Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Гарсиа, Задача об установившихся колебаниях полуцилиндра с ромбической упругой структурой и связанные с ней самосопряженные квадратичные пучки, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 1, 165–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1395>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 16:19:58

ЗАДАЧА ОБ УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЯХ ПОЛУЦИЛИНДРА С РОМБИЧЕСКОЙ УПРУГОЙ СТРУКТУРОЙ И СВЯЗАННЫЕ С НЕЙ САМОСОПРЯЖЕННЫЕ КВАДРАТИЧНЫЕ ПУЧКИ

М. АРГЕТА ГАРСИЯ

Рассмотрим уравнения установившихся колебаний упругого полуцилиндра $\Omega = \mathbb{R}_{x_1}^+ \times \mathcal{D}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, где $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 = \{(0, x_2, x_3)\}$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial\mathcal{D}$:

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ik}(u)}{\partial x_k} + \rho \omega^2 u_i = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $u = (u_1, u_2, u_3)$ – вектор смещений, $\sigma = (\sigma_{ik})_{i,k=1}^3$ – тензор напряжений, ω – вещественно, $\rho = \rho(x_2, x_3)$ – плотность среды и $0 < \delta < \rho(x) < M$. На боковой поверхности $\Gamma = \partial\mathcal{D} \times \mathbb{R}_{x_1}^+$ полуцилиндра Ω предполагается выполненным одно из условий

$$u|_{\Gamma} = 0,$$

или

$$\sigma(u) \cdot n|_{\Gamma} = 0,$$

где $n = n(x_2, x_3) = (0, n_2, n_3)$, $n_2^2 + n_3^2 = 1$ – внешняя нормаль к границе Γ .

В случае колебаний полуцилиндра Ω с ромбической упругой средой (ромбическая система) свободная энергия имеет вид:

$$W = \frac{1}{2} c_1 e_{11}^2 + \frac{1}{2} c_2 e_{22}^2 + \frac{1}{2} c_3 e_{33}^2 + c_4 e_{11} e_{22} + c_5 e_{11} e_{33} + c_6 e_{22} e_{33} + 2c_7 e_{12}^2 + 2c_8 e_{13}^2 + 2c_9 e_{23}^2,$$

см. [1], где c_i , $i = 1, \dots, 9$, – постоянные, так называемые модули упругости ромбической системы.

Задаче об установившихся колебаниях полуцилиндра с ромбической системой и со свободной границей отвечает следующая спектральная задача с параметром α :

$$\mathcal{C}_\omega(\alpha)\nu \equiv (\alpha^2 \mathcal{A} - \alpha \mathcal{B} + \mathcal{C} - \omega^2 \mathcal{R})\nu = 0, \quad (1)$$

$$\mathcal{U}(\alpha)\nu|_{\partial\mathcal{D}} \equiv (\mathcal{M} + i\alpha \mathcal{N})\nu|_{\partial\mathcal{D}} = 0, \quad (2)$$

где $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ – операторы. Задачу (1)–(2) будем обозначать через $\mathcal{L}_\omega(\alpha)$.

В случае закрепленной границы придем к спектральной задаче с параметром α :

$$\mathcal{C}_\omega(\alpha)\nu \equiv (\alpha^2 \mathcal{A} - \alpha \mathcal{B} + \mathcal{C} - \omega^2 \mathcal{R})\nu = 0, \quad (3)$$

$$\nu|_{\partial\mathcal{D}} = 0. \quad (4)$$

Задачу (3)–(4) будем обозначать через $\mathcal{L}_\omega^0(\alpha)$.

Сведение спектральных задач $\mathcal{L}_\omega$ и $\mathcal{L}_\omega^0$, в случае ромбической системы, к ограниченным самосопряженным пучкам операторов $L_\omega(\alpha)$ и $L_\omega^0(\alpha)$ соответственно проводится аналогично тому, как это было сделано в [2] для изотропного случая.

Изучение пучков операторов, отвечающих задачам о колебаниях упругого полуцилиндра в изотропной среде, когда $c_1 = c_2 = c_3 = \lambda + 2\mu$, $c_4 = c_5 = c_6 = \lambda$, $c_7 = c_8 = c_9 = \mu$, и в трансверсально-изотропной среде, когда $c_1 = a_1$, $c_2 = c_3 = a_3$, $c_4 = c_5 = a_2$, $c_6 = a_3 - 2a_4$, $c_7 = c_8 = a_5$, $c_9 = a_4$, было осуществлено А.Г. Костюченко, М.Б. Образовым [2] и А.А. Шкаликовым, А.В. Шкредом [3] соответственно.

ЛЕММА 1. Для любого числа ε , $0 < \varepsilon < \pi/2$, можно указать такое число N , что задачи $\mathcal{L}_\omega(\alpha)$ и $\mathcal{L}_\omega^0(\alpha)$ являются регулярными эллиптическими по параметру α граничными задачами в области $\Omega_{\varepsilon, N} = \{\alpha : |\arg \alpha| < \pi/2 - \varepsilon, |\arg \alpha| > \pi/2 + \varepsilon, -\pi < \arg \alpha \leq \pi, |\alpha| > N\}$.

Достаточными условиями на коэффициенты c_i для эллиптической природы спектральных задач $\mathcal{L}_0(\alpha)$ и $\mathcal{L}_0^0(\alpha)$ в случае ромбической системы будут:

- 1) $c_i > 0, \quad i = 1, \dots, 9, \quad c_6 \geq c_5 \geq c_4, \quad c_6 + c_9 \geq c_5 + c_8 \geq c_4 + c_7,$
- 2) $c_1 > c_4 + c_7, \quad c_1 > c_5 + c_8, \quad c_2 > c_4 + c_7, \quad c_2 > c_6 + 2c_9, \quad c_3 > c_5 + c_8, \quad c_3 > c_6 + 2c_9,$
- 3) $c_1 c_2 c_3 + 2(c_4 + c_7)(c_5 + c_8)(c_6 + c_9) > c_1(c_6 + c_9)^2 + c_2(c_5 + c_8)^2 + c_3(c_4 + c_7)^2, \quad (5)$
- 4) $c_1 c_2 c_3 + 2c_4 c_5 c_6 > c_1 c_6^2 + c_2 c_5^2 + c_3 c_4^2.$

ТЕОРЕМА 1. Спектры $\sigma(L_\omega)$ и $\sigma(L_\omega^0)$ пучков $L_\omega(\alpha)$ и $L_\omega^0(\alpha)$, $\omega^2 \geq 0$, состоят из собственных значений α_n конечной кратности, симметрично расположенных относительно вещественной оси и начала координат, и, за исключением конечного числа точек, находятся в произвольно малых углах, примыкающих к мнимой оси. Кроме того, при $\omega = 0$ пучок $L_0^0(\alpha)$ не имеет на вещественной оси точек спектра, а пучок $L_0(\alpha)$ имеет лишь одну вещественную точку спектра $\alpha = 0$, которой отвечают четыре линейно-независимых собственных вектора: $P^{-\frac{1}{2}}\nu_0, P^{-\frac{1}{2}}u_0, P^{-\frac{1}{2}}w_0, P^{-\frac{1}{2}}g_0$, где векторы $\nu_0 = (1, 0, 0), u_0 = (0, 1, 0), w_0 = (0, 0, 1), g_0 = (0, x_3, -x_2)$ являются собственными векторами задачи $\mathcal{L}_0(\alpha)$, отвечающими точке $\alpha = 0$.

ТЕОРЕМА 2. Система всех собственных присоединенных векторов (с.п.в.) каждой из задач $\mathcal{L}_\omega(\omega)$ и $\mathcal{L}_\omega^0(\alpha)$ двукратно полна в пространствах $W_2^1(\mathcal{D})$ и $\overset{\circ}{W}_2^1(\mathcal{D})$ соответственно. Половина системы с.п.в. задач $\mathcal{L}_\omega(\alpha)$ и $\mathcal{L}_\omega^0(\alpha)$ полна и минимальна в пространствах $W_2^1(\mathcal{D})$ и $\overset{\circ}{W}_2^1(\mathcal{D})$ соответственно. Кроме того, половина с.п.в. задач $\mathcal{L}_\omega(\alpha)$ и $\mathcal{L}_\omega^0(\alpha)$ будет минимальной (и, конечно, полной) в пространстве $L_2(\mathcal{D})$.

ЛЕММА 2. В точке $\alpha = 0$ задача $\mathcal{L}_0(\alpha)$ имеет следующие цепочки с.п.в.:

$$\begin{aligned} \nu_0 &= (1, 0, 0), \quad \nu_1 = i(0, \lambda_1 x_2, \lambda_2 x_3); \\ u_0 &= (0, 1, 0), \quad u_1 = i(-x_2 + k_2, 0, 0), \quad u_2 = (0, u_{22}, u_{23}), \quad u_3 = (u_{31}, 0, 0); \\ w_0 &= (0, 0, 1), \quad w_1 = i(-x_3 + k_3, 0, 0), \quad w_2 = (0, w_{22}, w_{23}), \quad w_3 = (w_{31}, 0, 0); \\ g_0 &= (0, x_3, -x_2), \quad g_1 = (g_{11}, 0, 0), \end{aligned} \quad (6)$$

где константы k_2 и k_3 зависят от области $\mathcal{D}$, координатные функции $u_{22}, u_{23}, w_{22}, w_{23}$ определяются с помощью условий (5) и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} u_{22} &= \lambda_1 \left(\frac{1}{2} x_2^2 - k_2 x_2 \right) - \lambda_2 \frac{1}{2} x_3^2, & u_{23} &= \lambda_2 (x_2 x_3 - k_2 x_3); \\ w_{22} &= \lambda_1 (x_2 x_3 - k_3 x_2), & w_{23} &= \lambda_2 \left(\frac{1}{2} x_3^2 - k_3 x_3 \right) - \lambda_1 \frac{1}{2} x_2^2; \end{aligned}$$

где $\lambda_1 = (c_5 c_6 - c_3 c_4)/(c_2 c_3 - c_6^2)$, $\lambda_2 = (c_4 c_6 - c_2 c_5)/(c_2 c_3 - c_6^2)$, а u_{31}, w_{31}, g_{11} — решения некоторых краевых задач.

Из теоремы 2 и леммы 2 в статическом случае, т.е. при $\omega = 0$, получим, что если ко всем корневым векторам из верхней полуплоскости задачи $\mathcal{L}_0(\alpha)$ добавить векторы $\nu_0, u_0, u_1, w_0, w_1$ и g_0 из (6), то получится полная и минимальная система в $W_2^1(\mathcal{D})$ (и в $L_2(\mathcal{D})$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теория упругости. М.: Наука, 1987. [2] А. Г. Костюченко, М. В. Образов // Труды семинара им. И. Г. Петровского. 1981. № 6. С. 97–146. [3] А. А. Шкаликов, А. В. Шкред // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 8. С. 1222–1246.