Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Ю. Аристов, Алгебры Фурье некоторых связных групп не являются проективными, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 1, 159–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1392>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 17:51:41

АЛГЕБРЫ ФУРЬЕ НЕКОТОРЫХ СВЯЗНЫХ ГРУПП НЕ ЯВЛЯЮТСЯ ПРОЕКТИВНЫМИ

О. Ю. АРИСТОВ

Всякой локально компактной группе G можно поставить в соответствие ее групповую банахову алгебру $L^1(G)$ и ее алгебру Фурье $A(G)$. Последняя состоит из множества всех коэффициентов регулярного представления, которое снабжено поточечным умножением. Норма в $A(G)$ задана так, что $A(G)^*$ изометрически изоморфно групповой алгебре фон Нойманна $VN(G)$ [1]. Известно, что банахова алгебра $L^1(G)$ всегда проективна [2; гл. IV, теорема 2.17]. Естественно возникает двойственный вопрос: для каких G алгебра $A(G)$ проективна как банахова алгебра и, особенно, как квантованная банахова алгебра? Последнее действительно более важно, поскольку в гомологических вопросах алгебру Фурье естественно рассматривать именно как квантованную банахову алгебру.

Под квантованной банаховой алгеброй мы понимаем банахову алгебру A , которая является также операторным пространством в смысле [3] таким, что $\|\pi: A \hat{\otimes}^o A \rightarrow A: a \otimes b \mapsto ab\|_{cb} < \infty$. Здесь $\hat{\otimes}^o$ обозначает проективное тензорное произведение операторных пространств, а $\|\cdot\|_{cb}$ – вполне ограниченную норму линейного отображения. Далее для удобства предполагаем, что $\|\pi\|_{cb} = 1$. Алгебра A называется *проективной*, если она является относительно проективным левым квантованным банаховым A -модулем (см. подробности в [4], где рассмотрены аналоги определений из [2]). Для наших целей достаточно следующего описания: если $\overline{A^2} = A$, то A проективна тогда и только тогда, когда существует морфизм левых A -модулей ρ такой, что $\pi\rho = 1_A$ и $\|\rho\|_{cb} < \infty$. Будем говорить, что алгебра C_1 -проективна, если $\|\rho\|_{cb} \leq C_1$.

Отметим, что $A(G)$ заведомо проективна как квантованная банахова алгебра в трех случаях: если G компактна (так как $A(G)$ обладает единицей); если G абелева (так как $A(G) \cong L^1(\hat{G})$, где $\hat{G}$ – двойственная группа); если G дискретна (так как $A(G)$ бипроективна [4; теорема 7.30]). Однако в полной общности поставленный вопрос нетривиален, и окончательного ответа на него пока нет. Ниже будет показано, что существуют непроективные алгебры Фурье.

Сеть (e_λ) в коммутативной квантованной банаховой алгебре A называется *мультипликативно вполне ограниченной аппроксимативной единицей* (м.в.о.а.е.) с постоянной C , если $\lim_\lambda a e_\lambda = a$ для всех $a \in A$ и $\|a \mapsto a e_\lambda\|_{cb} \leq C$. Операторное пространство E обладает *вполне ограниченным свойством аппроксимации* (ВОСА) с постоянной C , если существует сеть конечномерных линейных отображений (φ_λ) на E такая, что $\|\varphi_\lambda\|_{cb} \leq C$ и $\lim_\lambda \varphi_\lambda(x) = x$ для всех $x \in E$. Алгебра фон Нойманна M называется *полудискретной*, если существует сходящаяся к тождественному отображению в слабой* операторной топологии сеть (τ^λ) вполне положительных конечномерных слабо* непрерывных линейных отображений на M таких, что $\tau^\lambda(1) = 1$. (Полудискретность равносильна таким важным свойствам, как *аменабельность по Конну*, *инъективность* и *аппроксимативная конечномерность*; см. [9; гл. 6]). Обозначим через M_* предуальное пространство алгебры M .

ЛЕММА 1. Если M полудискретна, то M_* обладает ВОСА с постоянной 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (τ^λ) – сеть, указанная выше. В силу слабой* непрерывности τ^λ корректно определены линейные отображения τ_*^λ на M_* такие, что $\langle \tau_*^\lambda(f), a \rangle = \langle f, \tau^\lambda(a) \rangle$ для всех $f \in M_*$ и $a \in M$. Следовательно, τ_*^λ сходятся к 1 в слабой операторной топологии. Так как τ^λ вполне положительны и $\tau^\lambda(1) = 1$, то $\|\tau^\lambda\|_{cb} = 1$ [3; лемма 5.1.1], стало быть, $\|\tau_*^\lambda\|_{cb} = 1$. Поскольку множество конечномерных операторов φ на M_* таких, что $\|\varphi\|_{cb} \leq 1$, является выпуклым, то его замыкания в слабой операторной и сильной операторной топологиях совпадают. Тем самым, M_* обладает ВОСА с постоянной 1.

ТЕОРЕМА 1. Операторное пространство E обладает ВОСА с постоянной C тогда и только тогда, когда для всякого операторного пространства F существует сеть конечномерных линейных отображений (φ_λ) на E такая, что $\|\varphi_\lambda\|_{cb} \leq C$ и $\lim_\lambda (\varphi_\lambda \otimes 1)(u) = u$ для каждого $u \in E \hat{\otimes}^o F$.

Доказательство повторяет (5) $\Leftrightarrow$ (7) из [5; теорема 2.4] с тем отличием, что множество конечномерных линейных отображений на E необходимо заменить на множество конечномерных линейных отображений, вполне ограниченная норма которых не больше C .

ТЕОРЕМА 2. Пусть A – коммутативная квантованная банахова алгебра такая, что $A^2 = A$. Если A является C_1 -проективной и обладает ВОСА с постоянной C , то она обладает м.в.о.а.е. с постоянной C_1C .

Этот результат аналогичен [6; теорема 2.3], где алгебра предполагается банаховой и рассматривается классический вариант свойства аппроксимации (без постоянной).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ρ – морфизм левых A -модулей ρ такой, что $\pi\rho = 1_A$ и $\|\rho\|_{cb} \leq C_1$, и пусть (φ_λ) – сеть из теоремы 1. Положим $P(\varphi_\lambda) := \pi(1 \otimes \varphi_\lambda)\rho$. Пусть $a \in A$. Так как $\lim_\lambda (1 \otimes \varphi_\lambda)\rho(a) = \rho(a)$, то $\lim_\lambda P(\varphi_\lambda)(a) = a$. Поскольку φ_λ – конечномерный, он имеет вид $\varphi_\lambda(a) = \sum_{i=1}^n f_i(a)b_i$ для некоторых $f_i \in A^*$ и $b_i \in A$. Поэтому $P(\varphi_\lambda)(a) = \sum_{i=1}^n \chi_i(a)b_i$, где $\chi_i = (1 \otimes f_i)\rho$. Очевидно, χ_i являются морфизмами A -модулей. Тогда $P(\varphi_\lambda)(a) = \sum_{i=1}^n \chi_i(ab_i) = a \sum_{i=1}^n \chi_i(b_i)$. Обозначим $\sum_{i=1}^n \chi_i(b_i)$ через e_λ , тогда $\lim_\lambda ae_\lambda = a$ и $P(\varphi_\lambda): a \mapsto ae_\lambda$. Так как $\|\rho\|_{cb} \leq C_1$, получаем $\|a \mapsto ae_\lambda\|_{cb} = \|P(\varphi_\lambda)\|_{cb} \leq \|\varphi_\lambda\|_{cb}\|\rho\|_{cb} \leq C_1C$.

Впервые группа, алгебра Фурье которой не имеет м.в.о.а.е. (а именно полупрямое произведение $SL(2, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$, где $SL(2, \mathbb{R})$ действует на $\mathbb{R}^2$ линейными преобразованиями), обнаружена Хаагерупом в неопубликованной работе 1980-х годов. Впоследствии были найдены и другие [7]. Отметим, что наличие м.в.о.а.е. в алгебре Фурье наследуется при переходе к замкнутой подгруппе, поэтому из утверждения о $SL(2, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ следует, что $A(SL(3, \mathbb{R}))$ также не обладает м.в.о.а.е., для этого достаточно рассмотреть вложение $(a, x) \mapsto \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $a \in SL(2, \mathbb{R})$ и $x \in \mathbb{R}^2$. Из результатов Пуканского, Диксмье, Конна и Вассермана (см. [8; следствие 6.9(c)] и [9; § 6.4]) следует, что для любой связной локальной компактной группы G , удовлетворяющей второй аксиоме счетности, алгебра $VN(G)$ является полудискретной. Поскольку $\overline{A(G)}^2 = A(G)$ и $A(G) \cong VN(G)_*$ для всех G , из леммы 1 и теоремы 2 получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 3. Существуют связные группы, в частности, $SL(2, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ и $SL(3, \mathbb{R})$, алгебры Фурье которых не являются проективными квантованными банаховыми алгебрами.

Более того, $SL(2, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ и $SL(3, \mathbb{R})$ не являются проективными банаховыми алгебрами. Это следует из соответствующих версий теорем 1 и 2 и того, что $A(SL(2, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2)$ не обладает даже мультипликаторно ограниченной а.е. [7].

Автору неизвестно, является ли $A(Sp(1, n))$ при $n \geq 2$ проективной квантованной банаховой алгеброй, однако она заведомо не 1-проективна. Действительно, $A(Sp(1, n))$ обладает м.в.о.а.е. с постоянной $2n - 1$, причем постоянная не может быть улучшена [10]. Поскольку $Sp(1, n)$ связна, ее алгебра Фурье обладает ВОСА с постоянной 1. Из теоремы 2 следует, что $\|\rho\|_{cb}$ не может быть меньше $2n - 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. Eymard // Bull. Soc. Math. France. 1964. V. 92. P. 181–236. [2] А. Я. Хелемский. Гомология в банаховых и топологических алгебрах. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. [3] E. G. Effros, Z.-J. Ruan. Operator Spaces. New York: Clarendon Press, 2000. [4] O. Yu. Aristov // J. Math. Sci. 2002. V. 111. № 2. P. 3339–3386. [5] E. G. Effros, J. Kraus, Z.-J. Ruan // Res. Notes Math. 1993. V. 5. P. 125–145. [6] F. Ghahramani, Yu. V. Selivanov // Proc. Edinburgh Math. Soc. (2). 1998. V. 41. № 2. P. 393–406. [7] B. Dorofaeff // Math. Ann. 1993. V. 297. № 4. P. 707–724. [8] A. Connes // Ann. of Math. (2). 1976. V. 104. № 1. P. 73–115. [9] V. Runde. Lectures on Amenability. Berlin: Springer-Verlag, 2002. (Lecture Notes in Math. V. 1774.) [10] M. Cowling, U. Haagerup // Invent. Math. 1989. V. 96. № 3. P. 507–549.