Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. С. Голод, Арифметические кольца, биэндоморфизмы и базисы Грёбнера,
УМН, 2005, том 60, выпуск 1, 167–168

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1396>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 18:12:47

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ КОЛЬЦА, БИЭНДОМОРФИЗМЫ И БАЗИСЫ ГРЕБНЕРА

Е. С. Голод

Коммутативное кольцо R называется арифметическим, если решетка его идеалов дистрибутивна. Как известно [1], это условие равносильно тому, что для всякого максимального идеала m в R локальное кольцо R_m является кольцом Безу (т.е. всякий конечно-порожденный идеал главный), что, в свою очередь, равносильно тому, что множество всех идеалов в R_m линейно упорядочено относительно включения.

ТЕОРЕМА. Следующие условия для коммутативного кольца R эквивалентны:

- 1) для всякого конечно-представимого R -модуля M образ естественного гомоморфизма ψ_M кольца R в кольцо эндоморфизмов $\text{End}_R M$ совпадает с центром $Z(\text{End}_R M)$ этого кольца;
- 2) для всякого семейства элементов $a_1, \dots, a_p$ кольца R модуль сизигий $S_R(a_1, \dots, a_p) = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in R^p : \sum \lambda_i a_i = 0\}$ порождается двучленными соотношениями (т.е. такими $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$, что не более двух элементов среди λ_i отлично от нуля);
- 2') для всякого семейства элементов $a_1, \dots, a_p$ кольца R модуль гомологий Козюля $H(a_1, \dots, a_p; R)$ порождается двучленными циклами $\lambda_i e_i + \lambda_j e_j$;
- 3) для всякого идеала J в кольце многочленов $R[X] = R[X_1, \dots, X_n]$ и заданного допустимого порядка на мономах от $X_1, \dots, X_n$ некоторый базис $\{f_i\}_{i \in I}$ идеала J является его базисом Грёбнера, если (и только если) все S -многочлены для пар (f_i, f_j) , $i, j \in I$, редуцируемы к нулю относительно этого базиса [2];
- 4) R — арифметическое кольцо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\Rightarrow$ 4). Пусть J_1, J_2, J_3 — конечно-порожденные идеалы в R и $M = R/J_1 \oplus R/J_2 \oplus R/J_3$. Тогда элементы кольца $\text{End}_R M$ отождествляются с матрицами $A = (a_{ij})$, где $a_{ij} \in \text{Hom}_R(R/J_j, R/J_i)$. Так как $J_i + J_j$ аннулирует $\text{Hom}_R(R/J_j, R/J_i)$, то диагональные матрицы $A = \text{diag}(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3)$, где $\bar{a}_i = a_i + J_i$, такие, что $a_i \equiv a_j \pmod{J_i + J_j}$, принадлежат центру кольца $\text{End}_R M$. Из сюръективности ψ_M следует выполнение китайской теоремы об остатках, т.е. существование элемента $a \in R$ такого, что $a \equiv a_i \pmod{J_i}$ для $i = 1, 2, 3$. Но это равносильно тому, что $(J_1 + J_3) \cap (J_2 + J_3) = J_1 \cap J_2 + J_3$. Из выполнения этого равенства для любых трех конечно-порожденных идеалов следует, что оно выполняется для всякой тройки произвольных идеалов, т.е. решетка идеалов кольца R дистрибутивна.

4) $\Rightarrow$ 1). Так как M предполагается конечно-представимым, то $\text{End}_R(M)_m = \text{End}_{R_m}(M_m)$ для всякого максимального идеала m в R . Гомоморфизм ψ_{M_m} является композицией локализации ψ_M и вложения $Z(\text{End}_R M)_m \hookrightarrow Z(\text{End}_{R_m}(M_m))$. Достаточно доказать сюръективность ψ_{M_m} для всякого m , так как тогда сюръективны все локализации гомоморфизма ψ_M , а следовательно, и сам ψ_M . Поэтому можно считать кольцо R локальным. Над арифметическим локальным кольцом R конечно-представимый модуль M является конечной прямой суммой циклических: $M = \oplus R/J_i$, где можно считать, что $J_i \subseteq J_{i+1}$. Элементы кольца эндоморфизмов отождествляем с матрицами $A = (a_{ij})$, где $a_{ij} \in \text{Hom}_R(R/J_j, R/J_i)$ и при $j \leq i$ $\text{Hom}_R(R/J_j, R/J_i)$ отождествляется с R/J_i . Центр состоит из диагональных матриц $A = \text{diag}(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_t)$, где $\bar{a}_i = a_i + J_i$. Так как для всякого a_{ij} , $j \leq i$, имеем $a_i a_{ij} = a_{ij} a_j$, то $a_i \equiv a_j \pmod{J_i}$, т.е. $A = \psi_M(a_1)$.

4) $\Rightarrow$ 2). Пусть даны элементы $a_1, \dots, a_p \in R$. Для каждой пары i, j модуль сизигий $S_R(a_i, a_j)$ естественным образом вложен в $S_R(a_1, \dots, a_p)$. Чтобы доказать, что множество $\bigcup_{i,j} S_R(a_i, a_j)$ порождает модуль $S_R(a_1, \dots, a_p)$, достаточно показать, что для всякого максимального идеала m в R образ этого множества в $S_R(a_1, \dots, a_p)_m = S_{R_m}(a_1, \dots, a_p)$ порождает $S_{R_m}(a_1, \dots, a_p)$ (образ элемента a в R_m по-прежнему обозначаем через a). Поэтому можно считать арифметическое кольцо R локальным. Проводим индукцию по числу k ненулевых коэффициентов в соотношении $\sum \lambda_i a_i = 0$. Если $k = 2$, то это верно. Пусть $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$ и, например, $a_1 \in a_2 R$, т.е.

$a_1 = \lambda a_2$. Так как соотношение $(1, -\lambda, 0, \dots, 0)$ содержится в образе $S_R(a_1, a_2)$, а соотношение $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) - (1, -\lambda, 0, \dots, 0)$ порождается образом $\bigcup_{i,j} S_R(a_i, a_j)$ по индуктивному предположению, то соотношение $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ порождается образом $\bigcup_{i,j} S_R(a_i, a_j)$.

Условие 2') является переформулировкой условия 2).

Импликация 2') $\Rightarrow$ 3) непосредственно вытекает из следующего утверждения, содержащегося в [3] (см. также [4]).

Пусть $a_i M_i$ – старший член многочлена f_i , где $i \in I$, $a_i \in R$, M_i – моном. Если для некоторого множества 1-циклов $z_\alpha = \sum_{i \in I} \lambda_{\alpha i} N_i e_i$ в комплексе Козюля $K(\{a_i M_i\}, i \in I; R[X])$ ($\lambda_{\alpha i} \in R$, N_i – мономы) классы гомологий которых порождают $H_1(\{a_i M_i\}, i \in I; R[X])$, все многочлены $p_\alpha = \sum_{i \in I} \lambda_{\alpha i} N_i f_i$ редуцируемы к нулю относительно $\{f_i\}_{i \in I}$, то $\{f_i\}_{i \in I}$ – базис Грёбнера идеала, порождаемого $\{f_i\}_{i \in I}$.

Действительно, пусть $N_{ij} = \text{НОК}(M_i, M_j)/M_i$. Если соотношения между $\{a_i\}$, $i \in I$, в R порождаются двучленными соотношениями $\lambda_{\alpha i} a_i + \lambda_{\alpha j} a_j = 0$, $i, j \in I$, то классы циклов $z_\alpha = \lambda_{\alpha i} N_{ij} e_i + \lambda_{\alpha j} N_{ji} e_j$ порождают $H_1(\{a_i M_i\}, i \in I; R[X])$ (если соотношение $(\lambda_{\alpha i}, \lambda_{\alpha j})$ кратно тривиальному $(a_j, -a_i)$ и M_i, M_j взаимно просты, то цикл z_α является границей и его отбрасывают). Многочлены p_α , соответствующие циклам z_α , – это в точности S -многочлены.

Отметим, что в частном случае, когда R – область главных идеалов, импликация 4) $\Rightarrow$ 3) содержится в [2].

3) $\Rightarrow$ 4) Допустим, что кольцо R не является арифметическим. Тогда в нем имеются элементы a_1, a_2 такие, что в некоторой локализации R_m кольца R идеал, порожденный образами элементов a_1, a_2 , не будет главным. Из этого следует, что во всяком соотношении $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = 0$ коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2 \in m$. Если $a_3 = a_1 + a_2$, то тем же свойством обладают коэффициенты соотношений $\lambda_i a_i + \lambda_j a_j = 0$ для любых $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Рассмотрим в кольце многочленов $R[X]$ от одной переменной идеал $J = (a_1, a_2 X, a_3 X)$ и его базис $f_1 = a_1 X + a_1, f_2 = a_2 X, f_3 = a_3 X, f_\alpha = \mu_\alpha a_1$, где $\{\mu_\alpha\}$ – некоторый базис идеала m в R . Этот базис, очевидно, не является базисом Грёбнера. Тем не менее, все S -многочлены относительно этого базиса редуцируемы к нулю. Действительно, ненулевые S -многочлены соответствуют соотношениям между старшими членами f_1 и одного из многочленов f_1, f_3, f_α . Во всех случаях коэффициент λ при старшем члене f_1 содержится в m , и S -многочлен равен $\lambda a_1 \in m a_1$, а потому редуцируем к нулю.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. Gilmer. Multiplicative Ideal Theory. V. 90. Kingston, Ontario, Canada: Queen's Papers Pure Appl. Math., 1992. [2] W. W. Adams, P. Loustaunau. An Introduction to Gröbner Bases. Providence, RJ: Amer. Math. Soc., 1994. [3] E. S. Golod // Lecture Notes in Math. 1988. V. 1352. P. 88–95. [4] H. M. Möller // J. Symbolic Comput. 1988. V. 6. № 2–3. P. 345–359.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Представлено А. В. Михалевым
Принято редколлегией 23.11.2004