Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Арутюнов, О вещественных квадратичных формах, аннулирующих пересечение квадрик, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 1, 161–162

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1393>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 12:44:46

О ВЕЩЕСТВЕННЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМАХ, АННУЛИРУЮЩИХ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ КВАДРИК

А. В. АРУТЮНОВ

Пусть даны k квадратных $n \times n$ вещественных симметричных матриц $Q_i, i = \overline{1, k}$. Они определяют на $\mathbb{R}^n$ квадратичные формы $q_i: q_i(x) = \langle Q_i x, x \rangle$. Рассмотрим конус

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : q_i(x) \leq 0, i = \overline{1, k_1}, q_i(x) = 0, i = \overline{k_1 + 1, k}\}$$

(n, k и $k_1 \leq k$ заданы).

Пусть Q_0 – заданная вещественная симметричная матрица. Она определяет квадратичную форму $q_0(x) = \langle Q_0 x, x \rangle$. Будем говорить, что форма q_0 аннулирует K , если $q_0(x) = 0 \forall x \in K$.

Приведем условия, при которых для любой квадратичной формы q_0 , аннулирующей K , выполняется

$$\exists \lambda \in \Lambda: Q_0 = \lambda Q, \text{ где } \Lambda = \{\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^k) \in \mathbb{R}^k : \lambda^i \geq 0, i = \overline{1, k_1}\}. \quad (1)$$

Здесь и ниже $\lambda Q = \sum_{i=1}^k \lambda^i Q_i$.

Введем необходимые обозначения. Для целого неотрицательного s положим $\Lambda_s = \{\lambda \in \Lambda : \text{ind } \lambda Q \leq s\}$. Здесь ind – индекс квадратичной формы (т.е. количество ее отрицательных собственных значений). Через conv обозначим выпуклую оболочку множества и положим $q(x) = (q_1(x), \dots, q_k(x))$.

ТЕОРЕМА. Пусть конус $\text{conv } \Lambda_{2(k-1)}$ является острым (т.е. не содержит ненулевых подпространств) и

$$\exists h \in \mathbb{R}^n: \langle q(h), \lambda \rangle < 0 \quad \forall \lambda \in \Lambda_{k-1}, \lambda \neq 0. \quad (2)$$

Тогда для любой квадратичной формы q_0 , аннулирующей K , выполняется (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 2 из [1] (см. также [1; с. 23]), (2) и остроты конуса $\text{conv } \Lambda_{2(k-1)}$

$$\exists \hat{h} \in \mathbb{R}^n : \langle \lambda, q(\hat{h}) \rangle < 0 \quad \forall \lambda \in \Lambda_{2(k-1)}, \lambda \neq 0. \quad (3)$$

Рассмотрим экстремальную задачу

$$q_0(x) \rightarrow \min, \quad q_i(x) \leq 0, \quad i = \overline{1, k_1}, \quad q_i(x) = 0, \quad i = \overline{k_1 + 1, k}. \quad (4)$$

Минимум в ней достигается в аномальной точке $x = 0$ (так как по условию $q_0(x) = 0 \forall x \in K$). Применяя к задаче (4) необходимые условия второго порядка (см. [2; § 1.4], [3], а также [4]), получаем существование таких не равных одновременно нулю $\lambda^0 \geq 0, \lambda \in \Lambda$, что $\text{ind}(\lambda^0 Q_0 + \lambda Q) \leq k - 1, \lambda^0 q_0(\hat{h}) + \langle \lambda, q(\hat{h}) \rangle \geq 0$. Тогда $\lambda^0 > 0$. (Действительно, если $\lambda^0 = 0$, то $\lambda \neq 0, \text{ind } \lambda Q \leq k - 1, \langle \lambda, q(\hat{h}) \rangle \geq 0$, что противоречит (3).) Поэтому, не теряя общности, можно взять $\lambda^0 = 1$, и, значит,

$$\text{ind}(Q_0 + \lambda Q) \leq k - 1, \quad q_0(\hat{h}) + \langle \lambda, q(\hat{h}) \rangle \geq 0.$$

Аналогично, заменяя в рассмотренной выше задаче форму q_0 на форму $(-q_0)$, получаем существование $\bar{\lambda}$:

$$\text{ind}(-Q_0 + \bar{\lambda} Q) \leq k - 1, \quad -q_0(\hat{h}) + \langle \bar{\lambda}, q(\hat{h}) \rangle \geq 0.$$

Покажем, что $\bar{\lambda} = -\lambda$. Предположим противное: $\lambda + \bar{\lambda} \neq 0$. Тогда, учитывая, что индекс суммы квадратичных форм не превосходит суммы их индексов, имеем $(\lambda + \bar{\lambda}) \in \Lambda_{2(k-1)}$,

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00334).

$\langle (\lambda + \bar{\lambda}), q(\hat{h}) \rangle \geq 0$. Получили противоречие с (3). Таким образом, $\bar{\lambda} = -\lambda$. Поэтому, положив $\tilde{Q}_0 = Q_0 + \lambda Q$, окончательно имеем:

$$\text{ind } \tilde{Q}_0 \leq k-1, \quad \text{ind}(-\tilde{Q}_0) \leq k-1, \quad q_0(\hat{h}) + \langle \lambda, q(\hat{h}) \rangle = 0. \quad (5)$$

Докажем, что $\tilde{Q}_0 = 0$. Предположим противное. Тогда $\tilde{q}_0 \neq 0$, где $\tilde{q}_0(x) = \langle \tilde{Q}_0 x, x \rangle$. Поэтому в силу (3) существует $\tilde{h}$, достаточно близкое к $\hat{h}$, для которого

$$\langle \mu, q(\tilde{h}) \rangle < 0 \quad \forall \mu \in \Lambda_{2(k-1)}, \quad \tilde{q}_0(\tilde{h}) \neq 0. \quad (6)$$

Проводя рассуждения, аналогичные приведенным выше, но уже не для $\hat{h}$, а для $\tilde{h}$, получаем, что существует $\tilde{\lambda}$ такое, что

$$\text{ind}(\tilde{Q}_0 + \tilde{\lambda} Q) \leq k-1, \quad \text{ind}(-(\tilde{Q}_0 + \tilde{\lambda} Q)) \leq k-1, \quad \langle (\tilde{Q}_0 + \tilde{\lambda} Q)\tilde{h}, \tilde{h} \rangle = 0. \quad (7)$$

Из первой формулы в (5) и второй формулы в (7) имеем

$$2(k-1) \geq \text{ind}(\tilde{Q}_0 - (\tilde{Q}_0 + \tilde{\lambda} Q)) = \text{ind}(-\tilde{\lambda} Q) \implies \text{ind}(-\tilde{\lambda} Q) \leq 2(k-1).$$

Аналогично из второй формулы в (5) и первой формулы в (7) получаем $\text{ind } \tilde{\lambda} Q \leq 2(k-1)$. Таким образом, $\tilde{\lambda} \in \Lambda_{2(k-1)}$, $-\tilde{\lambda} \in \Lambda_{2(k-1)} \implies \tilde{\lambda} = 0$, так как по условию конус $\text{con} \Lambda_{2(k-1)}$ острый. Но из равенства в (7) в силу $\tilde{\lambda} = 0$ имеем $\tilde{q}_0(\tilde{h}) = 0$, что противоречит (6). Полученное противоречие доказывает, что $\tilde{Q}_0 = 0 \implies Q_0 + \lambda Q = 0$. Теорема доказана.

Отметим, что если $k_1 = k$, то Λ — это положительный ортант и поэтому конусы Λ , а значит, и $\text{con} \Lambda_{2(k-1)}$, являются острыми. Если $n \gg k$, то для квадратичных отображений Q общего положения конус $\text{con} \Lambda_{2(k-1)}$ является острым [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. В. Арутюнов // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 1. С. 3–26. [2] А. В. Арутюнов. Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи. М.: Факториал, 1997. [3] А. В. Арутюнов, В. Ячимович // Вестник Моск. ун-та. Сер. 15, вычисл. матем. и кибернет. 1999. № 4. С. 34–40. [4] А. С. Матвеев. Критерии выпуклости образов квадратичных отображений в теории оптимального управления системами, описываемыми дифференциальными уравнениями // Автореферат дисс. . . . докт. физ.-матем. наук. С.-Петербург: СПбГУ, 1998. [5] А. А. Аграчев // Итоги науки и техники. Сер. Алгебра. Геометрия. Топология. Т. 26. М.: ВИНТИ, 1988. С. 85–124.

Российский университет дружбы народов, Москва

Представлено В. М. Тихомировым
Принято редколлегией 23.11.2004