество λ -точек Арнольда на L .

Определим скалярное произведение функций на S^1 как L^2 -спаривание: $\langle f, g \rangle = \int_{S^1} f(q)g(q) dq$. Следующие три теоремы являются обобщениями теоремы Гурвица и сводятся к ней в случае, когда узел L есть 1-график гладкой функции на S^1 .

ТЕОРЕМА 7.3. *Пусть $L \in \mathcal{L}_1$ – такой лежандров узел, что функция $\mathcal{H}(L)$ ортогональна $2k + 1$ функциям $1, \cos q, \sin q, \dots, \cos kq, \sin kq$. Тогда для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство $\#(N_\lambda^S(L)) \geq 2k + 2$, и $\#(N_\lambda^S(L)) \geq 2k + 4$ при $\lambda = (k + 1)^2$.*

ТЕОРЕМА 7.4. *Пусть $L \in \mathcal{L}_1$ – такой лежандров узел, что функция $\mathcal{H}(L)$ ортогональна $2k$ функциям $\cos q, \sin q, \dots, \cos kq, \sin kq$. Тогда для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство $\#(N_\lambda^A(L)) \geq 2k + 2$, и $\#(N_\lambda^A(L)) \geq 2k + 4$ при $\lambda = (k + 1)^2$.*

ТЕОРЕМА 7.5. *Пусть $L \in \mathcal{L}_1$ – такой лежандров узел, что функция $\mathcal{H}(L)$ ортогональна $2k$ функциям $\cos q, \sin q, \dots, \cos kq, \sin kq$. Тогда на L найдется по меньшей мере $2k + 2$ критические точки.*

7.6. Замечание о нулях старших производных. Для всякой гладкой функции на окружности и любого натурального n ее n -я производная имеет по меньшей мере два нуля. Можно спросить, верны ли аналогии этого утверждения для лежандровых узлов из компоненты $\mathcal{L}_1$.

Пусть $L \in J^1(S^1)$ – лежандрово зацепление. Определим функцию $h_{n,L}: G_L \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть $y \in G_L$, f – гладкая функция, 1-график которой совпадает с L в окрестности точки y . Положим $h_{n,L}(y) = f^{(n)}(q_y)$, где q_y – q -координата точки y . Обозначим через $Q_n(L)$ множество нулей функции $h_{n,L}$. Обозначим через $\overline{Q}_n(L)$ множество, состоящее из таких точек $y \in L$, что найдется сколь угодно C^∞ -близкое к L лежандрово зацепление L' , содержащее точку $y' \in Q_n(L')$, близкую к точке y . Тогда для любого n множество $Q_n(L) \subset \overline{Q}_n(L)$, $\overline{Q}_1(L)$ есть множество критических точек зацепления L , $Q_2(L) = \overline{Q}_2(L)$ есть множество 0-точек Штурма зацепления L , $\overline{Q}_3(L)$ есть множество 0-точек Арнольда зацепления L .

Из сформулированных выше теорем вытекает, что для любого $L \in \mathcal{L}_1$ каждое из множеств $\overline{Q}_1(L)$, $\overline{Q}_2(L)$, $\overline{Q}_3(L)$ содержит по меньшей мере две точки. Несложно показать, что для любого нечетного $n \geq 3$ и любого $L \in \mathcal{L}_1$ множество $\overline{Q}_n(L)$ также содержит по меньшей мере две точки. (Дадим набросок доказательства этого утверждения для σ -общего лежандрова узла L , не являющегося 1-графиком гладкой функции. Из $m(L) = 0$ следует, что найдется по меньшей мере два таких отрезка $J \subset L$, что концы каждого из них (но не внутренние точки) проектируются в клювы фронта $\sigma(L)$, и кривая $\sigma(J)$ либо входит в оба клюва сверху, либо в оба снизу. Тогда при приближении к одному из концов отрезка J функция $h_{n,L}$ стремится к $+\infty$, к другому — к $-\infty$. Поэтому на отрезке J найдется точка множества $Q_n(L)$.) Можно, однако, привести пример такого σ -общего лежандрова узла $L \in \mathcal{L}_1$ (фронт которого имеет два клюва и одну точку самопересечения), что множество $\overline{Q}_4(L)$ пусто. Вероятно, подобные примеры можно построить и для четных $n > 4$.

§ 8. Доказательства обобщений теоремы Гурвица

8.1. Назовем лежандрово зацепление $L \subset J^1(S^1)$ λ -общим, если оно σ -общее, образы λ -точек Штурма являются неособыми точками фронта $\sigma(L)$ и дифференциал отображения $F_{L,\lambda}$ отличен от нуля в любой λ -точке Штурма. Докажем утверждение теоремы 7.3 для λ -общего узла L .

Возьмем лежандрово зацепление $L^+ = L \cup V_c \in \mathcal{L}_1^+$, переходящее в узел $L \in \mathcal{L}_1$ при проекции $\mathcal{L}_1^+ \rightarrow \mathcal{L}_1$. Пусть $P = \mathcal{P}(L^+)$ — положительная псевдоинволюция фронта $\sigma(L^+)$. Множество $P(V_c) \subset \Sigma = \sigma(L)$ есть график Γ_{H_L} функции $H_L = \mathcal{H}(L)$. Обозначим через Y проекцию множества $\text{Sw}(P) \cap \Gamma_{H_L}$ на S^1 . Кусочно-гладкая функция H_L является гладкой вне Y , в точках множества Y ее правые и левые производные различны. Рассмотрим множество $\mathcal{G}_Y$ обобщенных функций (элементов пространства, двойственного к $C^\infty(S^1)$), имеющих вид $\varphi = \sum_{s \in Y} b_\varphi^s \delta_s + g_\varphi$, где δ_s — δ -функция Дирака с носителем в точке s , b_φ^s — ненулевое число, g_φ — гладкая функция на $S^1 \setminus Y$ с регулярными нулями, имеющая ненулевые левые и правые пределы в каждой из точек $s \in Y$. (Более подробно: результат применения обобщенной функции φ к функции $f \in C^\infty(S^1)$ есть $\sum_{s \in Y} b_\varphi^s f(s) + \int_{S^1 \setminus Y} f(q)g_\varphi(q) dq$.)

8.2. Перемены знака. Определим знак обобщенной функции $\varphi \in \mathcal{G}_Y$ в точке $q \in S^1$ как знак числа b_φ^q при $q \in Y$ и как знак числа $g_\varphi(q)$ при $q \notin Y$. Будем говорить, что функция $\varphi \in \mathcal{G}_Y$ меняет знак справа (слева) в точке $s \in Y$, если знак числа b_φ^s отличен от знака правого (левого) предела функции g_φ в точке s . Вообще говоря, функция φ может менять знак в точке $s \in Y$ дважды. Функция φ меняет знак в точке $q \in S^1 \setminus Y$, если g_φ меняет знак в точке q .

Если узел L λ -общий, то результат применения дифференциального оператора $D_\lambda = \frac{d^2}{dq^2} + \lambda$ к функции H_L есть обобщенная функция из множества $\mathcal{G}_Y$, и $g_{D_\lambda H_L}(q) = H_L''(q) + \lambda H_L(q)$ при $q \in S^1 \setminus Y$. Рассуждая как в доказательстве леммы 1.1, легко увидеть, что если $D_\lambda H_L(q_0) = 0$ при $q_0 \notin Y$, то $F_{L,\lambda}(z_0) = 0$, где $z_0 \in L$ — такая точка, что $\sigma(z_0) = (q_0, H_L(q_0))$. Из леммы 7.2 следует, что $z_0 \in N_\lambda^S(L)$.

8.3. Теорема Гурвица для обобщенных функций.

ЛЕММА 8.1. Если обобщенная функция $\varphi \in \mathcal{G}_Y$ аннулирует функции $1, \cos q, \sin q, \dots, \cos lq, \sin lq$, то она меняет знак по меньшей мере $2l + 2$ раза.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $Y_i, i \in \{1, 2\}$, множество точек окружности, в которых функция $D_\lambda H_L$ меняет знак ровно i раз; заметим, что $Y_2 \subset Y$. Предположим, что

$$2l' = \#(Y_1) + 2\#(Y_2) < 2l + 2.$$

Перемножая подходящие тригонометрические многочлены степени 1, построим тригонометрический многочлен Q степени l' , который обращается в нуль в точности на множестве $Y_1 \cup Y_2$, меняет знак в точках множества Y_1 и не меняет знака в точках множества Y_2 . Изменяя знак функции Q , если необходимо, можно считать, что знаки функций $D_\lambda H_L$ и Q совпадают в точках множества $S^1 \setminus (Y_1 \cup Y_2)$. Докажем, что

$$\langle D_\lambda H_L, Q \rangle = \sum_{s \in Y} b_{D_\lambda H_L}^s Q(s) + \int_{S^1 \setminus Y} Q(q) g_{D_\lambda H_L}(q) dq > 0.$$

Действительно, в силу выбора многочлена Q , второе слагаемое положительно, а первое равно

$$\sum_{s \in Y \setminus (Y_1 \cup Y_2)} b_{D_\lambda H_L}^s Q(s) \geq 0.$$

Значит, $D_\lambda H_L$ не аннулирует Q . Противоречие. $\square$

8.4. Применение леммы 8.1. Пространство T_k тригонометрических многочленов степени не выше k инвариантно относительно действия дифференциального оператора D_λ . Поскольку оператор D_λ самосопряжен, из ортогональности H_L пространству T_k следует, что $D_\lambda H_L$ аннулирует функции из T_k . Если $\lambda = (k + 1)^2$, то функции $\sin(k + 1)q, \cos(k + 1)q$ лежат в ядре оператора D_λ , а следовательно, аннулируются обобщенной функцией $D_\lambda H_L$. Значит, в условиях теоремы 7.3 обобщенная функция $D_\lambda H_L$ (для λ -общего L) всегда имеет не менее $2k + 2$ перемен знака, а при $\lambda = (k + 1)^2$ не менее $2k + 4$ перемен знака.

Для каждой перемены знака обобщенной функции $D_\lambda H_L$, происходящей в точке множества Y , мы найдем точку множества $N_\lambda^S(L)$. Найденные таким образом λ -точки Штурма будут различными и отличными от точек, соответствующих нулям функции $g_{D_\lambda H_L}$. Это завершит доказательство теоремы 7.3 для случая λ -общего узла.

8.5. Псевдоинволюции и ручные разбиения. Пусть $L^+ = L \cup V_c$ есть прообраз L в $\mathcal{L}_1^+$ при проекции $\mathcal{L}_1^+ \rightarrow \mathcal{L}_1$. Псевдоинволюция $P^+ = \mathcal{P}(L^+)$ порождает разбиение D_{P^+} фронта $\sigma(L) \cup \sigma(V_c)$. Обозначим через D_L разбиение фронта $\Sigma = \sigma(L)$, полученное из D_{P^+} выбрасыванием сечения $\sigma(V_c)$. Разбиение D_L не зависит от выбора L^+ . Определение ручного разбиения было дано в п. 6.2.

ЛЕММА 8.2. Разбиение D_L ручное.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если P – псевдоинволюция σ -общего фронта $\Sigma' \subset J^0(S^1)$, то всякая компонента пространства разрешения $R(D_P)$ есть либо 2-компонента, либо 0-компонента. Это следует из того, что если у двух сечений разбиения D_P совпадают правые концы, то и левые тоже совпадают. Поэтому у пространства $R(D_L)$ всякая компонента есть либо 2-компонента, либо 0-компонента. У пространства $R(D_L)$ есть 0-компонента, проецирующаяся в сечение Γ_{H_L} . Из теоремы 2.5 следует, что $\chi(D_L) = \chi(P^+) = 0$. $\square$

8.6. Поиск нулей $F_{L,\lambda}$ для обобщенных перемен знака. График Γ_{H_L} – образ единственной (согласно лемме 6.1) 0-компоненты S^0 пространства $R(D_L)$ под действием отображения ψ_{D_L} . Для каждой точки $s \in Y$ обозначим через $\hat{s} = (s, H_L(s)) \in \text{Sw}_0(D_L) = \Gamma_{H_L} \cap \text{Sw}(D_L)$ соответствующую точку излома графика. Поскольку разбиение D_L ручное, лемма 6.3 по точке $\hat{s}$ строит отрезки $J_s^r(D_L), J_s^l(D_L) \subset L$.

ЛЕММА 8.3. Пусть $s \in Y$. Если обобщенная функция $D_\lambda H_L$ меняет знак слева в точке s , то на отрезке $J_s^r(D_L)$ найдется точка множества $N_\lambda^S(L)$. Если $D_\lambda H_L$ меняет знак справа в точке s , то на отрезке $J_s^l(D_L)$ найдется точка множества $N_\lambda^S(L)$.

Пользуясь леммой 8.3, каждой перемене знака обобщенной функции $D_\lambda H_L$ в точке $s \in Y$ можно поставить в соответствие точку множества $N_\lambda^S(L)$. Согласно лемме 6.3, точки множества $N_\lambda^S(L)$, отвечающие различным переменам знака, различны и не лежат на Γ_{H_L} . Следовательно, число точек множества $N_\lambda^S(L)$ не меньше числа перемен знака обобщенной функции $D_\lambda H_L$, т.е. утверждение теоремы 7.3 справедливо для λ -общего узла. Прежде чем доказывать лемму 8.3, сформулируем и докажем лемму 8.4, которая будет использована также в доказательстве леммы 8.12.

8.7. Индекс Маслова и кривизна. Пусть $e: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{RP}^1$ – универсальное накрытие. Зафиксируем функцию $i_e: \mathbb{R} \setminus e^{-1}(\{\infty\}) \rightarrow \mathbb{Z}$, которая постоянна на каждом из интервалов, из которых состоит $\mathbb{R} \setminus e^{-1}(\{\infty\})$, и удовлетворяет следующему условию: для любой точки $y \in e^{-1}(\{\infty\})$ и любых двух близких к ней точек $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus e^{-1}(\{\infty\})$ таких, что $e(x_1) < 0, e(x_2) > 0$ ($e(x_1), e(x_2) \in \mathbb{RP}^1 \setminus \{\infty\}$), справедливо равенство $i_e(x_2) = i_e(x_1) + 1$. Пусть $l: [0, T] \rightarrow L$ – такой путь (непрерывное отображение), что $l(0), l(T) \in G_L$. Рассмотрим поднятие $\tilde{l}_\lambda$ отображения $F_{L,\lambda} \circ l: [0, T] \rightarrow \mathbb{RP}^1$ – такое непрерывное отображение $\tilde{l}_\lambda: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, что $e \circ \tilde{l}_\lambda = F_{L,\lambda} \circ l$. Положим $i_\lambda(l) = i_e(\tilde{l}_\lambda(T)) - i_e(\tilde{l}_\lambda(0))$. Легко видеть, что число $i_\lambda(l)$ не зависит от выбора поднятия. Индекс Маслова $m(l)$ пути l был определен в п. 2.5.

ЛЕММА 8.4. $i_\lambda(l) = m(l)$.

Из леммы 8.4 также вытекает, что число Маслова лежандрова узла L совпадает со степенью отображения $F_{L,\lambda}$ при некотором выборе ориентаций.

ЛЕММА 8.5. Пусть x – клюв фронта $\Sigma = \sigma(L)$. Тогда для любой точки $y \in G_\Sigma$, достаточно близкой к x , значение функции $F_{L,\lambda}$ на прообразе точки y в L положительно, если y принадлежит верхней из ветвей фронта Σ , входящих в клюв, и отрицательно, если она принадлежит нижней.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение вытекает из определения отображения $F_{L,\lambda}$ и того, что вторая производная функции, графиком которой является ветвь, входящая в клюв, при подходе к клюву стремится к $+\infty$ для верхней ветви, и к $-\infty$ для нижней. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 8.4. Достаточно доказать утверждение для случая, когда $l: [0, T] \rightarrow L$ — гладкий путь общего положения. Обозначим через l_t путь $l_t = l|_{[0, t]}: [0, t] \rightarrow L$. В силу леммы 8.5 числа $i_\lambda(l_t)$ и $m(l_t)$ меняются на одинаковую величину, когда t проходит через такое значение t_0 , что $l(t_0) \in L \setminus G_L$. Это завершает доказательство. $\square$

ЛЕММА 8.6. Пусть $L \subset J^1(S^1)$ — лежандрово зацепление, $l: [0, T] \rightarrow L$ — такой путь, что $l(0), l(T) \in G_L$. Если знаки чисел $F_{L,\lambda}(l(0)), F_{L,\lambda}(l(T))$ различны и $m(l) = 0$, то найдется такое $t_1 \in [0, T]$, что $F_{L,\lambda}(l(t_1)) = 0$ и $m(l_1) = 0$, где l_1 — ограничение пути l на отрезок $[0, t_1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отрезок $Z \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{RP}^1$ с концами в точках $F_{L,\lambda}(l(0)), F_{L,\lambda}(l(T))$. Из условия на знаки следует, что $0 \in Z$. Рассмотрим поднятие $\tilde{l}_\lambda: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ отображения $F_{L,\lambda} \circ l: [0, T] \rightarrow \mathbb{RP}^1$. Из условия $m(l) = 0$ и леммы 8.4 вытекает, что точки $\tilde{l}_\lambda(0), \tilde{l}_\lambda(T)$ лежат в одной связной компоненте множества $\mathbb{R} \setminus e^{-1}(\{\infty\})$. Поэтому отрезок Z' с концами в $\tilde{l}_\lambda(0), \tilde{l}_\lambda(T)$ переводится в Z проекцией e . Найдется такая точка $r \in Z'$, что $e(r) = 0 \in \mathbb{RP}^1$. Поскольку точка r лежит между концами отрезка Z' , существует такое $t_1 \in [0, T]$, что $\tilde{l}_\lambda(t_1) = r$. Тогда $F_{L,\lambda}(l(t_1)) = 0$. Кроме того, $i_e(\tilde{l}_\lambda(0)) = i_e(\tilde{l}_\lambda(t_1))$, поэтому по лемме 8.4 $m(l_1) = 0$. $\square$

8.8. Доказательство леммы 8.3. Докажем утверждение леммы для левой перемены знака (доказательство для правой перемены знака аналогично). Рассмотрим отрезок $J^r \subset L$, получающийся из отрезка $J_s^r(D_L)$ отбрасыванием малых окрестностей концов. Обозначим через a^r конец отрезка J^r , близкий к концу отрезка $J_s^r(D_L)$, проектирующемуся в клюв, через x^r — конец отрезка J^r , близкий к точке z^r .

Переключающая точка $\hat{s}$ содержится в образах двух сечений из D_L . Образ одного из этих сечений есть Γ_{H_L} , другое совпадает с сечением $\gamma_{\hat{s}}: \Lambda \rightarrow \Sigma$, определенным в лемме 6.3. Рассмотрим неособые точки фронта Σ , близкие к переключающей точке $\hat{s}$. По определению масловского потенциала μ_L он принимает нулевое значение на прообразах в L неособых точек фронта Σ , принадлежащих графику Γ_{H_L} . Следовательно, μ_L обращается в нуль на прообразе в L малой окрестности точки $\hat{s}$. Из масловости разбиения D_L вытекает, что значение масловского потенциала μ_L равно нулю на прообразах в L неособых точек фронта Σ , принадлежащих $\gamma_{\hat{s}}(\Lambda)$. Поскольку $\sigma(a^r), \sigma(x^r) \in \gamma_{\hat{s}}(\Lambda)$, значение масловского потенциала μ_L в концах отрезка J^r равно нулю. Покажем, что числа $F_{L,\lambda}(x^r)$ и $F_{L,\lambda}(a^r)$ имеют разные знаки. После этого применение леммы 8.6 к пути, параметризующему отрезок J^r , завершит доказательство леммы 8.3.

Предположим, что обобщенная функция $D_\lambda H_L$ отрицательна в точке s , т.е. график Γ_{H_L} имеет излом “вверх” в точке $\hat{s}$ (доказательство леммы для случая положительного знака аналогично). Поскольку $D_\lambda H_L$ меняет знак слева в точке s , функция $F_{L,\lambda}$ положительна на некоторой окрестности точки z^r . В частности, $F_{L,\lambda}(x^r) > 0$. Рассмотрим точку $d \in \Gamma_{H_L}$ с той же q -координатой, что и у точки $\sigma(x^r)$. Из того, что Γ_{H_L} имеет излом “вверх” в точке $\hat{s}$, следует, что точка $\sigma(x^r)$ лежит выше точки d

(т.е. ее u -координата больше). Из положительности псевдоинволюции P^+ вытекает теперь, что точка $P^+(\sigma(x^r))$ лежит выше точки $\sigma(x^r)$. Поэтому для любой общей точки $y \in \gamma_{\hat{s}}(\Lambda)$ точка $P^+(y)$ расположена выше точки y . Следовательно, сечение $\gamma_{\hat{s}}$ входит снизу в правый клюв фронта Σ . Отсюда $F_{L,\lambda}(a^r) < 0$ по лемме 8.5. Утверждение леммы 8.3 доказано. $\square$

8.9. Сведение к случаю λ -общего узла. Докажем утверждение теоремы 7.3 для произвольных (необших) лежандровых узлов $L \in \mathcal{L}_1$. Малым шевелением мы превратим узел L в λ -общий без увеличения числа точек множества $N_{\lambda}^S(L)$ (мы предполагаем, что это множество конечно). Для гладкой функции $\eta \in C^{\infty}(S^1)$ обозначим через Ψ_{η} контактоморфизм

$$(p, q, u) \mapsto (p + \eta'(q), q, u + \eta(q)).$$

Утверждение теоремы сводится к случаю λ -общего узла с помощью двух следующих лемм.

ЛЕММА 8.7. *Найдется сколь угодно C^{∞} -близкий к L λ -общий лежандров узел $L_0 \in \mathcal{L}_1$ такой, что $\#N_{\lambda}^S(L_0) \leq \#N_{\lambda}^S(L)$.*

ЛЕММА 8.8. *Если $L_0 \in \mathcal{L}_1$ — достаточно C^{∞} -близкий к L λ -общий лежандров узел, то найдется такая функция $\eta \in C^{\infty}(S^1)$, что лежандров узел $L_1 = \Psi_{\eta}(L_0)$ удовлетворяет условиям: (1) $\#N_{\lambda}^S(L_1) = \#N_{\lambda}^S(L_0)$; (2) функция H_{L_1} ортогональна функциям $1, \sin q, \cos q, \dots, \sin kq, \cos kq$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 8.7. Докажем сначала следующее утверждение.

ЛЕММА 8.9. *Пусть $F_{L,\lambda}(x) = 0$, U — такая окрестность точки x в $J^1(S^1)$, что x — единственный нуль отображения $F_{L,\lambda}$ на множестве $L \cap U$. Найдется сколь угодно C^{∞} -близкий к L лежандров узел $L_U \in \mathcal{L}_1$, совпадающий с L вне U , такой, что выполнено следующее: (1) если $F_{L,\lambda}$ не меняет знак в точке x , то $F_{L_U,\lambda}$ не обращается в нуль на $L_U \cap U$; (2) если $F_{L,\lambda}$ меняет знак в точке x , то найдется ровно одна такая точка $x' \in L_U \cap U$, что $F_{L_U,\lambda}(x') = 0$, при этом $dF_{L_U,\lambda}(x') \neq 0$ и $\mu_{L_U}(x') = \mu_L(x)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В малой окрестности точки $x = (p_0, q_0, u_0)$ узел L совпадает с 1-графиком функции f , определенной на интервале $W \subset S^1$. Выберем функцию $g: W \rightarrow \mathbb{R}$ с компактным носителем так: если функция $f'' + \lambda f$ не меняет знак в точке q_0 , то g положительна и постоянна в окрестности точки q_0 ; если $f'' + \lambda f$ меняет знак в точке q_0 , то $g(q)$ совпадает с $q - q_0$ в окрестности точки q_0 . Обозначим через L_t лежандрово многообразие, полученное из L заменой 1-графика функции f на 1-график функции $f + tg$. Для всех узлов одного из семейств $\{L_{\varepsilon}\}$ или $\{L_{-\varepsilon}\}$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнено утверждение леммы (утверждение о совпадении значений масловских потенциалов следует из C^{∞} -близости). $\square$

Применим лемму 8.9 ко всем точкам множества $N_{\lambda}^S(L)$, выбирая окрестности U попарно не пересекающимися. У полученного узла L' все нули отображения $F_{L',\lambda}$ регулярны. Следовательно, сколь угодно C^{∞} -малым шевелением узел L' можно сделать λ -общим, не меняя числа точек множества $N_{\lambda}^S(L')$. Доказательство леммы 8.7 закончено. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 8.8. Пользуясь леммой 5.3, выберем отрезок $I \subset S^1$ таким, что множество $\sigma(L_0) \cap J^0(I)$ состоит из неособых точек фронта $\sigma(L_0)$ и его прообраз в L_0 не содержит точек множества $N_\lambda^S(L')$.

Всякая непрерывная функция η на S^1 определяет функционал η^* на пространстве T^k тригонометрических многочленов степени не выше k при помощи L^2 -спаривания: $\eta^*(f) = \int_{S^1} \eta(q)f(q) dq$. Следующее простое утверждение хорошо известно.

ЛЕММА 8.10. *Найдутся такие функции $\eta_1, \dots, \eta_{2k+1} \in C^\infty(S^1)$ с носителем в I , что функционалы $\eta_1^*, \dots, \eta_{2k+1}^*$ линейно независимы.*

Рассмотрим функционал $H_{L_0}^*$ на пространстве T^k . Согласно лемме 8.10, найдется ровно одна линейная комбинация η функций $\eta_1^*, \dots, \eta_{2k+1}^*$ такая, что $\eta^* = -H_{L_0}^*$. Положим $L_1 = \Psi_\eta(L_0)$. Из C^0 -близости L_0 и L следует, что функции H_{L_0} и H_L C^0 -близки (согласно утверждению 7.1) и, значит, функция η C^∞ -мала. Отсюда вытекает, что узлы L_1 и L C^∞ -близки, если L_0 и L достаточно C^∞ -близки. Поэтому $N_\lambda^S(L_1) = N_\lambda^S(L_0)$, так как L_1 и L_0 C^∞ -близки к L и могут различаться лишь на множестве $\{(p, q, u) \mid q \in I\}$.

Для завершения доказательства леммы 8.8 остается проверить, что $H_{L_1}^* = 0$. Это вытекает из следующего утверждения.

ЛЕММА 8.11. *Для любого $L' \in \mathcal{L}_1$ и любой функции $\eta \in C^\infty(S^1)$ верно*

$$H_{\Psi_\eta(L')} = H_{L'} + \eta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через U всюду плотное подмножество S^1 , состоящее из регулярных значений проекции $L' \rightarrow S^1$. Рассмотрим семейство узлов $L'_t = \Psi_{t\eta}(L')$, $t \in [0, 1]$. Непрерывно зависящая от t функция $H_{L'_t} - t\eta$ в действительности не зависит от t , поскольку в каждой из точек множества U она может принимать лишь конечное число значений. Поэтому $H_{\Psi_\eta(L')} - \eta = H_{L'}$. $\square$

Доказательство теоремы 7.3 закончено.

8.10. Доказательство теоремы 7.4. Рассмотрим лежандров узел $L_c = \Psi_c(L) \in \mathcal{L}_1$, полученный из узла L сдвигом на c вдоль координаты u . Если $c = -\int_{S^1} H_L(q) dq$, то по лемме 8.11 функция H_{L_c} ортогональна функциям $1, \cos q, \dots, \sin kq$, т.е. узел L_c удовлетворяет условию теоремы 7.3. При таком сдвиге λ -точки Арнольда узла L переходят в λ -точки Арнольда узла L_c . Поэтому утверждение теоремы следует из теоремы 7.3 и следующей леммы, являющейся вариантом леммы Ролля.

ЛЕММА 8.12. *У любого отрезка $J \subset L$ с концами в точках множества $N_\lambda^S(L)$ есть по крайней мере одна внутренняя точка, принадлежащая множеству $N_\lambda^A(L)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим гладкий путь $l: [0, 1] \rightarrow L$, диффеоморфно параметризующий отрезок J . Из того, что его концы принадлежат множеству $N_\lambda^S(L)$, получаем $m(l) = 0$. По лемме 8.4 отсюда вытекает, что $i_\lambda(l) = 0$. Поэтому всякое поднятие $\tilde{l}_\lambda: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ отображения $F_{L, \lambda} \circ l: [0, 1] \rightarrow \mathbb{RP}^1$ удовлетворяет условию $\tilde{l}_\lambda(0) = \tilde{l}_\lambda(1)$. По лемме Ролля найдется такое $t \in]0, 1[$, что $d\tilde{l}_\lambda(t) = 0$ и, следовательно, $dF_{L, \lambda}(l(t)) = 0$. Тем самым, $l(t)$ есть λ -точка Арнольда. $\square$

8.11. Доказательство теоремы 7.5. Мы считаем, что число критических точек узла $L \subset \mathcal{L}_1$ конечно. Рассуждая как в доказательстве теоремы 7.3, мы можем свести утверждение теоремы 7.5 к случаю, когда лежандров узел L является σ -общим и образы критических точек узла L под действием проекции σ являются неособыми точками фронта $\Sigma = \sigma(L)$.

Пусть функция $H_L: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ и множество $Y = Y(L) \subset S^1$ определены как в доказательстве теоремы 7.3. Производная H'_L функции H_L – определенная на $S^1 \setminus Y$ гладкая функция, имеющая ненулевые односторонние пределы в точках множества Y . Функция H'_L L^2 -ортогональна тригонометрическим многочленам степени не выше k . Тогда функция H'_L меняет знак не менее $2k$ раз (перемены знака в точках множества Y также учитываются). Это следует из теоремы Гурвица (применимо доказательство леммы 8.1).

Если H'_L меняет знак в точке $s_0 \in S^1 \setminus Y$, то точка узла L , проектирующаяся в точку $(s_0, H_L(s_0))$, – критическая. Согласно леммам 8.2 и 6.3, всякая точка $s \in Y$ определяет отрезок $J_s^*(D_L) \subset L$, где $\hat{s} = (s, H_L(s)) \in \Gamma_{H_L}$. Если функция H'_L меняет знак в точке $s \in Y$, то значения координаты p в концах отрезка $J_s^*(D_L)$ различны по знаку. Поэтому $J_s^*(D_L)$ содержит хотя бы одну критическую точку узла L . Из леммы 6.3 следует, что все построенные критические точки различны. $\square$

§ 9. Гипотезы Арнольда

9.1. Доказательство теоремы 0.1. Согласно лемме 1.1, точки касания лежандрова зацепления $L \in ST^*\mathbb{R}^2$ со слоями проекции ρ – это в точности нули отображения F_L . Поскольку функция F_L совпадает с функцией $F_{L,1}$, определенной в п. 7.1, то точки касания L со слоями проекции ρ – это в точности 1-точки Штурма зацепления L (нули отображения $F_{L,1}$).

Мы можем считать, что начало координат на плоскости находится внутри фронтов $\rho(L_0)$ и $\rho(L_1)$. Используя отождествление $ST^*\mathbb{R}^2$ и $J^1(S^1)$ (см. рис. 3), получаем, что фронт $\sigma(L_0)$ – график отрицательной функции $f_0 \in C^\infty(S^1)$, фронт $\sigma(L_1)$ – график положительной функции $f_1 \in C^\infty(S^1)$. Согласно утверждению 7.1, семейство лежандровых узлов $\{L_t\}$ определяет семейство $\{H_t = \mathcal{H}(L_t)\}$ непрерывных функций на S^1 . Очевидно, $f_0 = H_0$, $f_1 = H_1$. Следовательно, найдется такое $t_0 \in [0, 1]$, что $\int_{S^1} H_{t_0}(q) dq = 0$. Применяя к L_{t_0} теорему 7.3 с $\lambda = 1$ и $k = 0$, получаем, что узел L_{t_0} касается слоев проекции ρ по меньшей мере в четырех точках. Основное утверждение теоремы 0.1 доказано.

Предположим теперь, что семейство $\{L_t\}$ общее в том смысле, что в семействе фронтов $\{\rho(L_t)\}$ встречаются лишь перестройки, изображенные на рис. 1 а–е. Покажем, что среди фронтов $\{\rho(L_t)\}$ найдется фронт с по меньшей мере четырьмя невырожденными клювами. По уже доказанному найдется такой узел L_{t_0} , что проекция $\rho|_{L_{t_0}}$ имеет не меньше четырех критических точек. Если t_0 – не момент перестройки, то утверждение доказано. Если t_0 – момент перестройки, то фронты $\{\rho(L_t)\}$ при t , принадлежащем по крайней мере одной из двух достаточно малых окрестностей точки t_0 , имеют по меньшей мере 4 невырожденных клюва. $\square$

9.2. Доказательство теоремы 0.3. Вершины лежандрова зацепления L – это в точности 1-точки Арнольда, определенные в п. 7.2. Применение теоремы 7.4 (с $\lambda = 1$ и $k = 0$) доказывает теорему 0.3. $\square$

9.3. Ручные узлы. Аналогии теорем 0.1 и 0.3 справедливы и для некоторых других компонент пространства лежандровых узлов в $ST^*\mathbb{R}^2 = J^1(S^1)$.

По каждой связной компоненте $\mathcal{L}_0$ пространства лежандровых зацеплений в $J^1(S^1)$ можно построить пространство $\mathcal{L}_0^+$ лежандровых зацеплений так же, как в §7 по компоненте $\mathcal{L}_1$ строилось пространство $\mathcal{L}_1^+$ (зацепление $L^+ \in \mathcal{L}_0^+$ получается из зацепления $L \in \mathcal{L}_0$ добавлением компоненты $V_c = \{u = c, p = 0\}$, фронт которой лежит выше фронта $\sigma(L)$). Определена естественная проекция $\mathcal{L}_0^+ \rightarrow \mathcal{L}_0$.

Пусть $L^+ \in \mathcal{L}_0^+$ – σ -общее зацепление. Назовем псевдоинволюцию P^+ фронта $\sigma(L^+)$ *ручной*, если она положительна и $\chi(P^+) = 0$. Компонента $\mathcal{L}_0$ пространства лежандровых узлов называется *ручной*, если фронт какого-то (и тогда любого по теореме 2.5) σ -общего лежандрова зацепления из $\mathcal{L}_0^+$ допускает ручную псевдоинволюцию. Назовем лежандров узел *ручным*, если он принадлежит ручной компоненте.

ЛЕММА 9.1. Пусть $L \subset J^1(S^1)$ – ручной σ -общий узел. Тогда число Маслова $m(L)$ узла L равно нулю. Предположим, что P^+ – ручная псевдоинволюция фронта $\sigma(L^+)$, где $L^+ = L \cup V_c$ – поднятие узла L в $\mathcal{L}_0^+$. Тогда существует ровно один такой целочисленный масловский потенциал μ_{P^+} на L^+ , равный 1 на V_c , что псевдоинволюция P^+ является масловской относительно μ_{P^+} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим разбиение D_{P^+} фронта $\sigma(L^+)$, порожденное псевдоинволюцией P^+ . Отбрасывая сечение $\sigma(V_c)$, получаем разбиение D_- фронта $\sigma(L)$. Рассуждая как в доказательстве леммы 8.2, получаем, что разбиение D_- ручное в смысле определения, данного в п. 6.2. Докажем, что для любой точки $x \in \text{Sw}(D_-)$ индекс Маслова пути l_x , диффеоморфно параметризующего отрезок $J_x^*(D_-)$, определенный в лемме 6.3, равен нулю. Действительно, по лемме 6.3 всякий клюв фронта $\sigma(L)$ является концом ровно одного сечения $\gamma_{x'}$, где $x' \in \text{Sw}(D_-)$. Прообразы в $R(D)$ клювов, являющихся концами сечения $\gamma_{x'}$, лежат в одной компоненте разрешения $R(D)$. Из леммы 6.2 следует, что прообразы этих клювов в L либо оба содержатся, либо оба не содержатся в $J_x^*(D_-)$. Поскольку разбиение D_- получается из псевдоинволюции, сечение $\gamma_{x'}$ либо входит в оба клюва сверху, либо в оба снизу. Поэтому при вычислении индекса Маслова пути l_x эти клювы учитываются с противоположными знаками. Следовательно, $m(l_x) = 0$.

Обозначим $\Gamma = P^+(\sigma(V_c))$. Из леммы 6.3 вытекает, что число Маслова узла L равно сумме по всем $x \in \text{Sw}(D_-) \cap \Gamma$ индексов Маслова путей l_x , подсчитанных с некоторыми знаками. Значит, $m(L) = 0$.

Пусть $y_0 \in \Gamma$ – неособая точка фронта $\sigma(L)$, z_0 – ее прообраз в L , $z_1 \in V_c$ – такая точка, что $P^+(y_0) = \sigma(z_1)$. Масловский потенциал μ_{P^+} однозначно определяется тем, что он принимает значение 1 на V_c и значение 0 в точке z_0 . Для всякой переключающей точки x выполнено $m(l_x) = 0$ и, следовательно, значения μ_{P^+} на ее прообразах в L совпадают. Поскольку $\mu_{P^+}(z_1) = \mu_{P^+}(z_0) + 1$, псевдоинволюция P^+ масловская относительно μ_{P^+} по утверждению 2.4. Отсюда, в свою очередь, следует, что μ_{P^+} обращается в нуль на прообразах в L неособых точек фронта $\sigma(L)$, принадлежащих Γ . Поэтому определение масловского потенциала μ_{P^+} не зависит от выбора точки y_0 . $\square$

9.4. Гипотезы Арнольда для ручных узлов.

ТЕОРЕМА 9.2. Пусть $\{L_{t \in [0,1]}\}$ – такой гладкий путь в ручной компоненте пространства лежандровых узлов, что ограничение координаты u на L_0 отри-

цательно, а на L_1 положительно. Найдется такое $t_0 \in [0, 1]$, что лежандров узел L_{t_0} касается слоев проекции ρ по меньшей мере в четырех точках.

ТЕОРЕМА 9.3. *Всякий ручной лежандров узел имеет по меньшей мере четыре вершины.*

9.5. Пример. Приведем пример ручного лежандрова узла с гладким ρ -фронтом, не принадлежащего изучавшейся ранее компоненте $\mathcal{L}_1$.

Опишем вначале удобный геометрический способ построения по фронту $\sigma(L) \subset J^0(S^1)$ фронта $\rho(L_1) \subset \mathbb{R}^2$ лежандрова узла L_1 из той же связной компоненты пространства $\mathcal{L}$, что и L . Фронт $\rho(L_1)$ есть образ фронта $\sigma(L)$ при вложении цилиндра $J^0(S^1)$ в $\mathbb{R}^2$: $(q, u) \mapsto (e^u \cos q, e^u \sin q)$, фронт $\rho(L_1)$ коориентирован от начала координат.

Рис. 13

При этом вложении σ -фронт узла L' , изображенный на рис. 13 а, переходит во фронт, диффеоморфный изображенному на рис. 13 б. После этого несложно проверить, построив соответствующую последовательность перестроек фронтов на плоскости, что узел $L \subset ST^*\mathbb{R}^2$, фронт которого $\rho(L)$ приведен на рис. 13 с, принадлежит той же связной компоненте $\mathcal{L}'$ пространства $\mathcal{L}$, что и узел L' . Эта компонента ручная, поскольку $\sigma(L')$ допускает ручную псевдоинволюцию P , определяемую условием $\text{Sw}(P) = \{x\}$. Компоненты $\mathcal{L}'$ и $\mathcal{L}_1$ различны, так как узел L' не изотопен в классе гладких вложений сечению расслоения $J^1(S^1) \rightarrow S^1$. По теореме 9.3 у всякого лежандрова узла из компоненты $\mathcal{L}'$ есть по меньшей мере четыре вершины.

9.6. Теоремы Гурвица для ручных узлов. Ключевую роль в доказательстве теорем 9.2 и 9.3 играют теоремы 9.4 и 9.5 – аналоги теорем 7.3 и 7.4 для ручных компонент. Пусть L – σ -общий лежандров узел из ручной компоненты $\mathcal{L}_0$. Рассмотрим его поднятие $L^+ = L \cup V_c$ в $\mathcal{L}_0^+$. По теореме 2.5 фронт $\sigma(L^+)$ допускает хотя бы одну ручную псевдоинволюцию P . Обозначим через $H_{L,P}: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывную функцию, график которой совпадает с $P(\sigma(V_c)) \in \sigma(L)$, через $\mathcal{R}(L)$ – множество таких функций $H: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$, что $H = H_{L,P}$ для какой-нибудь ручной псевдоинволюции P . Множество $\mathcal{R}(L)$ всегда конечно. Число элементов в $\mathcal{R}(L)$, вообще говоря, различно для узлов L , принадлежащих разным компонентам пространства $\mathcal{L}_0 \setminus \mathcal{D}$.

Определим для каждого $L \in \mathcal{L}_0 \cap \mathcal{D}$ множество $\mathcal{R}(L)$ непрерывных функций на S^1 , задающих непрерывные сечения фронта $\sigma(L)$: функция H принадлежит множеству $\mathcal{R}(L)$, если и только если найдутся последовательность (L_i) узлов из $\mathcal{L}_0 \setminus \mathcal{D}$, C^∞ -сходящаяся к L , и последовательность функций $H_i \in \mathcal{R}(L_i)$, C^0 -сходящаяся к H . Рас-

суждая как в доказательстве теоремы 5.1, можно показать, что множество $\mathcal{R}(L)$ непусто и конечно.

Из леммы 7.2 вытекает, что на всяком ручном лежандровом узле есть целочисленный масловский потенциал, однозначно определенный с точностью до прибавления константы. Следующие теоремы являются обобщениями теорем 7.3 и 7.4.

ТЕОРЕМА 9.4. Пусть L – такой ручной узел, что найдется функция $H \in \mathcal{R}(L)$, ортогональная $2k+1$ функциям $1, \cos q, \sin q, \dots, \cos kq, \sin kq$. Тогда для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ на L найдется по меньшей мере $2k+2$ λ -точки Штурма, в которых значения целочисленного масловского потенциала совпадают. Если $\lambda = (k+1)^2$, то на L найдется по меньшей мере $2k+4$ λ -точки Штурма, в которых значения целочисленного масловского потенциала совпадают.

ТЕОРЕМА 9.5. Пусть L – такой ручной узел, что найдется функция $H \in \mathcal{R}(L)$, ортогональная $2k$ функциям $\cos q, \sin q, \dots, \cos kq, \sin kq$. Тогда для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ справедливы неравенства $\#(N_\lambda^A(L)) \geq 2k+2$, $\#(N_{(k+1)^2}^A(L)) \geq 2k+4$.

Доказательства этих теорем практически дословно повторяют доказательства теорем 7.3 и 7.4. Единственное отличие состоит в том, что при доказательстве утверждения теоремы 9.4 для необщих узлов вместо утверждения 7.1 используется следующее свойство непрерывности: для любого $L \in \mathcal{L}_0$ и любой функции $H \in \mathcal{R}(L)$ верно, что если узел L' достаточно C^∞ -близок к L , то $\mathcal{R}(L')$ содержит функцию, достаточно C^0 -близкую к H .

9.7. Двойственные проективные пространства и лежандровы проекции.

Мы переходим к обсуждению некоторых вопросов В.И. Арнольда о фронтах на проективной плоскости.

Для любого многообразия N контактное многообразие ST^*N является естественным двулистным накрытием над контактным многообразием PT^*N некоориентированных контактных элементов в N . Естественная проекция $\rho^\times: PT^*N \rightarrow N$ является лежандровой. Пусть $N = \mathbb{R}P^n$. Рассмотрим проективное пространство $(\mathbb{R}P^n)^\vee$, двойственное к пространству $\mathbb{R}P^n$, – многообразие гиперплоскостей $((n-1)$ -мерных проективных подпространств) пространства $\mathbb{R}P^n$. Помимо проекции $\rho^\times: PT^*\mathbb{R}P^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$, определена естественная проекция $\rho^\vee: PT^*\mathbb{R}P^n \rightarrow (\mathbb{R}P^n)^\vee$. Проекция $\rho^\vee$ переводит контактный элемент в единственную гиперплоскость, которой он касается.

9.8. Клювы и перегибы фронтов на проективной плоскости. Ограничимся рассмотрением случая $n=2$. Легко проверить, что если x – точка общего лежандрова зацепления $L \subset PT^*\mathbb{R}P^2$, то фронт $\rho^\times(L)$ имеет клюв в точке $\rho^\times(x)$ тогда и только тогда, когда фронт $\rho^\vee(L)$ имеет перегиб в точке $\rho^\vee(x)$. И наоборот – фронт $\rho^\times(L)$ имеет перегиб в точке $\rho^\times(x)$ тогда и только тогда, когда фронт $\rho^\vee(L)$ имеет клюв в точке $\rho^\vee(x)$.

9.9. Некоориентированные фронты на плоскости. Сформулируем гипотезу, родственную гипотезе Арнольда о трех перегибах из [3]: если $\{L_t\}$ – общий путь в пространстве лежандровых узлов в $PT^*\mathbb{R}P^2$ такой, что L_0 – слой проекции $\rho^\times$, то фронт $\rho^\times(L_1)$ имеет по меньшей мере три клюва (и, следовательно, фронт $\rho^\vee(L_1)$ имеет по меньшей мере три перегиба). Верна ли эта гипотеза – неизвестно. Мы можем

доказать лишь более слабое утверждение, о фронтах лежандровых многообразий в $PT^*\mathbb{R}^2 \subset PT^*\mathbb{RP}^2$.

Рассмотрим связную компоненту $\mathcal{L}_1^\times$ пространства лежандровых узлов в $PT^*\mathbb{R}^2$, содержащую слой естественной проекции $\rho^\times: PT^*\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

ТЕОРЕМА 9.6. *Всякий лежандров узел $L \in \mathcal{L}_1^\times$ касается слоев проекции $\rho^\times$ по крайней мере в трех точках. Для общего узла $L \in \mathcal{L}_1^\times$ фронт $\rho^\times(L)$ имеет по меньшей мере три кюва.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\overline{\mathcal{L}}$ пространство лежандровых зацеплений в $J^1(S^1)$, инвариантных относительно действия контактоморфизма $\Delta: J^1(S^1) \rightarrow J^1(S^1)$, $(p, q, u) \mapsto (-p, q + \pi, -u)$. Прообразы в $ST^*\mathbb{R}^2$ лежандровых зацеплений в $PT^*\mathbb{R}^2$ — это в точности лежандровы зацепления из $\overline{\mathcal{L}}$ (мы используем отождествление $ST^*\mathbb{R}^2$ и $J^1(S^1)$). Обозначим через $\overline{\mathcal{L}}_1$ множество лежандровых узлов из $\mathcal{L}_1$, инвариантных относительно Δ . Поскольку компонента $\mathcal{L}_1$ содержит лежандров узел $V_0 = \{u = p = 0\}$, являющийся поднятием в $J^1(S^1)$ слоя проекции $\rho^\times$ над началом координат, теорема 9.6 вытекает из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 9.7. *На всяком лежандровом узле из $\overline{\mathcal{L}}_1$ найдется по меньшей мере шесть 1-точек Штурма.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $L \in \overline{\mathcal{L}}_1$. Рассмотрим функцию $H_L = \mathcal{H}(L)$, определенную в утверждении 7.1.

ЛЕММА 9.8. *Если $L \in \overline{\mathcal{L}}_1$, то функция H_L нечетная в том смысле, что $H_L(q + \pi) = -H_L(q)$ для любого $q \in S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.*

Теорема 9.7 следует из леммы 9.8 и теоремы 7.3. Действительно, из леммы 9.8 вытекает, что функция H_L ортогональна функциям $1, \cos 2q, \sin 2q$. Пусть $\eta(q) = a_1 \sin q + a_2 \cos q$. Лежандров узел $L_\eta = \Psi_\eta(L)$ принадлежит пространству $\mathcal{L}_1$. Согласно лемме 8.11, $H_{L_\eta} = H_L + \eta$ и можно выбрать числа a_1, a_2 так, что функция H_{L_η} будет ортогональна функциям $1, \cos q, \sin q, \cos 2q, \sin 2q$. Согласно теореме 7.3, узел L_η содержит по меньшей мере шесть 1-точек Штурма. Поскольку контактоморфизм Ψ_η взаимно однозначно отображает 1-точки Штурма узла L в 1-точки Штурма узла L_η , узел L также содержит по меньшей мере шесть 1-точек Штурма.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 9.8. Утверждение леммы достаточно доказать для общих узлов, на необщие узлы оно распространяется по непрерывности с помощью утверждения 7.1. Пусть L — общий лежандров узел, инвариантный относительно инволюции Δ . Возьмем такое $c > 0$, что фронт $\sigma(V_c)$ лежит выше фронта $\sigma(L)$, а фронт $\sigma(V_{-c})$ лежит ниже фронта $\sigma(L)$. Положим $L_+ = L \cup V_c$, $L_- = L \cup V_{-c}$. Обозначим через $B(L_\pm)$ множество положительных псевдоинволюций фронта $\sigma(L_\pm)$. Взаимно однозначное отображение $T: B(L_+) \rightarrow B(L_-)$ определим следующим условием: $T(P)(x) = P(x)$, если $x \notin \sigma(V_c)$ и $P(x) \notin \sigma(V_c)$. Пусть $\Delta': J^0(S^1) \rightarrow J^0(S^1)$, $(q, u) \mapsto (q + \pi, -u)$. Зададим взаимно однозначное отображение $T_\Delta: B(L_+) \rightarrow B(L_-)$ формулой $T_\Delta(P)(x) = \Delta'P\Delta'(x)$. Согласно утверждению 2.6, множество $B(L_+)$ содержит ровно одну псевдоинволюцию, обозначим ее P . Утверждение леммы сводится к тому,

что сечение $P(\sigma(V_c)) \subset \sigma(L)$ инвариантно относительно действия инволюции Δ' . Эта инвариантность вытекает из равенства

$$\Delta'(P(\sigma(V_c))) = (T^{-1}T_{\Delta}(P))(\sigma(V_c)) = P(\sigma(V_c)).$$

Доказательство леммы 9.8 и теоремы 9.7 закончено. $\square$

9.10. Неустранимость клювов. Если L – лежандров узел в $ST^*\mathbb{R}^2$ с $m(L) = 0$, то его можно продеформировать в классе лежандровых иммерсий в лежандров узел, ρ -фронт которого является гладкой иммерсированной кривой. Если запретить самопересечения, то это, вообще говоря, неверно: для любого k найдется такая компонента $\mathcal{L}^k$ пространства лежандровых узлов, что индекс Маслова любого лежандрова узла из $\mathcal{L}^k$ равен нулю и ρ -фронт всякого общего лежандрова узла из $\mathcal{L}^k$ имеет по меньшей мере $2k$ клювов [14], [15]. Это утверждение несложно также доказать, используя методы настоящей работы.

§ 10. Критические точки лежандровых зацеплений

Критической точкой лежандрова подмногообразия $L \subset J^1(M)$ называется такая точка $(p, q, u) \in L$, что $p = 0$. Это определение обобщает определение критической точки функции на M . Пусть $M = S^n$. Точка $z \in L$ является критической тогда и только тогда, когда (при отождествлении $J^1(S^n)$ и $ST^*\mathbb{R}^{n+1}$) вектор $\rho(z) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ортогонален гиперплоскости, касательной к фронту $\rho(L)$ в точке $\rho(z)$. Таким образом, критическим точкам L соответствуют нормали к фронту $\rho(L)$, проходящие через начало координат.

10.1. Положительные зацепления и их критические точки. Пусть $M = S^1$. Назовем σ -общее лежандрово зацепление $L \subset J^1(S^1)$ *положительным*, если фронт зацепления $L^+ = L \cup V_c$ (такого, что $\sigma(V_c)$ лежит выше $\sigma(L)$) допускает положительную псевдоинволюцию. Компонента $\mathcal{L}_0$ пространства лежандровых зацеплений называется *положительной*, если какое-нибудь (и тогда любое по теореме 2.5) σ -общее лежандрово зацепление из $\mathcal{L}_0^+$ положительно. Назовем лежандрово зацепление *положительным*, если оно принадлежит положительной компоненте. Определим для положительного лежандрова зацепления L множество $\mathcal{R}'(L)$ непрерывных функций на S^1 так же, как в п. 9.6 определялось множество $\mathcal{R}(L)$ для древесного узла L ; единственное отличие состоит в том, что в определении участвуют все (а не только ручные) положительные псевдоинволюции фронта $\sigma(L \cup V_c)$. Множество $\mathcal{R}'(L)$ непусто и конечно. Следующая теорема является обобщением теоремы 7.5.

ТЕОРЕМА 10.1. *Пусть L – такое положительное лежандрово зацепление, что найдется функция $H \in \mathcal{R}'(L)$, ортогональная $2k$ функциям $\cos q, \sin q, \dots, \cos kq, \sin kq$. Тогда на L найдется по меньшей мере $2k + 2$ критические точки.*

В частности, любое положительное лежандрово зацепление имеет по меньшей мере две критические точки. Отметим, что можно привести пример положительного зацепления, состоящего из двух связных компонент, для каждой из которых найдется не содержащий критических точек лежандров узел, лежащий в той же компоненте пространства лежандровых узлов, что и она.

Критическая точка z лежандрова зацепления $L \subset J^1(S^1)$ называется *невырожденной*, если $\sigma(z)$ является неособой точкой фронта $\sigma(L)$ и ограничение координаты p на L имеет невырожденный нуль в точке z . Назовем лежандрово зацепление $L \subset J^1(S^1)$ (и его фронт $\sigma(L)$) *C-общим*, если зацепление L является σ -общим и все его критические точки невырождены. В доказательстве теоремы 10.1 ключевую роль играет следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 10.2. Пусть L – C-общее положительное лежандрово зацепление, $H \in \mathcal{R}'(L)$. Тогда число критических точек зацепления L не меньше числа локальных экстремумов функции H .

Прежде чем перейти к доказательству утверждения 10.2 и теоремы 10.1, дадим необходимые определения и докажем некоторые вспомогательные утверждения.

10.2. Внешние и внутренние критические точки. Назовем невырожденную критическую точку $z \in L$ *точкой максимума (минимума)*, если ограничение координаты u на L имеет в точке z локальный максимум (минимум). Пусть P – псевдоинволюция C-общего фронта $\sigma(L)$. Назовем критическую точку z *P-внешней*, если либо z – точка максимума и точка $P(\sigma(z))$ лежит ниже точки $\sigma(z)$, либо z – точка минимума и точка $P(\sigma(z))$ лежит выше точки $\sigma(z)$. Назовем критическую точку *P-внутренней*, если она не является P-внешней точкой. Обозначим через B_L число критических точек зацепления L , через $B_{L,P}^E$ (соответственно $B_{L,P}^I$) число P-внешних (соответственно P-внутренних) критических точек зацепления L .

10.3. Сглаживание. Пусть X – подмножество множества точек самопересечения C-общего фронта $\sigma(L)$ лежандрова зацепления L . Назовем *сглаживанием* зацепления L относительно множества X (неоднозначно определенное) лежандрово зацепление L' , фронт которого получается следующей конструкцией. Зафиксируем для каждой точки $x \in X$ ее малую окрестность $U_x \subset J^0(S^1)$. Фронт $\sigma(L')$ лежандрова зацепления L' совпадает с $\sigma(L)$ вне объединения U окрестностей U_x . Пересечение фронта $\sigma(L')$ с каждой из окрестностей U_x состоит из двух гладких непересекающихся ветвей. Выберем эти гладкие ветви так, что либо на каждом из их прообразов в L' найдется по одной критической точке (если p -координаты прообразов в L точки x имеют разные знаки), либо на их прообразах в L' нет критических точек (если p -координаты прообразов в L точки x имеют один знак). Если P – положительная псевдоинволюция фронта $\sigma(L)$ и $X \subset \text{Sw}(P)$, то существует ровно одна такая положительная псевдоинволюция P' фронта $\sigma(L')$, что для любой неособой точки y фронта $\sigma(L')$, удовлетворяющей условиям $y \notin U$, $P(y) \notin U$, выполнено $P'(y) = P(y)$. Назовем псевдоинволюцию P' *сглаживанием псевдоинволюции* P относительно множества X .

ЛЕММА 10.3. Пусть P – положительная псевдоинволюция σ -общего фронта $\sigma(L)$, $X \subset \text{Sw}(P)$. Тогда

$$B_{L',P'}^E - B_{L',P'}^I \geq B_{L,P}^E - B_{L,P}^I,$$

где L', P' получаются из L, P сглаживанием относительно множества X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество критических точек лежандрова зацепления L' , не принадлежащих прообразу никакой из окрестностей $U_x \subset J^0(S^1)$, где $x \in X$, совпадает с множеством критических точек L' . При этом P -внутренние критические точки являются P' -внутренними, P -внешние – P' -внешними. Прообраз в L' всякой окрестности U_x либо не содержит критических точек лежандрова зацепления L' , либо содержит ровно две критические точки. В последнем случае из положительности псевдоинволюции P следует, что либо они обе P' -внешние, либо одна P' -внешняя, а другая P' -внутренняя. $\square$

ЛЕММА 10.4. Пусть $L_0 \subset J^1(S^1)$ – C -общее лежандрово зацепление, P_0 – положительная псевдоинволюция фронта $\sigma(L_0)$. Тогда число P_0 -внутренних критических точек не меньше числа P_0 -внешних критических точек.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что множество $\text{Sw}(P_0)$ пусто. Тогда число P_0 -внутренних критических точек равно числу P_0 -внешних критических точек. Это следует из того, что на каждой из связных компонент зацепления L_0 P_0 -внутренние и P_0 -внешние критические точки чередуются.

Предположим теперь, что множество $\text{Sw}(P_0)$ непусто. Рассмотрим сглаживание L'_0 лежандрова зацепления L_0 относительно $\text{Sw}(P_0)$. Обозначим через P'_0 положительную псевдоинволюцию фронта $\sigma(L'_0)$, получающуюся при сглаживании из P'_0 . Тогда $\text{Sw}(P'_0)$ пусто и $0 = B_{L'_0, P'_0}^E - B_{L'_0, P'_0}^I \geq B_{L_0, P_0}^E - B_{L_0, P_0}^I$ по лемме 10.3. $\square$

10.4. Доказательство утверждения 10.2. Обозначим через X подмножество графика $\Gamma \subset J^0(S^1)$ функции H , состоящее из точек излома графика. Рассмотрим сглаживание L' лежандрова зацепления L относительно X . Пусть P – такая положительная псевдоинволюция фронта $\sigma(L \cup V_c)$ (где $\sigma(V_c)$ лежит выше $\sigma(L)$), что $\Gamma = \sigma(V_c)$. Тогда $X \subset \text{Sw}(P)$. Обозначим через P' сглаживание псевдоинволюции P относительно X . Рассмотрим лежандрово зацепление L'' , фронт которого есть $\sigma(L') \setminus P'(V_c)$. Ограничивая псевдоинволюцию P' , получаем положительную псевдоинволюцию фронта $\sigma(L'')$, обозначим ее P'' .

Обозначим через W множество критических точек L'' , являющихся критическими точками L , через B_H – число критических точек L , проектирующихся в график Γ , через b – число точек, в которых функция H негладкая и имеет локальный экстремум. Мы должны доказать, что $B_L \geq B_H + b$. Из каждого негладкого локального экстремума функции H при сглаживании появляется одна критическая точка зацепления L'' ; все критические точки L'' , не принадлежащие W , возникают таким образом. Из положительности псевдоинволюции P вытекает, что все критические точки L'' , не принадлежащие W , являются P'' -внешними. Поэтому $\#(W) \geq B_{L'', P''}^I$ и $B_{L'', P''}^E \geq b$. Из этих неравенств и неравенства $B_{L'', P''}^I \geq B_{L'', P''}^E$, доставляемого леммой 10.4, вытекает $\#(W) \geq b$. Поскольку $B_L = B_H + \#(W)$, получаем $B_L \geq B_H + b$. $\square$

10.5. Замечание об индексах Маслова критических точек. Пусть L – C -общий ручной лежандров узел, P – ручная псевдоинволюция фронта $\sigma(L \cup V_c)$, μ_P – определяемый псевдоинволюцией P масловский потенциал на L (см. лемму 9.1), $H \in \mathcal{R}(L)$ – непрерывная функция на S^1 , график которой есть $P(\sigma(V_c))$. Обозначим через $\nu_i(L)$ число критических точек зацепления L , значение масловского потенциала μ_P в которых равно i . Можно показать, что справедливо следующее усиление утверж-

ления 10.2: если функция H имеет $2k$ локальных экстремумов, то $\nu_{-1}(L) + \nu_0(L) \geq k$, $\nu_1(L) + \nu_0(L) \geq k$, $\nu_{-1}(L) + \nu_0(L) + \nu_1(L) \geq 2k$.

10.6. Доказательство теоремы 10.1. Рассуждая как в доказательстве теоремы 7.3, можно показать (мы опускаем подробности), что утверждение достаточно проверить для $\mathcal{C}$ -общего зацепления L . Функция $\frac{d}{dq}H$ – гладкая функция на $S^1 \setminus Y$, где $Y \subset S^1$ – конечное множество. В каждой из точек множества Y производная H' функции H имеет ненулевые левые и правые пределы. Функция H' L^2 -ортогональна тригонометрическим многочленам степени не выше k . Функция H' меняет знак не меньше $2k + 2$ раз (перемены знака в точках множества Y также учитываются). Это следует из теоремы Гурвица (применимо доказательство леммы 8.1). То есть функция H имеет по меньшей мере $2k + 2$ локальных экстремума. Теорема теперь следует из утверждения 10.2. $\square$

§ 11. Инварианты лежандровых зацеплений

11.1. Классические инварианты. Теория псевдоинволюций позволяет определить инварианты лежандровых зацеплений в $J^1(M)$ (инварианты – это локально постоянные функции на пространстве лежандровых зацеплений $\mathcal{L}$). Для простоты ограничимся описанием инвариантов лежандровых узлов в $J^1(\mathbb{R})$. Напомним определение классических инвариантов (неориентированного) лежандрова узла. Это, во-первых, гладкий тип узла, во-вторых, число Маслова $m(L)$, определенное в § 2, и, в-третьих, число Терстона–Беннеке $\beta(L)$. Число Терстона–Беннеке определяется следующим образом. Зафиксируем ориентацию на L (результат не будет зависеть от ее выбора). Коэффициент зацепления узла L и узла L' , полученного из L небольшим сдвигом вдоль координаты u , называется числом Терстона–Беннеке $\beta(L)$. Для общего лежандрова узла число $\beta(L)$ получается подсчетом числа правых клювов и самопересечений со знаками:

$$\beta(L) = \#(\nearrow) + \#(\searrow) - \#(\nwarrow) - \#(\swarrow) - \#(\succ).$$

Число Маслова и число Терстона–Беннеке – единственные инварианты конечного порядка (в смысле Васильева), не сводящиеся к инвариантам конечного порядка гладких узлов [17].

11.2. Псевдоинволюции и инварианты. Обозначим через μ_L единственный (с точностью до константы) масловский потенциал на лежандровом узле $L \in J^1(\mathbb{R})$, принимающий значения в $\mathbb{Z}/m(L)\mathbb{Z}$. Для σ -общего лежандрова узла L обозначим через $\text{PI}(L)$ число масловских относительно μ_L положительных псевдоинволюций фронта $\sigma(L)$, через $\text{PI}'(L)$ число всех положительных псевдоинволюций фронта $\sigma(L)$. Согласно утверждению 2.6, каждая из функций PI , PI' принимает одно и то же значение на всех σ -общих лежандровых узлах из одной связной компоненты пространства лежандровых узлов. Поэтому, распространяя функции PI и PI' на необщие узлы, получаем инварианты лежандровых узлов.

11.3. Пример. Рассмотрим лежандровы узлы L и L' , фронты которых $\Sigma = \sigma(L)$ и $\Sigma' = \sigma(L')$ изображены на рис. 14. Их классические инварианты совпадают: $m(L) = m(L') = 0$, $\beta(L) = \beta(L') = 1$, оба узла имеют гладкий тип 5_2 . Покажем, что они

различаются инвариантом PI . Следовательно, содержащие их компоненты пространства $\mathcal{L}$ различны. То, что эти компоненты не совпадают, было ранее показано другим способом в [11] и независимо Я. М. Элиашбергом (не опубликовано).

Фронт Σ допускает ровно две положительные псевдоинволюции. Эти псевдоинволюции P_0, P_1 задаются условиями $Sw(P_0) = \{x_1, x_2, x_5, x_6\}$ и $Sw(P_1) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$. Фронт Σ' также допускает ровно две положительные псевдоинволюции. Эти псевдоинволюции P'_0, P'_1 задаются условиями $Sw(P'_0) = \{y_1, y_4, y_5\}$ и $Sw(P'_1) = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$. Таким образом, $PI'(L) = PI'(L') = 2$. Все точки самопересечения фронта Σ масловские, а из точек самопересечения фронта Σ' масловскими (относительно целочисленного масловского потенциала) являются лишь y_1, y_4, y_5 . Поэтому псевдоинволюции P_0, P_1, P'_0 масловские, а P'_1 нет. Значит, $PI(L) = 2, PI(L') = 1$.

Рис. 14

Заметим, что примеры, в которых инвариант PI' различал бы лежандровы узлы с совпадающими классическими инвариантами, неизвестны.

11.4. Уточнение инвариантов. В действительности, теория псевдоинволюций позволяет определить и более тонкие инварианты, родственные инвариантам PI, PI' . Пусть m и k – неотрицательные целые числа. Для общего лежандрова узла L определим число $PI_{m,k}(L)$ следующим образом. Если m – делитель числа $m(L)$, то $PI_{m,k}(L)$ есть число таких положительных псевдоинволюций P фронта $\sigma(L)$, масловских относительно масловского потенциала $\mu_L \otimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ (принимającego значение в $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$), что $\chi(P) = 1 - k$. В случае, когда $m = 1$, это определение говорит, что $PI_{1,k}(L)$ есть число таких положительных псевдоинволюций P фронта $\sigma(L)$, что $\chi(P) = 1 - k$. Наконец, полагаем $PI_{m,k}(L) = 0$, если m не делит $m(L)$.

Согласно утверждению 2.6, каждая из функций $PI_{m,k}$ является инвариантом лежандровых узлов. Определим многочлены Пуанкаре PI_m^L следующим образом:

$$PI_m^L(t) = \sum_k PI_{m,k}(L)t^k.$$

Заметим, что

$$PI(L) = PI_{m(L)}^L(1), \quad PI'(L) = PI_1^L(1).$$

Если $L \in J^1(\mathbb{R})$ – σ -общий лежандров узел, то всякая σ -общая петля в $\mathcal{L}$ с началом в L определяет в силу утверждения 2.6 взаимно однозначное отображение множества

положительных псевдоинволюций фронта $\sigma(L)$ в себя. Эти отображения образуют группу монодромии положительных псевдоинволюций фронта $\sigma(L)$. В §4 было показано, что эта группа может быть нетривиальна. Пользуясь действием группы монодромии, можно определить дополнительные инварианты лежандровых узлов (например, вычисляя число орбит действия). Отметим, что множество положительных псевдоинволюций, подсчитанных числом $\text{PI}_{m,k}(L)$, инвариантно относительно действия группы монодромии.

11.5. Эйлерова характеристика и число Терстона–Беннекеана.

ЛЕММА 11.1. Пусть P – положительная псевдоинволюция фронта $\sigma(L)$ σ -общего лежандрова узла $L \in J^1(\mathbb{R})$. Тогда $\chi(P) \equiv \beta(L) \pmod{2}$.

Таким образом, $\text{PI}_{m,k}(L) = 0$, если число $k + \beta(L)$ четно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 11.1. Число Терстона–Беннекеана $\beta(L)$ сравнимо по модулю 2 с суммой числа правых клювов и числа точек самопересечений фронта $\Sigma = \sigma(L)$. Эйлерова характеристика $\chi(P)$ равна разности числа правых клювов и числа переключающих точек псевдоинволюции P . Поэтому достаточно показать, что число неперекрывающихся точек псевдоинволюции P четно. Обозначим через D разбиение фронта Σ , определяемое псевдоинволюцией P . Компоненты пространства разрешения $R(D)$ (см. п. 6.1) гомеоморфны окружностям. Пусть S, S' – две различные компоненты. Рассмотрим их образы $\psi_D(S), \psi_D(S')$ под действием проекции $\psi_D: R(D) \rightarrow \Sigma$. Докажем, что число точек пересечения $\psi_D(S)$ и $\psi_D(S')$, являющихся неперекрывающимися для P , четно. Это следует из того, что индекс пересечения по модулю 2 циклов $\psi_D(S)$ и $\psi_D(S')$ равен нулю, каждая неперекрывающаяся точка из $\psi_D(S) \cap \psi_D(S')$ дает вклад 1 в индекс пересечения, а каждая переключающая точка из $\psi_D(S) \cap \psi_D(S')$ дает вклад 0. Поскольку всякая неперекрывающаяся точка самопересечения фронта Σ принадлежит образам ровно двух компонент пространства $R(D)$, общее число неперекрывающихся точек четно, и утверждение леммы доказано. $\square$

11.6. Связная сумма и инварианты $\text{PI}_{m,k}$. Пусть ориентированные лежандровы узлы L_1, L_2 в $J^1(\mathbb{R})$ таковы, что их фронты $\Sigma_1 = \sigma(L_1), \Sigma_2 = \sigma(L_2)$ выглядят как показано на рис. 15. Связной суммой узлов L_1 и L_2 называется узел L , фронт которого изображен на рис. 15 справа. Можно показать, что операция связной суммы задает однозначную операцию над связными компонентами пространства ориентированных лежандровых узлов, т.е. в соответствующих компонентах можно выбрать узлы требуемого вида и связная компонента, в которой лежит получающийся узел, не зависит от этого выбора.

Рис. 15

УТВЕРЖДЕНИЕ 11.2. Пусть лежандров узел L есть связная сумма лежандровых узлов $L_1, L_2 \in J^1(\mathbb{R})$. Тогда $\text{PI}_1^L(t) = \text{PI}_1^{L_1}(t) \cdot \text{PI}_1^{L_2}(t)$, $\text{PI}_2^L(t) = \text{PI}_2^{L_1}(t) \cdot \text{PI}_2^{L_2}(t)$ и если $m(L_1) = m(L_2) = 0$ (и тогда $m(L) = 0$), то $\text{PI}_0^L(t) = \text{PI}_0^{L_1}(t) \cdot \text{PI}_0^{L_2}(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если P_1 – положительная псевдоинволюция фронта $\sigma(L_1)$, P_2 – положительная псевдоинволюция фронта $\sigma(L_2)$, то существует ровно одна положительная псевдоинволюция P фронта $\sigma(L)$ с $\text{Sw}(P) = \text{Sw}(P_1) \cup \text{Sw}(P_2)$. Более того, всякая положительная псевдоинволюция фронта $\sigma(L)$ получается такой конструкцией. Отсюда следует, что $\text{PI}_1^L(t) = \text{PI}_1^{L_1}(t) \cdot \text{PI}_1^{L_2}(t)$. Пусть x – точка самопересечения фронта $\sigma(L)$. Тогда ее прообразы в L можно соединить в L путем, который целиком лежит в L_1 или в L_2 . Значит, при $m(L_1) = m(L_2) = 0$ точка x масловская для L тогда и только тогда, когда x масловская для $L_1 \cup L_2$. Утверждение о масловости точки x для масловских потенциалов со значениями в $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ справедливо всегда, так как числа Маслова лежандровых узлов четны. Это завершает доказательство. $\square$

11.7. Уточнение теоремы о продолжении для лежандровых зацеплений.

В более сложных случаях (когда зацепление состоит из нескольких компонент или база M есть окружность) для построения дополнительных инвариантов может быть использована следующая конструкция фактора по псевдоинволюции.

Пусть P – псевдоинволюция σ -общего фронта $\Sigma \subset J^0(M)$, где $M = I$, $M = \mathbb{R}$ или $M = S^1$. На пространстве разрешения $R(D_P)$ определена естественная непрерывная инволюция i_P , которая переставляет прообразы точек x и $P(x)$ при $\{x, P(x)\} \subset \Sigma \setminus X_\Sigma$. Рассмотрим факторпространство $R(D_P)/i_P$; для $y \in R(D_P)$ обозначим через y/i_P образ y в $R(D_P)/i_P$. “Факторпространство” Σ/P получается из $R(P)/i_P$ склеиванием для каждой переключающей точки $x \in \text{Sw}(P)$ двух таких точек y/i_P и y'/i_P , что $\psi_{D_P}(y) = \psi_{D_P}(y') = x$. Проекция $\Sigma \rightarrow M$ определяет естественное непрерывное отображение $\text{H}_P: \Sigma/P \rightarrow M$. Пространство Σ/P есть одномерный клеточный комплекс с вершинами двух типов: одновалентные вершины получаются из клювов фронта Σ (и краевых точек при $M = I$), четырехвалентные – из переключающих точек псевдоинволюции P .

Пусть P_i – псевдоинволюция σ -общего фронта Σ_i , $i \in \{1, 2\}$. Назовем псевдоинволюции P_1 и P_2 *гомотопически подобными*, если существует такая гомотопическая эквивалентность $h: \Sigma_1/P_1 \rightarrow \Sigma_2/P_2$, что отображения $\text{H}_{P_2} \circ h$ и H_{P_1} гомотопически эквивалентны.

Пользуясь явным продолжением псевдоинволюции, описанным в доказательстве теоремы 2.5, можно показать, что верно следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 11.3. В условиях теоремы 2.5 отображение $P_a \mapsto P_b$ переводит псевдоинволюцию в гомотопически подобную ей.

Для связных лежандровых зацеплений в $J^1(I)$ или $J^1(\mathbb{R})$ гомотопическое подобие псевдоинволюций эквивалентно совпадению их эйлеровых характеристик. В этой ситуации утверждение 11.3 не дает новой информации. А в других случаях, пользуясь этим утверждением, несложно построить дополнительные инварианты лежандровых зацеплений.

§ 12. Производящие семейства и псевдоинволюции

В этом параграфе обсуждается связь теории производящих семейств лежандровых многообразий и теории псевдоинволюций.

12.1. Производящие семейства. Напомним вкратце конструкцию производящего семейства лежандрова многообразия (подробности см. в [5]). Пусть M и W – гладкие многообразия, $F: M \times W \rightarrow \mathbb{R}$ – гладкая функция. Для каждой точки $q \in M$ рассмотрим множество $B_q \subset \{q\} \times W$, которое состоит из критических точек ограничения функции F на $\{q\} \times W$. Обозначим $B_F = \bigcup_{q \in M} B_q \subset M \times W$. Предположим, что ранг матрицы из вторых производных (F_{wq}, F_{ww}) максимален (равен размерности многообразия M) в каждой точке множества B_F ; для функции F общего положения это условие выполнено. Тогда множество $B_F \subset M \times W$ является гладким подмногообразием той же размерности, что и M , ограничение на B_F отображения $(q, w) \xrightarrow{l_F} (q, d_M(F(q, w)), F(q, w))$ (d_M – первый дифференциал вдоль M) задает лежандрову иммерсию многообразия B_F в $J^1(M)$. В этом случае функция F называется *производящим семейством* (иммерсированного) лежандрова многообразия $L_F = l_F(B_F)$.

Мы опишем некоторый специальный класс $\mathcal{G}$ производящих семейств и покажем, что всякая общая функция $F \in \mathcal{G}$ определяет некоторую комбинаторную структуру на фронте $\sigma(L_F)$. Эта структура в случае $\dim M = 1$ эквивалентна заданию положительной масловской псевдоинволюции на фронте.

Будем предполагать для простоты, что многообразие M замкнуто. Пусть многообразие W имеет вид $W = W_0 \times \mathbb{R}^N$, где W_0 замкнуто, $N \geq 1$. Класс функций $\mathcal{G}$ состоит из производящих семейств, представимых в виде суммы ненулевой линейной функции на $\mathbb{R}^N$ и функции на W с компактным носителем. Назовем такие семейства *линейными на бесконечности*. Также будем называть *линейными на бесконечности* функции на $W = W_0 \times \mathbb{R}^N$, представимые в виде суммы ненулевой линейной функции на $\mathbb{R}^N$ и функции с компактным носителем.

Пусть $F \in \mathcal{G}$, точка $q_0 \in M$ такова, что $F(q_0, \cdot): W \rightarrow \mathbb{R}$ – строго морсовская функция, т.е. такая морсовская функция, что все ее критические значения различны. Это условие выполнено для точки общего положения. Рассмотрим фронт $\Sigma_F = \sigma(L_F)$ лежандрова многообразия L_F – образ L_F под действием проекции $\sigma: J^1(M) \rightarrow J^0(M)$, $(p, q, u) \mapsto (q, u)$. Он состоит из таких точек (q_0, u_0) , что u_0 – критическое значение функции $F(q_0, \cdot): W \rightarrow \mathbb{R}$.

12.2. Комплексы Морса. Любая строго морсовская линейная на бесконечности функция f на $W = W_0 \times \mathbb{R}^N$ определяет разбиение множества своих критических значений на пары (это разбиение зависит также, как от параметра, от выбора поля коэффициентов, участвующего в конструкции). Построение этого разбиения на пары использует комплекс Морса, к описанию которого мы сейчас переходим. Зафиксируем на $W = W_0 \times \mathbb{R}^N$ метрику g_0 , являющуюся произведением евклидовой метрики на $\mathbb{R}^N$ и некоторой метрики на W_0 . Пусть g – метрика на W , представимая в виде $g = g_0 + h$, где h – тензорная 2-форма с компактным носителем на W . Обозначим через $\mathcal{M}_g(x', x'')$ множество траекторий $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$ антиградиентного векторного поля $-\nabla_g f$, стремящихся к x' при $t \rightarrow -\infty$ и к x'' при $t \rightarrow +\infty$. Обозначим $\widehat{\mathcal{M}}_g(x', x'') = \mathcal{M}_g(x', x'')/\mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ действует сдвигом параметра.

Предположим, что метрика g такова, что траектории множества $\widehat{\mathcal{M}}_g(x', x'')$, где $\text{ind}(x') = \text{ind}(x'') + 1$ (ind – это индекс Морса критической точки), устойчивы относительно малых возмущений метрики g . Это условие выполнено для метрик общего положения. Пусть $x_1, \dots, x_K$ – критические точки функции f , занумерованные в порядке возрастания критических значений. Рассмотрим свободный градуированный $\mathbb{Z}$ -модуль $C_f = \mathbb{Z} \otimes \{x_1, \dots, x_K\}$, порожденный образующими x_i , степень образующей равна ее индексу Морса. Определим оператор $\partial_g: C_f \rightarrow C_f$, задавая его действие на образующих формулой

$$\partial_g(x_k) = \sum_{\text{ind}(x_j) = \text{ind}(x_k) - 1} \#(\widehat{\mathcal{M}}_g(x_k, x_j)) x_j,$$

где траектории множества $\widehat{\mathcal{M}}_g(x_k, x_j)$ считаются с учетом должным образом определенных знаков (строго говоря, для однозначного определения этих знаков надо фиксировать некоторые ориентации; произвол в этом месте приводит к преобразованию ∂_g при помощи автоморфизма $\mathbb{Z}$ -модуля C_f , меняющего знаки некоторых образующих). Отметим, что $\partial_g(x_j)$ есть линейная комбинация образующих $x_1, \dots, x_{j-1}$.

Хорошо известно (см., например, [22]), что $\partial_g^2 = 0$. Гомологии $\ker \partial_g / \text{im } \partial_g$ нулевые, так как они совпадают с целочисленными гомологиями пары $(\{f \leq c\}, \{f \leq -c\})$ топологических пространств, где c – достаточно большое положительное число.

Рассмотрим группу $\text{Aut}_T(C_f)$ верхнетреугольных автоморфизмов $\mathbb{Z}$ -модуля C_f . Она состоит из градуированных автоморфизмов, которые сохраняют каждый из подмодулей $\mathbb{Z} \otimes \{x_1, \dots, x_j\} \subset C_f$, $j \in \{1, \dots, K\}$. Можно показать, что различные дифференциалы ∂_{g_1} и ∂_{g_2} , соответствующие разным выборам допустимых метрик g_1 и g_2 , связаны соотношением

$$\partial_{g_2} = A \partial_{g_1} A^{-1},$$

где A – некоторый элемент $\text{Aut}_T(C_f)$ (зависящий от g_1 и g_2).

12.3. M -дифференциалы и комбинаторика образующих M -комплекса.

Аксиоматизируя свойства комплекса (дифференциального градуированного модуля) (C_f, ∂_g) , дадим следующее алгебраическое определение. Пусть $\mathbb{E}$ – коммутативное кольцо, C – свободный градуированный $\mathbb{E}$ -модуль с выделенной системой образующих $(x_1, \dots, x_K)$. Назовем M -дифференциалом такое $\mathbb{E}$ -линейное отображение $\partial: C \rightarrow C$ степени -1 , что $\partial^2 = 0$ и $\partial(x_j) \in \mathbb{E} \otimes \{x_1, \dots, x_{j-1}\}$, $j \in \{1, \dots, K\}$; пару (C, ∂) в этом случае назовем M -комплексом. Рассмотрим группу $\text{Aut}_T(C)$ верхнетреугольных автоморфизмов $\mathbb{E}$ -модуля C , состоящую из всех автоморфизмов, переводящих в себя каждый из подмодулей $\mathbb{E} \otimes \{x_1, \dots, x_j\}$, $j \in \{1, \dots, K\}$. Назовем два M -дифференциала $\partial_1, \partial_2: C \rightarrow C$ эквивалентными, если найдется такое $A \in \text{Aut}_T(C)$, что $\partial_2 = A \partial_1 A^{-1}$. Примером M -комплекса является пара $(C_f \otimes \mathbb{E}, \partial_g \otimes \mathbb{E})$; M -дифференциалы $\partial_{g_1} \otimes \mathbb{E}$ и $\partial_{g_2} \otimes \mathbb{E}$, построенные по различным метрикам g_1 и g_2 , эквивалентны.

Назовем M -дифференциал ∂ элементарным, если выполнены следующие два условия: (1) для всякого $j \in \{1, \dots, K\}$ либо $\partial(x_j) = 0$, либо найдется такое $m \in \{1, \dots, K\}$, что $\partial(x_j) = x_m$; (2) если $\partial(x_j) = \partial(x_{j'}) = x_m$, то $j = j'$.

ТЕОРЕМА 12.1 [8], [6]. Пусть (C, ∂) – M -комплекс над полем $\mathbb{E}$. Тогда M -дифференциал ∂ эквивалентен ровно одному из элементарных M -дифференциалов на C .

Элементарный M -дифференциал ∂ задает следующую комбинаторную структуру на множестве образующих: часть их представляет базис в гомологиях комплекса (C, ∂) , а остальные разбиты на пары (x_i, x_j) , где $\partial(x_i) = x_j$. В случае, когда $\mathbb{E}$ – поле, по теореме 12.1 произвольный M -дифференциал определяет такую же структуру на множестве образующих, и эти структуры одинаковы для эквивалентных M -дифференциалов.

Отметим, что утверждение теоремы 12.1 неверно для случая $\mathbb{E} = \mathbb{Z}$ (уже в части существования). Тензорно домножая M -комплекс на различные поля $\mathbb{E}$, мы получаем, вообще говоря, разные комбинаторные структуры на множестве образующих. Можно показать, что если эти структуры совпадают для всех полей $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, то утверждение теоремы верно и для $\mathbb{E} = \mathbb{Z}$.

Пусть f – строго морсовская линейная на бесконечности функция. Зафиксируем поле $\mathbb{E}$ раз и навсегда. По теореме 12.1 критические точки (и, следовательно, критические значения) функции f канонически (т.е. независимо от выбора допустимой метрики g) разбиты на пары, так как гомологии комплекса $(C_f \otimes \mathbb{E}, \partial_g \otimes \mathbb{E})$ равны нулю.

Можно показать, что сформулированное выше дифференциально-алгебраическое определение разбиения на пары эквивалентно следующему топологическому определению. Два критических значения $a > b$ функции f образуют пару, если и только если для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ выполнено условие

$$\begin{aligned} \dim H_*(\{f \leq a + \varepsilon\}, \{f \leq b + \varepsilon\}) &= \dim H_*(\{f \leq a - \varepsilon\}, \{f \leq b - \varepsilon\}) \\ &= \dim H_*(\{f \leq a - \varepsilon\}, \{f \leq b + \varepsilon\}) + 1 \\ &= \dim H_*(\{f \leq a + \varepsilon\}, \{f \leq b - \varepsilon\}) + 1. \end{aligned}$$

12.4. От производящего семейства к псевдоинволюции. Пусть вложенное лежандрово многообразие L_F задается производящим семейством $F \in \mathcal{G}$. Пусть точка $q_0 \in M$ такова, что прямая $\{q = q_0\} \subset J^0(M)$ пересекает фронт $\Sigma_F = \sigma(L_F)$ лишь в его неособых точках. Тогда функция $F(q_0, \cdot)$ строго морсовская. Тем самым на точках множества $\Sigma^{q_0} = \pi^{-1}(q_0) \cap \Sigma_F$ возникает свободная инволюция $i_F^{q_0}$. Из топологического определения разбиения на пары следует, что отображение $i_F^{q_0}$ непрерывно зависит от точки q_0 и, более того, совокупность отображений $i_F^{q_0}$ продолжается до непрерывного отображения $P_F^G: G_{\Sigma_F} \rightarrow \Sigma_F$, где G_{Σ_F} – множество неособых точек фронта Σ_F .

Предположим теперь, что $M = S^1$. Тогда непрерывное отображение P_F^G , определенное разбиением на пары, продолжается до псевдоинволюции P_F фронта Σ_F . Действительно, достаточно проверить, что ветви, входящие в клюв, переставляются отображением P_F^G , а ветви, входящие в точку трансверсального самопересечения, не переставляются. Рассмотрим неособые точки $(q, u_1), (q, u_2)$ фронта Σ_F , близкие к особой точке $(q_0, u_0) \in \Sigma_F$. Пусть $u_1 > u_2$. Из теории Морса вытекает, что число $\dim H_*(\{F(q_1, \cdot) \leq u_1 + \varepsilon\}, \{F(q_1, \cdot) \leq u_2 - \varepsilon\})$ равно нулю, если (q_0, u_0) – клюв, и равно двум, если (q_0, u_0) – точка самопересечения. После этого требуемое утверждение легко выводится из приведенного выше топологического определения пары критических значений и теории Морса.

На L_F естественно возникает масловский потенциал $\mu_F: G_{L_F} \rightarrow \mathbb{Z}$, значение которого в точке $x = (p_0, q_0, u_0) \in G_{L_F}$ равно индексу Морса соответствующей критической точки функции $F(q_0, \cdot)$ с критическим значением u_0 . Псевдоинволюция P_F масловская относительно μ_F . Это следует из того, что если два критических значения $a > b$ функции $F(q_0, \cdot)$ образуют пару, то индекс Морса критической точки с критическим значением a на единицу больше индекса критической точки с критическим значением b . Псевдоинволюция P_F положительна. Этот факт можно проверить, изучив перестройки разбиения критических значений на пары для общих однопараметрических семейств функций на многообразии W (см. [6]). Само определение положительной (и масловской) псевдоинволюции является аксиоматизацией комбинаторных структур, возникающих на фронте лежандрова многообразия, заданного производящим семейством.

Можно также показать, что для всякой положительной псевдоинволюции P фронта $\sigma(L)$ σ -общего зацепления L , масловской относительно некоторого целочисленного масловского потенциала μ , найдется такое производящее семейство $F \in \mathcal{G}$, что $L = L_F$, $P = P_F$ и μ отличается от μ_F на константу (П.Е. Пушкарь, не опубликовано).

12.5. Сравнение семейств псевдоинволюций. Пусть $F: M \times W_0 \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ – производящее семейство лежандрова многообразия в $J^1(M)$. Назовем его стабилизацией производящее семейство

$$\tilde{F}: M \times W_0 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{F}(x, y) = F(x) + Q(y),$$

где $x \in M \times W_0 \times \mathbb{R}^N$, $y \in \mathbb{R}^k$, Q – невырожденная квадратичная форма на $\mathbb{R}^k$. Назовем два производящих семейства из $\tilde{\mathcal{G}}$ эквивалентными, если некоторые их стабилизации, определенные на одном и том же многообразии $M \times W_0 \times \mathbb{R}^N$, переводятся друг в друга расслоенным над M диффеоморфизмом $M \times W_0 \times \mathbb{R}^N$. Несложно проверить, что при $M = S^1$ псевдоинволюции, порождаемые эквивалентными производящими семействами, совпадают.

Пусть $\{L_{t \in [0,1]}\}$ – гладкое семейство лежандровых многообразий в $J^1(M)$ и многообразии L_0 задается производящим семейством $F \in \mathcal{G}$. Тогда, рассуждая как в [10], [13], [21], [9], можно показать, что найдется такое семейство $\{F_{t \in [0,1]}\}$ производящих семейств из $\mathcal{G}$, что $L_{F_t} = L_t$ и F_0 эквивалентно F . Интересно отметить, что для случая $\dim M = 1$ доказательство существования такого семейства неявно содержится уже в [18]. Рассуждая как в [25], [24], можно показать, что если $\{\tilde{F}_t\}$ – другое семейство, удовлетворяющее тем же требованиям, что и $\{F_t\}$, то при любом $t \in [0, 1]$ производящее семейство $\tilde{F}_t$ эквивалентно производящему семейству F_t .

Пусть $M = S^1$ и семейство зацеплений L_t σ -общее. Тогда семейство $\{F_t\}$ порождает непрерывное семейство $\{P_{F_t}\}$ положительных псевдоинволюций фронтов $\sigma(L_t)$. Если $\{\tilde{F}_t\}$ – другое семейство, удовлетворяющее тем же требованиям, что и $\{F_t\}$, то порождаемое им семейство псевдоинволюций совпадает с $\{P_{F_t}\}$. Тем самым теория производящих семейств определяет каноническое продолжение псевдоинволюции P_F . Это наблюдение было отправной точкой для формулировки теоремы 2.5.

Теорема 2.5 определяет продолжение псевдоинволюции $P_0 = P_{F_0}$ до семейства $\{P_{t \in [0,1]}\}$ псевдоинволюций фронтов $\sigma(L_t)$. Сравним семейства псевдоинволюций

$\{P_t\}$ и $\{P_{F_t}\}$. Если у фронта $\sigma(L_0)$ есть ровно одна положительная псевдоинволюция, то по теореме 2.5 семейства $\{P_t\}$ и $\{P_{F_t}\}$ совпадают. Из этого, в частности, вытекает, что для $L \in \mathcal{L}_1$ непрерывное сечение $\Gamma_{\mathcal{H}(L)}$ фронта $\sigma(L)$ совпадает с минимаксным сечением, определенным в [9]. В общем случае семейство $\{P_{F_t}\}$ может, в отличие от $\{P_t\}$, не быть характеристическим.

Ограничиваясь рассмотрением семейства $\{F_t\}$, для которого пересечение пути $\{L_{F_t}\}$ с дискриминантом $\mathcal{D}$ единственно, отметим, что, согласно сказанному в §4, непрерывное нехарактеристическое семейство псевдоинволюций может существовать лишь для перестроек типа III и XX. И для перестройки типа III, и для перестройки типа XX существуют примеры таких семейств $\{F_t\}$, что семейство $\{P_{F_t}\}$ нехарактеристично. (Более того, изучая перестройки комплексов Морса для двупараметрических семейств функций, можно показать, например, что при $E = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ для перестройки III_3 (см. п. 3.13) семейство $\{P_{F_t}\}$ не может быть характеристическим и, следовательно, никогда не совпадает с семейством $\{P_t\}$.) Возможная нехарактеристичность семейства псевдоинволюций $\{P_{F_t}\}$ не позволяет без проведения дополнительных рассуждений заменить теорему 2.5 результатами теории производящих семейств в доказательстве гипотез Арнольда.

Из свойств производящих семейств можно вывести, что для семейства $\{F_t\}$, которое определяет петлю $\{L_t\}$, стягиваемую в $\mathcal{L}$, справедливо равенство $P_{F_1} = P_{F_0}$. В §4 было показано, что для семейства $\{P_t\}$ равенство $P_1 = P_0$, вообще говоря, не выполняется.

Отметим также, что два различных семейства $\{F_t\}$ и $\{\tilde{F}_t\}$, задающие одно и то же семейство лежандровых зацеплений $\{L_t\}$, могут определять разные семейства псевдоинволюций $\{P_{F_t}\}$, $\{P_{\tilde{F}_t}\}$, даже если $P_{F_0} = P_{\tilde{F}_0}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] V. I. Arnol'd. Topological Invariants of Plane Curves and Caustics. Princeton, RI: Amer. Math. Soc., 1994. (Univ. Lecture Ser. V. 5.)
- [2] В. И. Арнольд. Инварианты и перестройки фронтов на плоскости // Труды МИАН. 1995. Т. 209. С. 14–64.
- [3] В. И. Арнольд. Топологические проблемы теории распространения волн // УМН. 1996. Т. 51. № 1. С. 3–50.
- [4] В. И. Арнольд. Что такое математика? М.: МЦНМО, 2002.
- [5] В. И. Арнольд, А. Б. Гивенталь. Симплектическая геометрия // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. проблемы матем. Фундам. направления. Т. 4. М.: ВИНТИ, 1985. С. 5–139.
- [6] S. A. Barannikov. The framed Morse complex and its invariants // Adv. Soviet Math, 1994. V. 21. P. 93–115.
- [7] W. Blaschke. Kreis und Kugel. Berlin: de Gruyter, 1956. (Рус. пер.: В. Бляшке. Круг и шар. М.: Наука, 1967.)
- [8] J. Cerf. Stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelles et le théorème de la pseudo-isotopie // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 1970. V. 39. P. 5–173.
- [9] M. Chaperon. On generating families // The Floer Memorial Volume / ed. H. Hofer et al. Basel: Birkhäuser, 1995. P. 283–296. (Progr. Math. V. 133.)
- [10] Ю. В. Чеканов. Критические точки квазифункций и производящие семейства лежандровых многообразий // Функц. анализ и его прил. 1996. Т. 30. № 2. С. 56–69.
- [11] Yu. V. Chekanov. Differential algebra of Legendrian links // Invent. Math. 2002. V. 150. № 3. P. 441–483.

- [12] Я. М. Элиашберг. Теорема о структуре волновых фронтов и ее применения в симплектической топологии // Функци. анализ и его прил. 1987. Т. 21, № 3. С. 65–72.
- [13] Y. Eliashberg, M. Gromov. Lagrangian intersections theory: finite-dimensional approach // Geometry of Differential Equations. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1998. P. 27–118. (Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. V. 186.)
- [14] M. Entov. On the necessity of Legendrian fold singularities // Internat. Math. Res. Notices. 1998. V. 20. P. 1055–1077.
- [15] E. Ferrand, P. E. Pushkar'. Non-cancellation of cusps on wave fronts // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1998. V. 327. № 9. P. 827–831.
- [16] D. Fuchs. Chekanov–Eliashberg invariant of Legendrian knots: existence of augmentations // J. Geom. Phys. 2003. V. 47. № 1. P. 43–65.
- [17] D. Fuchs, S. Tabachnikov. Invariants of Legendrian and transverse knots in the standard contact space // Topology. 1997. V. 36. № 5. P. 1025–1053.
- [18] A. Hatcher, J. Wagoner. Pseudo-isotopies of compact manifolds // Astérisque. 1973. V. 6. P. 3–274.
- [19] A. Hurwitz. Über die Fourierschen Konstanten integrierbarer Funktionen // Math. Ann. 1903. V. 57. P. 425–446.
- [20] S. Mukhopadhyaya. New methods in the geometry of a plane arc. I: Cyclic and sextactic points // Bull. Calcutta Math. Soc. 1909. V. 1. P. 31–37.
- [21] П. Е. Пушкарь. Обобщение теоремы Чеканова. Диаметры иммерсированных многообразий и волновых фронтов // Труды МИАН. 1998. Т. 221. С. 289–304.
- [22] M. Schwarz. Morse homology. Basel: Birkhäuser, 1993. (Progr. Math. V. 111.)
- [23] В. Д. Седых. Теорема о четырех вершинах выпуклой пространственной кривой // Функци. анализ и его прил. 1992. Т. 26. № 1. С. 35–41.
- [24] D. Théret. A complete proof of Viterbo's uniqueness theorem on generating functions // Topology Appl. 1999. V. 96. № 3. P. 249–266.
- [25] C. Viterbo. Symplectic topology as the geometry of generating functions // Math. Ann. 1992. V. 292. № 4. P. 685–710.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;
Московский центр непрерывного математического образования
E-mail: pushkar@mccme.ru

Поступила в редакцию
20.05.2004