Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Н. Карпенков, Классификация трехмерных многоэтажных вполне пустых
выпуклых отмеченных пирамид, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 1, 169–170

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1397>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 12:33:13

КЛАССИФИКАЦИЯ ТРЕХМЕРНЫХ МНОГОЭТАЖНЫХ ВПОЛНЕ ПУСТЫХ ВЫПУКЛЫХ ОТМЕЧЕННЫХ ПИРАМИД

О. Н. КАРПЕНКОВ

В этой заметке приводится результат решения одной из задач геометрии решетки целых точек и его приложение в теории многомерных цепных дробей. Автор выражает благодарность В. И. Арнольду за внимание к этой работе и полезные замечания.

Определения. Точка пространства $\mathbb{R}^m$ называется *целой*, если все ее координаты целые. Рассмотрим выпуклый многоугольник M , все вершины которого – целые, и целую точку A вне плоскости многоугольника M . Конус с вершиной A и основанием M называется *целой выпуклой отмеченной пирамидой* (с выделенной вершиной A). Целая выпуклая отмеченная пирамида называется *вполне пустой*, если она не содержит целых точек, отличных от вершины и целых точек основания. Два множества называются *целочисленно-аффинно* (*целочисленно-линейно*) *эквивалентными*, если существует аффинное (линейное) преобразование пространства $\mathbb{R}^m$, сохраняющее множество всех целых точек, которое переводит одно множество в другое. Плоскость называется *целой*, если она целочисленно-аффинно эквивалентна некоторой проходящей через начало координат плоскости, содержащей подрешетку решетки целых точек, ранг которой равен размерности плоскости.

Рассмотрим целую двумерную плоскость и целую точку в дополнении к этой плоскости. Пусть евклидово расстояние от данной точки до данной плоскости равно l . Обозначим через l_0 минимальное ненулевое евклидово расстояние до данной плоскости от целых точек трехмерной плоскости, натянутой на рассматриваемые двумерную плоскость и целую точку. Отношение l/l_0 называется *целочисленным расстоянием* от данной целой точки до данной целой плоскости. Целая пирамида называется *многоэтажной*, если целочисленное расстояние от вершины этой пирамиды до плоскости ее основания больше единицы.

Определение многомерной цепной дроби по Клейну. Рассмотрим $n+1$ произвольные гиперплоскости в $\mathbb{R}^{n+1}$, пересечение которых состоит из одной точки – начала координат; пусть, кроме того, все выбранные гиперплоскости не содержат целых точек, отличных от начала координат. Дополнение к этим гиперплоскостям состоит из 2^{n+1} открытых ортантов. Рассмотрим один из них. Граница выпуклой оболочки множества всех целых точек, за исключением начала координат, входящих в замыкание ортанта, называется *парусом* ортанта. Множество всех 2^{n+1} парусов называется *n -мерной цепной дробью*, связанной с $n+1$ заданными гиперплоскостями. Пересечение гиперплоскости с парусом называется *k -мерной гранью паруса*, если оно содержится в некоторой k -мерной плоскости и гомеоморфно k -мерному диску. (См. [1] и [2].)

Формулировка основных утверждений. Через $(a_1, \dots, a_k)$ в $\mathbb{R}^m$ при $k < m$ обозначим точку $(a_1, \dots, a_k, 0, \dots, 0)$. Оказывается, целочисленно-аффинных классов многоэтажных вполне пустых выпуклых трехмерных отмеченных пирамид немного.

ТЕОРЕМА 1. *Любая многоэтажная вполне пустая выпуклая трехмерная отмеченная пирамида целочисленно-аффинно эквивалентна ровно одной из отмеченных пирамид списка “M-W”.*

Отметим, что до настоящего момента про компактные двумерные грани (парусов многомерных цепных дробей), плоскости которых расположены на целочисленном расстоянии, больше единицы, от начала координат, было известно следующее. Такие грани либо треугольные, либо четырехугольные (см. работу Ж.-О. Муссафира [3]). Приведем полную целочисленно-линейную классификацию таких граней.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Любая двумерная компактная грань паруса многомерной цепной дроби, целочисленное расстояние от начала координат до плоскости которой больше единицы, является целочисленно-линейно эквивалентной ровно одной из граней с вершинами из следующего списка:*

- $(2, -1, 0)$, $(2, -a-1, 1)$, $(2, -1, 2)$, $(2, b-1, 1)$, где $b \geq a \geq 1$;

Список “М-W”	Параметры	Коорд. вершины	Координаты основания	Целочисленно-аффинный тип основания
$M_{a,b}$	$b \geq a \geq 1$	$(0, 0, 0)$	$(2, -1, 0),$ $(2, -a - 1, 1),$ $(2, -1, 2), (2, b - 1, 1)$	
$T_{a,r}^\xi$	$a \geq 1, r \geq 2,$ $0 < \xi \leq r/2,$ $\text{НОД}(\xi, r) = 1$	$(0, 0, 0)$	$(\xi, r - 1, -r),$ $(a + \xi, r - 1, -r),$ $(\xi, r, -r)$	
U_b	$b \geq 2$	$(0, 0, 0)$	$(2, 1, b - 1),$ $(2, 2, -1),$ $(2, 0, -1)$	
V		$(0, 0, 0)$	$(2, -2, 1),$ $(2, -1, -1),$ $(2, 1, 2)$	
W		$(0, 0, 0)$	$(3, 0, 2),$ $(3, 1, 1),$ $(3, 2, 3)$	

- $(\xi, r - 1, -r), (a + \xi, r - 1, -r), (\xi, r, -r)$, где $a \geq 1$, a и ξ взаимно просты, причем $r \geq 2$ и $0 < \xi \leq r/2$;
- $(2, 1, b - 1), (2, 2, -1), (2, 0, -1)$, где $b \geq 2$;
- $(2, -2, 1), (2, -1, -1), (2, 1, 2)$ и $(3, 0, 2), (3, 1, 1), (3, 2, 3)$.

Все треугольные грани списка реализуются для парусов любой размерности, большей единицы. Все четырехугольные грани списка реализуются для парусов любой размерности, большей двойки, и не реализуются для парусов размерности два.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] В. И. Арнольд. Цепные дроби. М.: МПНМО, 2002. [2] О. Н. Карпенков // Функциональный анализ и его прил. 2004. Т. 38. № 2. С. 28–37. [3] J.-O. Moussafir. Voiles et Polyèdres de Klein: Géométrie, Algorithmes et Statistiques // Docteur en sciences thèse. Paris: Université Paris IX Dauphine, 2000.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: karpenk@mccme.ru

Представлено В. И. Арнольдом
Принято редколлегией 23.11.2004